

**ВСЕСОЮЗНЫЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ
ИМЕНИ Д.И.МЕНДЕЛЕЕВА**

15/14-78

**МЕТОДЫ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
В СОЗДАНИИ ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ
КОМПЛЕКСОВ**

ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР

ВЫПУСК 228 (288)

1977

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

1900

ВСЕСОЮЗНЫЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ

им. Д.И. МЕНДЕЛЕЕВА

ТЕБЛИССКИЙ ФИЛИАЛ.

м 16402 в -

МЕТОДЫ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
В СОЗДАНИИ ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ
КОМПЛЕКСОВ

Труды метрологических институтов
С С С Р

Выпуск - 226 (286)

Под редакцией - доктор
технических наук, профессора
М.В. ЧХЕИДЗЕ.

Ленинград

1977г.

Основной проблемой измерительной техники вообще и метрологии, в частности, является непрерывное увеличение точности измерений.

Ряд законченных научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ Тбилисского филиала ВНИИМ отражает некоторые достижения в развитии метрологии и измерительной техники. В связи с этим было решено издать настоящий сборник, в котором представлены результаты основных научных исследований и опытно-конструкторских разработок, проводимых Тбилисским филиалом ВНИИМ.

Сборник представит интерес для научных работников и инженеров, работающих в области современной метрологии и точных измерений.

Всесоюзный ордена Трудового Красного знамени
научно-исследовательский институт метрологии
имени Д.И. Менделеева (ВНИИМ)

К ВОПРОСУ ОБ АВТОМАТИЧЕСКОМ ВЫБОРЕ АМПЛИТУДНОГО
ДИАПАЗОНА АНАЛИЗА

При измерении статистических характеристик случайных процессов одной из составных частей анализаторов является входной аттензатор, предназначенный для масштабирования измеряемого входного сигнала с целью наилучшего использования амплитудного диапазона анализатора. В случае, когда амплитудный диапазон измеряемого сигнала значительно превышает амплитудный диапазон анализатора, происходит потеря большого массива информации, в результате чего определяемые характеристики получаются либо урезанными (например, функция $F(x)$ и плотность $f(x)$ распределения вероятностей), либо в них вносятся погрешности (например, математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция и т.д.).

Если же амплитудный диапазон сигнала значительно меньше амплитудного диапазона анализатора, погрешность обусловлена сравнительно грубой дискретизацией анализируемого случайного сигнала. В статье предлагается следующий метод автоматической настройки аттензатора.

Пределы входным сигналом границы произвольно выбранного амплитудного диапазона анализатора рассматриваются как выбросы случайного процесса за некоторый уровень A . Для стационарного случайного процесса $X(t)$ среднее время

пребывания выше заданного уровня A в течение времени T будет^{*)}

$$\bar{t}_A = T \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Обозначим через θ среднее время пребывания процесса $x(t)$ выше уровня A в единицу времени:

$$\theta = \frac{\bar{t}_A}{T} = \rho(x > A) = \int_A^{\infty} f(x) dx. \quad (1)$$

Для центрированных случайных процессов $\theta = \theta(\sigma_x)$.

Или, учитывая, что $\bar{\sigma}_x = K \cdot x_m$, где x_m - граница анализируемого диапазона, K - коэффициент пропорциональности (так, например, для нормального закона обычно K принимает равным 3), получаем $\theta(x_m)$ откуда можно найти обратную функцию $x_m(\theta)$.

За время анализа T можно тем или иным способом получить оценку θ^* среднего времени пребывания $x(\tau)$ выше уровня A в единицу времени. Следовательно, определяемый диапазон x_m^* можно записать как $x_m(\theta^*)$.

Аппаратура автоматического выбора x_m состоит из счетчика для вычисления θ^* и узла, осуществляющего расчет границы диапазона по выражению $x_m(\theta^*)$, либо выдающего рекомендацию по изменению диапазона в ту или иную сторону. Суммарная погрешность, учитывающая смещенность и дисперсию при определении диапазона анализа есть:

$$M\delta^2 = M(x_m - x_m^*)^2 = x_m^2 + M(x_m^*)^2 - 2x_m M(x_m^*). \quad (2)$$

Определим $M(x_m^*)$ и $M(x_m^*)^2$.

*) Свенников А.А., Прикладные методы теории случайных функций, М., Наука, 1968.

Для этого разложим функции $x_m = x_m(\theta)$ и $x_m^2 = [x_m(\theta)]^2$ в ряд Тейлора по степеням θ :

$$x_m = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \theta^i, \quad (3)$$

$$x_m^2 = \sum_{\kappa, \ell=0}^{\infty} A_{\kappa} A_{\ell} \theta^{\kappa+\ell}. \quad (4)$$

Тогда, используя (3) и (4), будем иметь

$$M(x_m^r) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i M(\theta^r)^i, \quad (5)$$

$$M(x_m^2)^r = \sum_{\kappa, \ell=0}^{\infty} A_{\kappa} A_{\ell} M(\theta^r)^{\kappa+\ell}.$$

Для определения $M(\theta^r)^i$ и $M(\theta^r)^{\kappa+\ell}$ найдем в общем виде момент i -го порядка $M(\theta^r)^i$ случайной величины θ^r , которую определяем следующим образом:

$$\theta^r = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt, \quad \text{где } g(t) = \begin{cases} 1, & x(t) \geq A, \\ 0, & x(t) < A. \end{cases}$$

$$\text{Тогда } (\theta^r)^i = \frac{1}{T^i} \int_0^T \dots \int_0^T g(t_1) \dots g(t_n) dt_1 \dots dt_n,$$

а математическое ожидание $(\theta^r)^i$ равно

$$M[(\theta^r)^i] = \frac{1}{T^i} \int_0^T \dots \int_0^T M[g(t_1) \dots g(t_n)] dt_1 \dots dt_n. \quad (7)$$

Рассмотрим подынтегральное выражение в формуле (7)

$$M[g(t_1) \dots g(t_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g_1 \dots g_n f_n(g_1 \dots g_n, t_1 \dots t_n) dg_1 \dots dg_n \quad (8)$$

Плотность вероятности случайного процесса $g(t)$ можно

представить в виде:

$$f_n(g_1, \dots, g_n; t_1, \dots, t_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^1 P_{k_1, \dots, k_n} \delta(g_1 - k_1) \dots \delta(g_n - k_n), \quad (9)$$

где P_{k_1, \dots, k_n} - вероятность принятия функцией $g(t)$ значений k_1, \dots, k_n в моменты времени t_1, \dots, t_n .

Тогда выражение (8) с учетом (9) будет:

$$M[g(t_1) \dots g(t_n)] = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^1 \dots \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^1 P_{k_1, \dots, k_n} \int_{g_1}^{\infty} \delta(g_1 - k_1) dt_1 \dots \int_{g_n}^{\infty} \delta(g_n - k_n) dt_n = \\ = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^1 \dots \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^1 P_{k_1, \dots, k_n} = P_{\frac{t_1, \dots, t_n}{n}} = \int_{g_1}^{\infty} \dots \int_{g_n}^{\infty} f_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n \quad (10)$$

Формула (7) после подстановки в нее выражения (10) примет вид:

$$M[\theta^*]^n = \frac{1}{n^n} \int_0^T \dots \int_0^T \int_{g_1}^{\infty} \dots \int_{g_n}^{\infty} f_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n dt_1 \dots dt_n \quad (11)$$

Окончательное выражение суммарной погрешности MJ^2 в общем виде получим после подстановки (11) в (5) и (6), а их, в свою очередь, в (2).

При использовании в качестве анализаторов цифровых процессоров удобно рассматривать вместо непрерывного случайного процесса цифровую случайную последовательность. При этом

$$M[\theta^*]^n = \frac{1}{n^n} \sum_{i=0}^{T-1} \dots \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{k=0}^{\infty} \dots \sum_{k=0}^{\infty} P(k_1, \dots, k_n, t_1, \dots, t_n), \quad (12)$$

где $T=1, 2, \dots$ - выборка, по которой определяется оценка

$$\theta^* = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} g_i \quad (13)$$

При практических расчетах в формулах (3) и (4) приходится ограничиваться конечным числом членов ряда Тейлора. Вычисления, целесообразно начинать с малого количества членов ряда Тейлора, постепенно увеличивая их количество. Процесс вычисле-

ния можн. прекратить, когда результаты расчетов по каждому итерационному шагу будут мало отличаться друг от друга.

В некоторых случаях процесс вычисления погрешности можно упростить, например, в случае белого шума.

Определим для этого случая моменты случайной величины θ^* .

Момент первого порядка

$$M\theta^* = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{k_1=A}^{\infty} p(k_1, t_1), \quad p(k_1, t_1) = p(k_1),$$

$$M\theta^* = \sum_{k_1=A}^{\infty} p(k_1) \cdot \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} 1 = \sum_{k_1=A}^{\infty} p(k_1) = \theta. \quad (14)$$

Момент второго порядка

$$M[\theta^*]^2 = \frac{1}{T^2} \sum_{t_1, t_2=0}^{T-1} \sum_{k_1, k_2=A}^{\infty} p(k_1, k_2, t_1, t_2).$$

Двумерная плотность распределения вероятностей в данном случае равна

$$p(k_1, k_2, t_1, t_2) = \begin{cases} p(k_1) p(k_2), & t_1 = t_2 \\ 0, & t_1 \neq t_2, k_1 \neq k_2 \\ p(k), & t_1 = t_2, k_1 = k_2 = k \end{cases} =$$

$$= p(k_1) \delta(k_1 - k_2) \delta(t_1 - t_2) + [1 - \delta(t_1 - t_2)] p(k_1) p(k_2).$$

Следовательно

$$\begin{aligned} M[\theta^*]^2 &= \frac{1}{T^2} \sum_{t_1, t_2=0}^{T-1} \sum_{k_1, k_2=A}^{\infty} \left\{ [1 - \delta(t_1 - t_2)] p(k_1) p(k_2) + p(k_1, k_2) \delta(t_1 - t_2) \right\} = \\ &= \sum_{k_1, k_2=A}^{\infty} p(k_1) p(k_2) \cdot \frac{1}{T^2} \sum_{t_1, t_2=0}^{T-1} [1 - \delta(t_1 - t_2)] + \\ &+ \sum_{k_1, k_2=A}^{\infty} p(k_1) \delta(k_1 - k_2) \frac{1}{T^2} \sum_{t_1, t_2=0}^{T-1} \delta(t_1 - t_2) = \\ &= \left[\sum_{k=A}^{\infty} p(k) \right]^2 \left(1 - \frac{1}{T}\right) + \sum_{k=A}^{\infty} p(k) \sum_{k_2=A}^{\infty} \delta(k_1 - k_2) \frac{1}{T} = \left(1 - \frac{1}{T}\right) (M\theta)^2 + \frac{1}{T} (M\theta), \\ M[\theta^*]^2 &= \left(1 - \frac{1}{T}\right) (M\theta)^2 + \frac{1}{T} (M\theta). \quad (15) \end{aligned}$$

В справедливости этого выражения можно легко убедиться, рассмотрев граничные случаи при $T=1$ и $T \rightarrow \infty$.

При $T=1$ из формулы (15) получим $M(\theta^*)^2 = \theta$

Действительно, в этом случае $\theta^* = \theta$ см. формулу (13), и, следовательно $M(\theta^*)^2 = M(\theta)^2 = \theta^2 \cdot p(q=0) + \theta^2 \theta^2 (q=1) = \sum_{k=0}^1 p(k) = \theta$.

При $T \rightarrow \infty$ из формулы (15) имеем

$$M(\theta^*)^2 = \theta^2, \quad \text{что очевидно.}$$

Рассмотрим момент третьего порядка

$$M(\theta^*)^3 = \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \frac{1}{T^3} \sum_{t_1, t_2, t_3=0}^{T-1} P_3(k_1, k_2, k_3; t_1, t_2, t_3) \quad (16)$$

$$P_3(k_1, k_2, k_3; t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} p(k_1) p(k_2) p(k_3), & t_1 \neq t_2 \neq t_3 \quad \text{в)} \\ p(k_1) = p(k_2) p(k_3), & t_1 = t_2 = t_3, \\ & k_1 = k_2 = k_3 \quad \text{г)} \\ p(k_1) = p(k_2), & t_1 = t_2 \neq t_3, \\ & k_1 = k_2 \quad \text{д)} \\ p(k_1) = p(k_2) & t_1 = t_2 \neq t_3, \\ & k_1 = k_2 \quad \text{е)} \\ p(k_1) p(k_2) & t_1 = t_2 \neq t_3, \\ & k_1 = k_2 \quad \text{ж)} \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Трёхмерная плотность $P_3(k_1, k_2, k_3; t_1, t_2, t_3)$ рассматривается в кубе со стороной T , т.е. в этот объём попадает T^3 значений P_3 .

Случай б) (см. формулу (17)) соответствует T точек; каждому из случаев в), г), д) - $(T^2 - T)$ точек, а оставшиеся $T^3 - 3(T^2 - T) - T$ точек соответствует случай а).

Подставив (17) в (16), получим

$$M_n(\theta^*)^2 = \left(1 - \frac{2}{T} + \frac{1}{T^2}\right) \theta^2 + \left(\frac{2}{T} - \frac{1}{T^2}\right) \theta^2 + \frac{1}{T^2} \theta. \quad (18)$$

Очевидно, для момента n -го порядка θ по формуле (12) получим ряд по степеням θ , состоящий из n членов. Младший член этого ряда соответствует θ в первой степени с коэффициентом, равным числу сочетаний из n по n , умноженному на отношение числа точек $t_1 = t_2 = \dots = t_n = T$ к общему количеству точек T^n в области суммирования, т.е.

$$C_n^n \cdot \frac{T^n}{T^n}.$$

Коэффициент при θ^2 будет равен $C_n^{n-1} \cdot \frac{T^{n-1}}{T^n}$. Общий член ряда (исключая старший) можно записать в виде

$$\theta^{m+1} \cdot B_{m+1,n} = \frac{\theta}{T} \cdot \frac{C_n^{n-m} \cdot T^m}{(n-m)!} \cdot \theta^m. \quad (19)$$

Старший член ряда

$$\theta^n B_{n,n} = \frac{\theta}{T^n} \cdot \frac{T!}{(n-n)!} \cdot \theta^{n-1}. \quad (20)$$

Учитывая, что $B_{0,n} = 0$, окончательно получим

$$M_n(\theta^*)^n = \frac{\theta}{T^n} \left[\frac{T!}{(n-n)!} \theta^{n-1} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{C_n^{n-m} \cdot T^m}{(n-m)!} \cdot \theta^m \right] = \sum_{m=0}^n B_{m,n} \theta^m. \quad (21)$$

Выражение (21) справедливо при $n \leq T$, что вполне достаточно для практических расчетов.

Подставив (21) в (5) и (6) и результат - в (2), имеем

$$M_3^2 = x_m^2(\theta) \cdot 2 x_m(\theta) \sum_0^\infty A_m \sum_{m=1}^n B_{m,n} \theta^m + \sum_{k,l=0}^\infty A_k A_l \sum_{m=1}^{k+l} B_{m,k+l} \theta^m,$$

или, с учетом (3) и (4),

$$M\delta^2 = \sum_{k,c=0}^{\infty} A_k A_c [\theta^{k+c} - 2\theta^k \sum_{m=0}^c B_{m,c} \theta^m + \sum_{m=0}^{k+c} B_{m,k+c} \theta^m], \quad (22)$$

где $B_{m,j}$ - определены из выражений (19) и (20). Полученная по выражению (22) погрешность $M\delta^2$ есть функция T (выборки) и λ (уровня).

КЛАССИФИКАТОР ПОМЕХ В СИСТЕМАХ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ НА ЗОНЕ АНСАМБЛЯ ПОМЕХ

Введение. Рассмотрим следующую постановку задачи обнаружения. На вход приемной системы поступает случайная помеха $U_{\gamma}(t)$, принадлежащая ансамблю $U_{\gamma}(t), t \in [t_0, t_0 + T], T < \infty, \gamma \in \Gamma = \{1, n\}$. Значение γ неизвестно, постоянно на $[t_0, t_0 + T]$ и полностью определяет закон распределения $U_{\gamma}(t)$. В произвольной смеси с помехой возможно появление того или иного сигнала из множества случайных сигналов $\{S_{\theta}(t)\}, t \in [t_0, t_0 + T_{\theta}], t_0 > t_0, t_0 + T_{\theta} \leq t_0 + T, \theta \in \Theta$, имеющих заданные законы распределения (в качестве Θ обычно рассматриваются борелевские множества конечномерных евклидовых пространств). Вероятности ситуаций "чистая помеха" или "смесь", а также априорные распределения на Γ и $\Gamma \times \Theta$ неизвестны. В результате анализа выборки на интервале $[t_0, t_0 + T_{\theta}]$ следует принять решение о наличии произвольного сигнала на входе системы, причем условная вероятность ложной тревоги не должна превышать заданной величины α .

Наличие на $[t_0, t_0]$ только помехи позволит использовать в системе обнаружения классификатор помех, анализирующий выборку в интервале $[t_0, t_0 + T_{\text{кл}}], t_0 + T_{\text{кл}} < t_0$ и "включаящий", в зависимости от своего решения, различные правила обнаружения, ориентированные на некоторые подмножества номеров помех из ансамбля.

В настоящей статье такая система сопоставляется (в смысле качества обнаружения) с системой без классификатора, в которой функционирует одно правило, "настроенное" на множество помех $U_{\gamma}(t), \gamma \in \Gamma$. Аналогичная задача рассматривалась в [1], однако

априорная неопределенность относительно вероятностных распределений на множествах сигналов и помех и ограничение на условную вероятность ложной тревоги приводят в нашем случае к иному подходу при анализе. В основе его лежат идеи, принадлежащие Вальду [2], касающиеся связи минимаксных процедур с байесовскими решениями относительно наименее благоприятных априорных распределений.

Решающие функции систем. Пусть Y - выборка (под последней понимается непосредственно заданная случайная величина [3]) из распределения P_{Y^x} помехи $U_Y(t)$, $s \in \Gamma$, на интервале $[t_0, t_0 + T_{KA}]$; X - выборка, порожденная либо распределением P_{X^y} помехи $U_X(t)$, $y \in \Gamma$, на $[t_0, t_0 + T_{0T}]$, либо распределением $P_{X^y \theta}$ смеси $S'_\theta(t)$ с $U_X(t)$, $(y, \theta) \in \Gamma \times \Theta$, на $[t_0, t_0 + T_{0T}]$. Выборки X и Y независимы и принимают значения x и y из \mathcal{X} и \mathcal{Y} соответственно (природа пространств \mathcal{X} и \mathcal{Y} предполагается произвольной, т.е. элементами их могут быть векторы или реализации процессов). Обозначим: $W' = \Gamma \times \Theta$, $W = \Gamma$ и пусть $A, B, B' \in \mathcal{B}$ - алгебры в \mathcal{X}, W, W' соответственно, тогда $\mathcal{P}^X = \{P_\omega^X, \omega \in W \cup W'\}$ данное семейство распределений вероятностей на (\mathcal{X}, A) и $p_\omega(x) = P_\omega^X(dx)/M(dx)$ - плотности по некоторой \mathcal{B} - конечной мере μ , предполагаемые измеримыми относительно $(A \times B)$ и $(A \times B')$, λ, λ' - произвольные распределения вероятностей на (W, B) и (W', B') соответственно. Поставленная выше задача обнаружения формулируется как задача проверки сложных гипотез:

$$H: P^X \in \mathcal{P}_H^X = \{P_\omega^X; (x, A); w\},$$

$$K: P^X \in \mathcal{P}_K^X = \{P_\omega^X; (x, A); w'\} \quad (1)$$

Решающую функцию (правило) в общем случае обозначим $\varphi(x, y)$ и будем предполагать ее рандомизированной, т.е. задачей вероятности принятия K при наблюдении $x \in X, y \in Y$.

Обозначение I.

$\alpha_{\varphi}(\omega) = E_{\omega}^{x, y}[\varphi(x, y)], \omega \in W$ - условная вероятность ошибки первого рода (ложной тревоги);

$\beta_{\varphi}(\omega) = E_{\omega}^{x, y}[1 - \varphi(x, y)], \omega \in W'$ - условная вероятность ошибки второго рода (пропуска сигнала);

$E_{\omega}^{x, y}[\cdot]$ - символ осреднения по распределению $P_{\omega}^{x, y}$, определенному на $X \times Y, \omega \in W \cup W'$;

Требуется, чтобы при всех $\omega \in W$ выполнялось $\alpha_{\varphi}(\omega) \leq \alpha$. В связи с этим ниже рассматриваются только правила уровня α для проверки H .

Решающая функция системы, не использующей классификатор, является частным случаем $\varphi(x, y)$ и имеет вид $\varphi(x)$.

Прежде чем ввести решающую функцию системы с классификатором, определим последний в виде функции $\psi(y)$, принимающей значения $d \in \mathcal{D} = \{1, \dots, R\}$, причем $\text{Вер}\{\psi(y) = d | \omega\} = \ell^d(\omega), \omega \in W$. Значения $\ell^d(\omega)$ считаются заданными и удовлетворяют условию нормировки:

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} \ell^d(\omega) = 1, \omega \in W. \quad (2)$$

Решению классификатора с номером d поставим в соответствие канал (правило) обнаружения с тем же номером и примем, что событие $\psi(y) = d$ влечет за собой "включение" канала d .

Замечание. В дальнейшем исключим из рассмотрения, как не представляющие интереса, номера d решений классификатора,

принимаемых им с нулевой вероятностью, т.е. такие d , для которых $\ell^d(\omega) = 0$ при всех $\omega \in \mathcal{W}$. Множество не нулевых решений и соответствующих им каналов обозначим через $\tilde{\mathcal{D}}$ ($\tilde{\mathcal{D}} \neq \emptyset$ в силу (2) и $\sum_{d \in \tilde{\mathcal{D}}} \ell^d(\omega) = 1$).

Проведем для каждого $d \in \tilde{\mathcal{D}}$ разбиение номеров $\omega \in \mathcal{W}$ на подмножества \mathcal{W}_d и $\mathcal{W}/\mathcal{W}_d$, где

$$\mathcal{W}_d = \{\omega : \ell^d(\omega) > 0\}, \quad d \in \tilde{\mathcal{D}}. \quad (3)$$

(для практических задач $\mathcal{W}_d = \{\omega : \ell^d(\omega) > \delta_d\}$, $\delta_d \in [0, \delta]$, $\delta \ll 1$; величина δ_d должна зависеть от данного α и значений $\ell^d(\omega)$, $d \in \tilde{\mathcal{D}}$, $\omega \in \mathcal{W}$).

В силу сделанного выше замечания, $\mathcal{W}_d \neq \emptyset$ для всех $d \in \tilde{\mathcal{D}}$.

Предполагая в качестве условия событие $\Psi(y) = d$, $d \in \tilde{\mathcal{D}}$ введем условные распределения вероятностей λ_d, λ'_d , $d \in \tilde{\mathcal{D}}$ на $(\mathcal{W}, \mathcal{B}), (\mathcal{W}', \mathcal{B}')$ соответственно. Тогда, пользуясь формулой Байеса, нетрудно установить, что $\lambda_d(\omega) = 0$, $\omega \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_d$ при любых априорных распределениях λ (исключая приводящий к сингулярности случай, когда $\lambda(\omega) = 0$ для всех $\omega \in \mathcal{W}_d$). Поэтому правила обнаружения в каналах $d \in \tilde{\mathcal{D}}$, для которых $\mathcal{W}/\mathcal{W}_d \neq \emptyset$ могут быть "ориентированы" лишь на помехи с номерами $\omega \in \mathcal{W}_d$ так, будто остальных помех $\omega \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_d$ в задаче не существует вовсе. Соответственно, для этих каналов и $\lambda'_d(\mathcal{W}'/\mathcal{W}'_d) = 0$, где $\mathcal{W}'_d = \mathcal{W}'_d \times \Theta$. В частности, в случае идеального классификатора, у которого

$$\ell^d(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{при } d = \omega, \\ 0, & \text{при } d \neq \omega, \end{cases} \quad \omega \in \mathcal{W}, d \in \tilde{\mathcal{D}}, \quad (4)$$

канал $d \in \tilde{\mathcal{D}}$ может быть "настроен" лишь только на помеху со своим номером $\omega = d$.

В канале $d \in \tilde{\mathcal{D}}$, выбранном классификатором, решается задача обнаружения сигнала, которая с учетом изложенного выше записывается в виде:

$$H_d: P^x \in \mathcal{P}_{H_d}^x = \{P_\omega^x; (x, A); \omega, d \in W\},$$

$$K_d: P^x \in \mathcal{P}_{K_d}^x = \{P_\omega^x; (x, A); \omega, d \in W'\}, d \in \tilde{\mathcal{D}}.$$

Решающее правило в системе с классификатором $\Psi_{KL}(x, y)$ также является частным случаем функции $\Psi(x, y)$ и может быть представлено следующим образом:

Обозначение 2

$$\Psi_{KL}(x, y) = \sum_{d \in \tilde{\mathcal{D}}} \Psi_d(x) \Psi_d(y), \quad (5)$$

где $\Psi_d(x)$ - решающая функция в канале d , задающая вероятность принятия K_d при наблюдении $x \in X$, а

$$\Psi_d(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Psi(y) = d, \\ 0, & \text{если } \Psi(y) \neq d, d \in \tilde{\mathcal{D}}. \end{cases}$$

Учитывая, что $\sum_{d \in \tilde{\mathcal{D}}} \ell^d(\omega) = 1$ и $E_\omega^x [\Psi_{KL}(x, y)] = \sum_{d \in \tilde{\mathcal{D}}} \Psi_d(x) \ell^d(\omega), \omega \in W$, получаем

$$\alpha_{\Psi_{KL}}(\omega) = \sum_{d \in \tilde{\mathcal{D}}} \alpha_{\Psi_d}(\omega) \ell^d(\omega), \omega \in W, \quad (6)$$

$$\beta_{\Psi_{KL}}(\omega) = \sum_{d \in \tilde{\mathcal{D}}} \beta_{\Psi_d}(\omega) \ell^d(\omega), \omega \in W', \quad (7)$$

где $\ell^d(\omega) = \ell^d(x, \theta) = \text{вер}\{\Psi(y) = d | x, \theta\} =$

$$= \text{вер}\{\Psi(y) = d | x\} = \ell^d(x) = \ell^d(\omega), \omega \in W.$$

Из выражения (6) видно, что для выполнения условия $\lambda_{\varphi_{kl}}(\omega) \leq \alpha$ при всех $\omega \in W$, достаточно в каждом канале рассматривать правила $\varphi_d(x)$ уровня α для проверки H_d .

Принцип сравнения систем и критерий оптимальности решающих функций.

Пусть F и F_{kl} - классы решающих правил систем без классификатора и с классификатором, причем, решающая функция $\psi(y)$ последнего предполагается заданной. Зафиксируем произвольные функции $\varphi \in F$ и $\varphi_{kl} \in F_{kl}$; при этих функциях будем считать лучшей ту систему, которой принадлежит

$$\min [\sup_{\omega'} \beta_{\varphi_{kl}}(\omega), \sup_{\omega'} \beta_{\varphi}(\omega)]. \quad (8)$$

Очевидно, что при таком принципе сравнения "выгоднее" для каждой из сравниваемых систем, чтобы в (8) их представляли не произвольные правила $\varphi(x)$ и $\varphi_{kl}(x, y)$, а такие $\varphi^*(x)$ и $\varphi_{kl}^*(x, y)$ для которых

$$\sup_{\omega'} \beta_{\varphi^*}(\omega) = \inf_F \sup_{\omega'} \beta_{\varphi}(\omega) = \beta_{\varphi^*}, \quad (9)$$

$$\sup_{\omega'} \beta_{\varphi_{kl}^*}(\omega) = \inf_{F_{kl}} \sup_{\omega'} \beta_{\varphi_{kl}}(\omega) = \inf_{F_{kl}} \sup_{\omega'} \sum_{d \in \mathcal{D}} \beta_{\varphi_d}(\omega) \psi_d(y) \quad (10)$$

Примем, что система без классификатора будет представлена в (8) решающей функцией $\varphi^*(x)$, и тем самым, величиной (9), а в отношении системы с классификатором поступим следующим образом. Рассмотрим правило $\varphi_{kl}^0(x, y)$, которое согласно обозначению 2 записывается в виде: $\varphi_{kl}^0(x, y) = \sum_{d \in \mathcal{D}} \varphi_d^0(x) \psi_d(y)$, где $\varphi_d^0(x)$, $d \in \mathcal{D}$ удовлетворяют условию

$$\sup_{\omega'} \beta_{\varphi_d^0}(\omega) = \inf_{\{\varphi_d\}} \sup_{\omega'} \beta_{\varphi_d}(\omega), \quad d \in \mathcal{D}. \quad (11)$$

Решающая функция $\varphi_{\kappa\lambda}^0(x, y)$ характеризуется величиной $\beta_{\varphi_{\kappa\lambda}^0} = \sup_{\omega \in \mathcal{D}} \beta_{\varphi_{\kappa\lambda}^0}(\omega)$, которая в соответствии с (7) записывается таким образом:

$$\beta_{\varphi_{\kappa\lambda}^0} = \sup_{\omega \in \mathcal{D}} \sum_{d \in \mathcal{D}} \beta_{\varphi_d^0}(\omega) e^d(\omega).$$

Нетрудно видеть, что $\beta_{\varphi_{\kappa\lambda}^0} \geq \sup_{\omega \in \mathcal{D}} \beta_{\varphi_{\kappa\lambda}^*}(\omega)$. Поэтому, если систему с классификатором представлять в (8) не правилом $\varphi_{\kappa\lambda}^*(x, y)$, а решающей функцией $\varphi_{\kappa\lambda}^0(x, y)$, и, следовательно, величиной $\beta_{\varphi_{\kappa\lambda}^0}$, то все выводы, которые при сравнении систем могут быть сделаны в пользу правила $\varphi_{\kappa\lambda}^0(x, y)$ останутся справедливыми и в отношении $\varphi_{\kappa\lambda}^*(x, y)$. Примем такую замену. Помимо достигнутого упрощения, она полезна и с точки зрения единообразия в подходе к определению вида оптимальных правил $\varphi^*(x)$ и $\varphi_d^0(x)$, $d \in \mathcal{D}$.*)

Теперь критерий сравнения систем примет вид

$$\min[\beta_{\varphi_{\kappa\lambda}^0}, \beta_{\varphi^*}]. \quad (12)$$

Сопоставление систем. Для удобства формулировок, приводимых ниже утверждений выпишем необходимые обозначения, а также соделаем ряд допущений.

Обозначение 3. $\varphi_{\lambda, \lambda'}(x)$ - наиболее мощная решающая функция уровня α для проверки гипотезы $H_\lambda: \varphi_\lambda$ против альтернативы $K_{\lambda'}: \varphi_{\lambda'}$, где

$$q_\lambda(x) = \int p_\omega(x) \lambda(d\omega), \quad q_{\lambda'}^1(x) = \int p_\omega(x) \lambda'(d\omega).$$

Обозначение 4. $\beta_{\varphi_\lambda}(\lambda, \lambda') = \int [1 - \varphi_\lambda(x)] q_{\lambda'}^1(x) \mu(d\omega)$ - условная вероятность ошибки второго рода при произвольной решающей функции $\varphi_\lambda(x)$ уровня α для проверки H_λ и альтернативы $K_{\lambda'}$.

) Если представить оптимальное в смысле (10) правило $\varphi_{\kappa\lambda}^(x, y)$ согласно (5), в виде $\varphi_{\kappa\lambda}^*(x, y) = \sum_{d \in \mathcal{D}} \varphi_d^*(x) \varphi_d(y)$, нетрудно заметить, что $\varphi_d^*(x) \equiv \varphi_d^0(x)$ для "идеального" классификатора (4).

Обозначение 5. $\beta(\lambda, \lambda') = \inf_{\varphi_{\lambda, \lambda'}} \beta_{\varphi_{\lambda, \lambda'}}(\lambda, \lambda')$

Обозначение 6. ν, ν' - пара наименее благоприятных распределений (соответственно на (W, B) , (W', B')) в том смысле, что при любых других λ, λ'

$$\beta(\nu, \nu') \geq \beta(\lambda, \lambda').$$

Допущение 1. Множества вида $\{x : q_{\lambda'}(x) = c q_{\lambda}(x)\}$ при различных значениях числа c и произвольных распределениях λ, λ' имеют нулевую вероятностную меру при каждой из плотностей $p_{\omega}(x)$, $\omega \in W \cup W'$.

Допущение 2. Область значений отношения $q_{\lambda'}(x)/q_{\lambda}(x)$ при фиксированных λ, λ' является связной.

Допущение 3.

$$\sup_{\omega'} \beta_{\varphi_{\lambda, \lambda'}}(\omega) = \max_{\omega'} \beta_{\varphi_{\lambda, \lambda'}}(\omega)$$

Для доказательства утверждений относительно величин $\beta_{\varphi_{\kappa\lambda}}$ и $\beta_{\varphi_{\kappa\lambda}}(x)$ мы используем некоторую модификацию теоремы 1 из гл. 8 работы [4], представляемую ниже без доказательства (оно базируется на результатах работ [2, 4] в виде утверждений 1 и 2. Поскольку последние носят общий характер, опустим при их формулировке индексы, характеризующие канал системы с классификатором (может быть снято и предположение, что в (1) $\omega = \{1, n\}$).

Утверждение 1. Пусть имеют место обозначения 1, 3+6 и допущения 1+3. Тогда, если для пары распределений ν, ν' $\sup_{\omega} \alpha_{\varphi_{\nu, \nu'}}(\omega) \leq \alpha$, то решающая функция $\varphi_{\nu, \nu'}(x)$ и только она, минимизирует $\sup_{\omega} \beta_{\varphi}(x)$ в классе всех решающих функций $\varphi(x)$ уровня α для проверки гипотезы $H: p_{\omega}(x)$, $\omega \in W$.

Утверждение 2. Пусть имеют место обозначения 1, 3+6 и допущения 1+3, тогда

$$\sup_{\omega'} \beta_{\varphi_{\nu, \nu'}}(\omega) = \beta(\nu, \nu').$$

Эти утверждения позволяют записать:

$$\varphi^*(x) \equiv \varphi_{\nu, \nu'}^*(x); \beta_{\varphi^*} = \sup_{\omega} \beta_{\varphi^*}(\omega) = \beta(\nu, \nu') \quad (13)$$

$\varphi_d^0(x) \equiv \varphi_{\nu_d, \nu'_d}(x); \sup_{\omega} \beta_{\varphi_d^0}(\omega) = \beta(\nu_d, \nu'_d), d \in \mathfrak{D}$, (14)
 где ν_d, ν'_d - пара наименее благоприятных распределений (на $\mathcal{W}_d, \mathcal{B}$),
 (ω', \mathcal{B}') соответственно, в том смысле, что при любых других λ_d, λ'_d

$$\beta(\nu_d, \nu'_d) \geq \beta(\lambda_d, \lambda'_d)$$

(Число различных правил $\varphi_d^0(x)$, и тем самым каналов, может оказаться меньшим, нежели количество номеров в \mathfrak{D} , поскольку каналы с номерами d и d' , для которых $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}_{d'}$ могут быть "склеены" в один канал).

Утверждение 3. Пусть имеют место обозначения 1+6, допущения 1+3 и пусть $\varphi^*(x)$ и $\varphi_d^0(x), d \in \mathfrak{D}$ - оптимальные решающие функции в смысле (9) и (II) соответственно.

Тогда

$$\beta_{\varphi_{\kappa}^0} \leq \beta_{\varphi^*}(x) \quad (15)$$

Доказательство. Для любого $d \in \mathfrak{D}$ и $\omega \in \mathcal{W}_d$ имеем $\beta_{\varphi_d^0}(\omega) \leq \sup_{\omega'} \beta_{\varphi_d^0}(\omega) = \beta(\nu_d, \nu'_d)$. Учитывая, что ν_d, ν'_d определены на $(\mathcal{W}, \mathcal{B}), (\mathcal{W}', \mathcal{B}')$, можно положить $\nu_d \equiv \lambda, \nu'_d \equiv \lambda'$. Тогда, принимая во внимание обозначение 6 и (13), получаем

$$\beta_{\varphi_d^0}(\omega) \leq \sup_{\omega'} \beta_{\varphi_d^0}(\omega) = \beta(\lambda, \lambda')$$

$$\text{и } \beta_{\varphi_{\kappa}^0} = \sup_{\omega} \sum_{d \in \mathfrak{D}} \beta_{\varphi_d^0}(\omega) \leq$$

$$\leq \sum_{d \in \mathfrak{D}} \beta_{\varphi^*} e^d(\omega) = \beta_{\varphi^*}$$

Если для всех $d \in \tilde{\mathcal{D}}$ $\omega_d = \omega$ ($\omega'_d = \omega'$), то $\varphi_d^0(x) \equiv \varphi^*(x)$ и $\beta \varphi_d^0(\omega) = \beta \varphi^*(\omega)$ при всех $d \in \tilde{\mathcal{D}}$ и $\omega \in \omega'$, откуда следует: $\beta \varphi_{\kappa\lambda}^0 = \beta \varphi^*(x)$. В этом случае необходимость в классификаторе отпадает.

Сформулируем и докажем условие, достаточное для того, чтобы неравенство (15) было строгим. Для удобства доказательства используем, наряду с обозначениями $\omega \in \omega$, $\omega \in \omega'$, эквивалентные им $\gamma \in \omega$, $(\gamma, \theta) \in \omega'$, а также введем

Обозначение 7

$$\tilde{\omega} = \{ \gamma : V(\gamma) \neq 0 \vee V'(\gamma, \theta) \neq 0 \} \subset \omega \quad (17)$$

Утверждение 4. Пусть имеют место обозначения 1+7 и допущения 1+3 и пусть $\varphi^*(x)$ и $\varphi_d^0(x)$, $d \in \tilde{\mathcal{D}}$ - оптимальные решающие функции в смысле (9) и (11) соответственно, причем $\varphi^*(x)$ - единственна. Тогда для выполнения неравенства

$$\beta \varphi_{\kappa\lambda}^0 < \beta \varphi^*(x)$$

достаточно, чтобы в результате разбиения (3) соблюдалось условие $\tilde{\omega} / (\tilde{\omega} \cap \omega_d) \neq \emptyset$ для всех $d \in \tilde{\mathcal{D}}$.

Доказательство. В силу условия теоремы, для каждого d найдется такое значение γ_d , что $\gamma_d \in \omega_d$, но $\gamma_d \in \tilde{\omega} / (\tilde{\omega} \cap \omega_d) \neq \emptyset$. Следовательно, $V_d(\gamma_d) = 0$ и $V'_d(\gamma_d, \theta) = 0$, а потому, с учетом (17), должно выполняться, по крайней мере, одно из неравенств: $V(\gamma_d) \neq V_d(\gamma_d)$ или $V'(\gamma_d, \theta) \neq V'_d(\gamma_d, \theta)$. Тогда, соответственно, $V \neq V_d$ или $V' \neq V'_d$, $d \in \tilde{\mathcal{D}}$, и $\beta \varphi_{\kappa\lambda}^0 = \sup_{\omega, d \in \tilde{\mathcal{D}}} \sum \beta \varphi_d^0(\omega) \rho^d(\omega) \leq \sum_{d \in \tilde{\mathcal{D}}} \sup_{\omega_d} \beta \varphi_d^0(\omega) \rho^d(\omega) = \sum_{d \in \tilde{\mathcal{D}}} \beta (V_d, V'_d) \rho^d(\omega) \leq \sum_{d \in \tilde{\mathcal{D}}} \beta (V, V') \rho^d(\omega) = \beta \varphi^*(x)$

В заключение несколько слов о классификаторе. Предполагалось, что используется "готовый" классификатор, т.е. такой, решающее правило $\varphi(y)$ которого зафиксировано априори (вне зависимости

от задачи обнаружения). Однако утверждение 4 показывает, что для целей обнаружения классификатор следует "выбирать" с учетом содержащегося в этом утверждении требования к $\|e^d(w)\|, w \in W$.

Список литературы:

1. Ковинский А.Н. К оценке целесообразности применения классификатора помех в системах, работающих в присутствии ансамбля помех. "Радиотехника и электроника", 1969, т. XIV, № 4, стр. 713-715.
2. Вальд А. Статистические решающие функции. В сб. "Позиционные игры", "Наука", 1967, стр. 301-522.
3. Прохоров Б.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей, "Наука", 1973, стр. 496.
4. Леман Э.Д. Проверка статистических гипотез, "Наука", 1964, стр. 500.

ЗАДАЧА ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ И ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЕЕ В СМЫСЛЕ НАИБОЛЕЕ СТРОГИХ КРИТЕРИЕВ.

1. Рассмотрим следующую задачу обнаружения. На фоне стохастического шума $\xi(t)$ может иметь место один из множества $\{S_0(t), \theta \in \Omega\}$ полезных сигналов детерминированного или случайного типа; законы распределения вероятностей шумового процесса и смесей его с каждым из полезных сигналов известны. Присутствие какого-либо полезного сигнала в шуме носит случайный, эпизодический характер; вероятность этого события и распределение вероятностей на множестве полезных сигналов неизвестны и не могут быть оценены во время наблюдений. Необходимо на основании реализации исходного процесса принять решение о наличии или отсутствии в нем полезного сигнала, причем условная вероятность ложной тревоги не должна превышать заданную величину α .

Представим наблюдаемый стохастический процесс в виде случайной величины X , принимающей значения x из выборочного пространства \mathcal{X}^* . Процедуру обнаружения или решающую процедуру, будем предполагать в общем случае рандомизированной, т.е. представим ее в виде функции $\varphi(x)$, задающей вероятность принятия решения о наличии сигнала при наблюдении значения $x \in \mathcal{X}$. Относительно процедур $\varphi(x)$ будем всегда предполагать, что они обеспечивают вероятность ложной тревоги, не превышающую α .

Величина $\beta_0(\varphi)$ пусть представляет собой условную вероят-

*) Случайная величина понимается здесь в смысле определения, данного в гл.3 [1], т.е. может быть, в частности, вектором или функцией.

ность пропуска сигнала $S_0(t)$, соответствующую решающей процедуре φ . Качество последней в данной задаче будет характеризоваться, очевидно, совокупностью величин $\beta_0(\varphi)$, $\varphi \in \Omega$. На этой совокупности могут быть построены различные критерии оптимальности процедуры φ .

Выбор того или иного критерия обычно является в известной степени произвольным. В условиях сформулированной выше задачи оказывается приемлемым минимаксный подход к проблеме выбора решения, причем целесообразным представляется так называемый наиболее строгий критерий (или "минимакс потерь") [2]. Согласно данному критерию, оптимальной будет та решающая процедура φ , которая минимизирует величину $\sup_{\varphi \in \Omega} \beta_0^*(\varphi)$, где

$$\beta_0^*(\varphi) = \beta_0(\varphi) - \beta_0, \quad \beta_0 = \min_{\varphi} \beta_0(\varphi).$$

Решающая процедура, оптимальная по "обычному" минимаксному критерию, минимизирует величину $\sup_{\varphi \in \Omega} \beta_0(\varphi)$, т.е. она "настраивается" на обнаружение плохо обнаруживаемого сигнала. При этом возможно, что сигналы, которые в принципе могут быть хорошо обнаружены (т.е. имеют малое значение β_0) будут данной процедурой обнаруживаться плохо, что, очевидно, весьма нежелательно. Наиболее строгий критерий, в силу своей конструкции, лишен такого недостатка, он будет давать решение, при котором качество обнаружения каждого из сигналов сравнительно близко к максимально возможному. Отметим также, что оптимальная по равномерно наиболее мощному критерию решающая процедура будет оптимальна и по наиболее строгому критерию.

2. Дальнейшим выводом, касающимся оптимальных по наиболее строгому критерию решающих процедур, предположим в качестве

базис рассмотрению процедур, оптимальных по "обычному" минимаксному критерию.

Данное рассмотрение, несмотря на ряд известных, содержащихся в нем, идей [2, 3], представляет также самостоятельный интерес.

Пусть \mathcal{A} и \mathcal{B} - заданные σ -поля соответственно в \mathcal{X} и Ω ; природу этих пространств будем предполагать произвольной. Распределения величины X , представляющей наблюдаемый процесс, когда имеет место "чистый шум" или смесь его с сигналом $S_{\theta}(t)$, $\theta \in \Omega$, обозначим соответственно через P_{θ} и P_{θ} , $\theta \in \Omega$, так что $\{P_{\theta}, \theta \in \Omega\}$ - данное семейство распределений вероятностей на пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Относительно последних будем предполагать, что они обладают плотностями $p_{\theta}(x) = P_{\theta}(dx) / \mu(dx)$ по некоторой σ -конечной мере μ , причем эти плотности как функции пары переменных (x, θ) измеримы относительно $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$. Очевидно, что поставленная выше задача обнаружения может быть теперь представлена как задача проверки простой гипотезы $H: P_{\theta_0}$ против сложной альтернативы $K: P_{\theta} \in \{P_{\theta}, \theta \in \Omega\}$ при заданном уровне значимости, равном α . Решающую процедуру φ будем впредь называть просто критерием.

Введем ряд определений и допущений.

О п р е д е л е н и е 1.

$$\beta_{\theta}(\varphi) = \int [1 - \varphi(x)] p_{\theta}(x) \mu(dx), \quad \theta \in \Omega, \quad (1)$$

- условная вероятность ошибки второго рода при альтернативе P_{θ} и критерии φ .

Обозначим через λ произвольное распределение вероятностей на (Ω, \mathcal{B}) .

О п р е д е л е н и е 2. φ_{λ} -наиболее мощный критерий уровня α для проверки гипотезы $H: p_0$ против альтернативы K_{λ} .

$$q_{\lambda}(x) = \int_{\Omega} p_0(x) \lambda(d\theta) , \quad (2)$$

т.е. критерий, дающий $\max \int \varphi(x) q_{\lambda}(x) p_0(dx)$.

О п р е д е л е н и е 3.

$$\beta(\lambda) = \int [1 - \varphi_{\lambda}(x)] q_{\lambda}(x) p_0(dx) \quad (3)$$

- условная вероятность ошибки второго рода при альтернативе q_{λ} и критерии φ_{λ} .

Д о п у щ е н и е 1. Если на множестве $\{x: q_{\lambda}(x) = c p_0(x)\}$ где $q_{\lambda}(x)$ - определенная выражением (2) функция, а c - некоторая константа, вероятность P_0 отлична от нуля, то почти всюду на данном множестве (т.е. кроме, быть может, точек подмножества с нулевой вероятностной мерой) отношение $p_0(x)/p_{\lambda}(x)$ при каждом $\theta \in \Omega$ не зависит от x .

Д о п у щ е н и е 2. Существует $\max_{\theta \in \Omega} \beta_{\theta}(\varphi_{\lambda^*})$, где λ^* таково, что $\beta(\lambda^*) \geq \beta(\lambda)$ при любом λ .

Ниже приводится теорема сугубо вспомогательного характера; ее доказательство, занимающее значительный объем, опущено.

Т е о р е м а 1. Пусть имеют место определения 1,2 и допущение 1. Тогда, если последовательность распределений $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, сходится по вариации к распределению λ^* , т.е.

$$\sup_{\omega \in \Omega} |\lambda_k(\omega) - \lambda^*(\omega)| \rightarrow 0 , \quad (4)$$

то имеет место также сходимость

$$\beta_{\theta}(\varphi_{\lambda_k}) \rightarrow \beta_{\theta}(\varphi_{\lambda^*}), \quad \theta \in \Omega . \quad (5)$$

С помощью данной теоремы докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. Пусть имеют место определения I-3 и допущения 1,2. Тогда, если λ^* - наименее благоприятное распределение в том смысле, что при любом другом λ

$$\beta(\lambda^*) \geq \beta(\lambda) \quad (6)$$

то

$$\max_{\theta \in \Omega} \beta_{\theta}(\varphi_{\lambda^*}) = \beta(\lambda^*) \quad (7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\beta(\lambda, \varphi) = \int [1 - \varphi(x)] g_{\lambda}(x) \mu(dx)$ - условная вероятность ошибки второго рода при произвольном критерии φ уровня α для проверки $H: p_0$ против $K_{\lambda}: g_{\lambda}$. Тогда, согласно (1) и (2),

$$\beta(\lambda, \varphi) = \int_{\Omega} \beta_{\theta}(\varphi) \lambda(d\theta) \quad (8)$$

Очевидно

$$\beta(\lambda) = \min_{\varphi} \beta(\lambda, \varphi) = \beta(\lambda, \varphi_{\lambda}) \quad (9)$$

Из (8) вытекает, что

$$\sup_{\theta \in \Omega} \beta_{\theta}(\varphi) \geq \beta(\lambda, \varphi) \quad (10)$$

Пусть при λ^* , удовлетворяющем (6), $\max_{\theta \in \Omega} \beta_{\theta}(\varphi_{\lambda^*}) = \beta_{\theta^*}(\varphi_{\lambda^*})$.

Из (9) и (10) следует, что

$$\beta_{\theta^*}(\varphi_{\lambda^*}) = \beta(\lambda^*) \quad (II)$$

Полагаем $\lambda^*(\theta^*) \neq 1$, ибо в противном случае, согласно (8) и (9)

$$\max_{\theta \in \Omega} \beta_{\theta}(\varphi_{\lambda^*}) = \beta_{\theta^*}(\varphi_{\lambda^*}) = \beta(\lambda^*, \varphi_{\lambda^*}) = \beta(\lambda^*) \quad ,$$

т.е. заключение теоремы заведомо выполняется. Рассмотрим следующие распределения λ_k , $k=1, 2, \dots$:

$$\lambda_k(\omega) = \begin{cases} (1 - \frac{1}{k})\lambda^*(\omega), & \text{если } \omega \in \theta^*, \\ (1 - \frac{1}{k})\lambda^*(\omega) + \frac{1}{k}, & \text{если } \omega \notin \theta^*, \end{cases} \quad (12)$$

и соответствующие наиболее мощные критерии φ_{λ_k} . Согласно (6) и (9)

$$\beta(\lambda^*) \geq \beta(\lambda_k) = \beta(\lambda_k, \varphi_{\lambda_k}) \quad (13)$$

и $\beta(\lambda^*, \varphi_{\lambda_k}) \geq \beta(\lambda^*)$, поэтому

$$\beta(\lambda^*, \varphi_{\lambda_k}) \geq \beta(\lambda_k, \varphi_{\lambda_k}). \quad (14)$$

В силу (6) и (12)

$$\beta(\lambda_k, \varphi_{\lambda_k}) = (1 - \frac{1}{k})\beta(\lambda^*, \varphi_{\lambda_k}) + \frac{1}{k}\beta_{\theta^c}(\varphi_{\lambda_k}),$$

или иначе

$$\beta(\lambda_k, \varphi_{\lambda_k}) - \beta_{\theta^c}(\varphi_{\lambda_k}) = (k-1)[\beta(\lambda^*, \varphi_{\lambda_k}) - \beta(\lambda_k, \varphi_{\lambda_k})].$$

Отсюда с учетом (14) и (13) следует

$$\beta_{\theta^c}(\varphi_{\lambda_k}) \leq \beta(\lambda_k, \varphi_{\lambda_k}) \leq \beta(\lambda^*).$$

Поскольку полученное соотношение справедливо при любом $k=1, 2, \dots$, то при условии существования соответствующего предела приходим к выводу, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{\theta^c}(\varphi_{\lambda_k}) \leq \beta(\lambda^*). \quad (15)$$

Согласно определению (12) $\frac{\lambda_k(\omega) - \lambda^*(\omega)}{\lambda_k(\omega)} = \frac{1}{k}\lambda^*(\omega) \leq \frac{1}{k}$, откуда вытекает сходимость (4). Поэтому, как это следует из теоремы 1,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{\theta^c}(\varphi_{\lambda_k}) = \beta_{\theta^c}(\varphi_{\lambda^*}).$$

Тогда согласно (15) $\beta_{\theta^c}(\varphi_{\lambda^*}) \leq \beta(\lambda^*)$. Сопоставляя последнее соотношение с (11), приходим к выводу,

что справедливо равенство $\beta_{\theta^*}(\varphi_{\lambda^*}) = \beta(\lambda^*)$ и, следовательно, эквивалентное ему равенство (7).

Т е о р е м а 3. Пусть имеет место определение I-3 и допущения I,2. Тогда если λ^* - наименее благоприятное распределение в смысле (6), то критерий φ_{λ^*} и только этот критерий минимизирует $\sup_{\lambda} \beta_{\theta}(\varphi)$ в классе всех критериев φ уровня α для проверки гипотезы $H: \rho_*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (9) и (10) $\sup_{\lambda} \beta_{\theta}(\varphi) \geq \beta(\lambda^*)$. Отсюда в силу (7) следует, что $\sup_{\lambda} \beta_{\theta}(\varphi_{\lambda^*}) \leq \sup_{\lambda} \beta_{\theta}(\varphi)$.

Допустим теперь, что $\sup_{\lambda} \beta_{\theta}(\varphi^*) = \min_{\varphi} \sup_{\lambda} \beta_{\theta}(\varphi)$. Тогда, учитывая (7) и (10), будем иметь

$$\beta(\lambda^*, \varphi^*) \leq \sup_{\lambda} \beta_{\theta}(\varphi^*) \leq \sup_{\lambda} \beta_{\theta}(\varphi_{\lambda^*}) = \beta(\lambda^*)$$

С другой стороны, согласно (9), $\beta(\lambda^*, \varphi^*) \geq \beta(\lambda^*)$, следовательно, $\beta(\lambda^*, \varphi^*) = \beta(\lambda^*)$. Поскольку выражение (9) равносильно определению величин $\beta(\lambda)$ и φ_{λ} , из равенства $\beta(\lambda^*, \varphi^*) = \beta(\lambda^*)$ следует, что $\varphi^* = \varphi_{\lambda^*}$. Теорема доказана.

Легко показать справедливость следующего утверждения.

Л е м м а. Пусть имеет место определение I-3 и допущения I,2. Тогда, если λ^* - наименее благоприятное распределение в смысле (6) и $\omega \in \{\theta^*: \beta_{\theta^*}(\varphi_{\lambda^*}) < \max_{\lambda} \beta_{\theta}(\varphi_{\lambda^*})\}$, то $\lambda^*(\omega) = 0$.

Действительно, если допустить, что $\lambda^*(\omega) \neq 0$, то согласно (9) и (10)

$$\beta(\lambda^*) = \int_{\Lambda} \beta_{\theta^*}(\varphi_{\lambda^*}) \lambda^*(d\theta) < \int_{\Lambda} \sup_{\lambda} \beta_{\theta}(\varphi_{\lambda^*}) \lambda^*(d\theta) = \sup_{\lambda} \beta_{\theta^*}(\varphi_{\lambda^*}),$$

что противоречит теореме 2 и доказывает лемму.

Будем считать, что элемент $\theta \in \Omega$ вырожден относительно распределения λ , если при метрике

$$\rho(\theta_1, \theta_2) = \sup_{\varphi} |\beta_{\theta_1}(\varphi) - \beta_{\theta_2}(\varphi)|$$

существует такая окрестность $O_{\varepsilon}(\theta)$ этого элемента, что $\lambda(O_{\varepsilon}(\theta)) = 0$.

Теорема 4. Пусть имеют место определения 1-3 и допущения 1,2. При этом распределение λ^* будет наименее благоприятным в смысле (6) тогда и только тогда, когда при всех $\theta' \in \Omega$, не вырожденных относительно λ^* ,

$$\beta_{\theta'}(\varphi_{\lambda^*}) = \max_{\lambda} \beta_{\theta'}(\varphi_{\lambda}). \quad (16)$$

Доказательство. Допустим, что для не вырожденных относительно некоторого распределения λ^* элементов $\theta' \in \Omega$ выполняется равенство (16). Пусть $b^*(\theta) = \lambda^*(d\theta')/\nu(d\theta)$ — плотность распределения λ^* по такой b -конечной мере ν на (Ω, \mathcal{B}) , что $\nu(O_{\theta}(\theta)) \neq 0$ при всех $\theta \in \Omega$. Тогда для произвольного элемента θ'' , вырожденного относительно распределения λ^* , будем иметь $b(\theta'') = 0$. Следовательно, если ω — множество всех вырожденных относительно λ^* элементов $\theta \in \Omega$, то $\lambda^*(\omega) = \int_{\omega} b(\theta) \nu(d\theta) = 0$. Учитывая теперь (8)-(10) и (16), получим

$$\beta(\lambda^*) = \int_{\Omega} \beta_{\theta'}(\varphi_{\lambda^*}) \lambda^*(d\theta') = \int_{\Omega} \max_{\lambda} \beta_{\theta'}(\varphi_{\lambda}) \lambda^*(d\theta') = \max_{\lambda} \int_{\Omega} \beta_{\theta'}(\varphi_{\lambda}) \lambda^*(d\theta') \geq \beta(\lambda, \varphi_{\lambda^*}) \geq \beta(\lambda),$$
 откуда следует, что λ^* — наименее благоприятное распределение в смысле (6).

Покажем теперь обратное. Пусть λ^* — наименее благоприятное распределение в смысле (6). Допустим, что для не вырожденного относительно элемента $\theta' \in \Omega$

$$\beta_{\theta'}(\varphi_{\lambda^*}) < \max_{\lambda} \beta_{\theta'}(\varphi_{\lambda}). \quad (17)$$

Тогда при $0 < \varepsilon < \max_{\lambda} \beta_{\theta'}(\varphi_{\lambda}) - \beta_{\theta'}(\varphi_{\lambda^*})$, согласно введенной выше метрике $f(\theta, \theta')$, для всех $\theta'' \in O_{\varepsilon}(\theta')$

$$\beta_{\theta''}(\varphi_{\lambda^*}) - \beta_{\theta'}(\varphi_{\lambda^*}) < \varepsilon < \max_{\lambda} \beta_{\theta''}(\varphi_{\lambda}) - \beta_{\theta''}(\varphi_{\lambda^*})$$

и, следовательно, $\beta_{\theta''}(\varphi_{\lambda^*}) < \max_{\lambda} \beta_{\theta''}(\varphi_{\lambda})$. Вместе с этим, поскольку θ' — не вырожденный относительно λ^* элемент, то

$\lambda^*(O_e(\theta)) \neq 0$. Полученный результат противоречит лемме, поэтому допущение (17) не верно и справедливо равенство (16). Теорема доказана.

3. Перейдем к рассмотрению решающих процедур, оптимальных по наиболее строгому критерию. Пусть наряду с определениями 1-3 имеет место следующее определение.

Определение 4.

$$\hat{\beta}_e(\varphi) = \beta_e(\varphi) - \beta_e, \quad (18)$$

где $\beta_e = \min_{\varphi} \hat{\beta}_e(\varphi)$.

Определение 5.

$$\hat{\beta}(\lambda, \varphi) = \int_{\Lambda} \hat{\beta}_e(\varphi) \lambda(d\theta). \quad (19)$$

Определение 6.

$$\hat{\beta}(\lambda) = \min_{\varphi} \hat{\beta}(\lambda, \varphi). \quad (20)$$

Для определенных таким образом величин сохраняются соотношения вида (8)-(10), а также (5). Действительно, по определению 5 имеем соотношение подобное (8). Из (18), (19) и (8) следует,

что $\hat{\beta}(\lambda, \varphi) = \beta(\lambda, \varphi) - \int_{\Lambda} \beta_e \lambda(d\theta)$, (21)

а (20), (21) и (9), в свою очередь дают

$$\hat{\beta}(\lambda) = \beta(\lambda) - \int_{\Lambda} \beta_e \lambda(d\theta). \quad (22)$$

Согласно (20)-(22) и (9) приходим к выводу, что справедливо выражение, подобное (9), т.е.

$$\hat{\beta}(\lambda) = \min_{\varphi} \hat{\beta}(\lambda, \varphi) = \hat{\beta}(\lambda, \varphi_2).$$

Из (19) следует, что по аналогии с (10) $\int_{\Lambda} \hat{\beta}_e(\varphi) \lambda(d\theta) \geq \hat{\beta}(\lambda, \varphi)$. Наконец, согласно (18), если выполняется (5), то будет

иметь место также сходимость

$$\hat{\beta}_\theta(\varphi_{\lambda_\epsilon}) \rightarrow \hat{\beta}_\theta(\varphi_{\lambda^*})$$

Заметим, что все выводы, содержащиеся в доказательствах теорем 2-4, базируются исключительно на соотношениях (5), (10) и (11), а также на посылах и заключениях этих теорем. Как уже было показано, указанные соотношения сохраняются относительно величин $\hat{\beta}_\theta(\varphi)$, $\hat{\beta}_{\theta'}(\varphi)$, $\hat{\beta}(\lambda)$, т.е. они инвариантны относительно перехода от β к $\hat{\beta}$. Поэтому совершенно очевидно, что если сделать такой переход в посылах и заключениях данных теорем, то все соответствующие выводы не изменятся и, следовательно, полученные формулировки будут справедливы.

В число указанных посылок и заключений, наряду с выражениями, в которых переход от β к $\hat{\beta}$ тривиален, входят следующие утверждения:

- a) λ^* - наименее благоприятное распределение в смысле (6);
- b) φ_{λ^*} - критерий по определению 2;
- c) φ_{λ^*} - минимизирует $\sup_{\mathcal{L}} \beta_\theta(\varphi)$ в классе всех критериев уровня α ;
- d) θ' - не вырожденный элемент из \mathcal{L} относительно λ^* .

Осуществим в данных утверждениях переход от β к $\hat{\beta}$ и вместе с этим заменим обозначение λ^* на λ° - эту процедуру будем называть впредь переходом к $\hat{\beta}$. Утверждение

a) при этом преобразуется в утверждение

a') λ° - наименее благоприятное распределение в том смысле, что

$$\hat{\beta}(\lambda^\circ) \geq \hat{\beta}(\lambda) \quad (23)$$

при любом λ .

Для осуществления перехода к $\hat{\beta}$ в утверждении

b) учтем, что оно равносильно утверждению $\beta(\lambda^*, \varphi_{\lambda^*}) = \beta(\lambda^*)$. Совершая в последнем переход к $\hat{\beta}$, получим $\hat{\beta}(\lambda^*, \varphi_{\lambda^*}) = \hat{\beta}(\lambda^*)$. Последнее соотношение в силу (21) и (22) эквивалентно соотношению $\beta(\lambda^*, \varphi_{\lambda^*}) = \beta(\lambda^*)$, которое, в свою очередь, равносильно утверждению, что φ_{λ^*} - критерий по определению 2. Таким образом приходим к выводу, что утверждение b) при переходе к $\hat{\beta}$ преобразуется в утверждение

b') φ_{λ^*} - критерий по определению 2.

При переходе к $\hat{\beta}$ в утверждении c) получим

c') φ_{λ^*} минимизирует $\sup_{\mathcal{L}} \hat{\beta}_\theta(\varphi)$ в классе всех критериев φ уровня λ .

Будем считать, что элемент $\theta \in \Omega$ строго вырожден относительно распределения λ , если при метрике

$$\hat{\rho}(\theta_1, \theta_2) = \sup_{\varphi} |\hat{\beta}_{\theta_1}(\varphi) - \hat{\beta}_{\theta_2}(\varphi)|$$

существует такая окрестность $O_\varepsilon(\theta)$ этого элемента, что $\lambda(O_\varepsilon(\theta)) = 0$. С учетом данного определения, утверждение d) при переходе к $\hat{\beta}$ представляется в виде

d') θ' - не строго вырожденный элемент из Ω относительно λ' .

Обратившись к допущениям 1, 2. Первое из них не содержит величин типа β и при переходе к $\hat{\beta}$ должно оставаться без изменения. Допущение 2 используется непосредственно в теореме 2. При переходе к $\hat{\beta}$ вместо него нужно использовать следующее допущение.

Д о п у щ е н и е 3. Существует $\max_{\theta \in \Omega} \hat{\beta}_\theta(\varphi_{\lambda^*})$, где λ^* таково, что $\hat{\beta}(\lambda^*) \geq \hat{\beta}(\lambda)$ при любом λ .

Согласно сделанным выше выводам можно утверждать, что справедливы следующие теоремы относительно оптимальных решений

в смысле наиболее строгих критериев и определяющих их априорных распределений (представим две основные теоремы, аналогичные теоремам 3 и 4).

Т е о р е м а 5. Пусть имеют место определения 1,2,4-6 и допущения 1,3. Тогда, если λ^0 - наименее благоприятное распределение в смысле (23), то критерий χ_{λ^0} и только этот критерий минимизирует $\inf_{\lambda} \beta_{\theta}(\lambda)$, в классе всех критериев χ уровня α для проверки гипотезы $H: \rho_{\theta}$.

Т е о р е м а 6. Пусть имеют место определения 1,2,4-6 и допущения 1,3. При этом распределение λ^0 будет наименее благоприятным в смысле (23) тогда и только тогда, когда при всех θ' , не строго вырожденных относительно λ^0 ,

$$\beta_{\theta'}(\lambda^0) = \max_{\lambda} \beta_{\theta'}(\lambda).$$

Относительно $\beta(\lambda)$ справедливы некоторые утверждения, которые могут быть использованы при нахождении наименее благоприятного распределения λ^0 . Однако, рассмотрение этих вопросов выходит за рамки настоящей статьи.

Список литературы

1. Прохоров Ю.В., Розанов Д.А. Теория вероятностей, "Наука", 1973, 494 с.
2. Леман Э. Проверка статистических гипотез, "Наука", 1964, 498 с.
3. Вальд А. Статистические решающие функции. В сб. "Позиционные игры", "Наука", 1967, с.301-522.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОШИБОК КЛАССИФИКАЦИИ В
РАСПОЗНАЮЩЕЙ СИСТЕМЕ С ПРЕДСКАЗЫВАЮЩИМИ ПРОТОТИПАМИ

Распознающая система с предсказывающими прототипами (РСПП) [1] предназначена для классификации объектов, исходными описаниями которых являются стохастические процессы.

В РСПП каждому j -му классу опознаваемых процессов соответствует отдельный предсказывающий автомат, осуществляющий предсказание по условным математическим ожиданиям. Алгоритм распознавания предусматривает принятие решения в пользу j -го класса, если сумма квадратов ошибок предсказания j -м фильтром является минимальной. При этом могут возникнуть ошибки классификации, оценки которых могут служить для суждения о качестве распознавания.

Для упрощения анализа будем рассматривать вероятности ошибок при классификации двух стохастических процессов (дихотомия), так как случай классификации более двух процессов всегда можно привести к случаю дихотомии, построив иерархическую структуру принятия решений. Кроме того, не нарушая общности рассуждения, можно полагать, что опознаваемые процессы являются центрированными.

Как было показано выше, классификация в РСПП ведется по минимуму суммы квадратов ошибок предсказания Δ_{ij}

$$\Delta_{ij} = \sum_{k=1}^N \delta_{ijk}$$

где δ_{ij} - ошибка предсказания i -м фильтром j -го процесса;

N - число ошибок предсказания.

Если РСШ представлен для классификации процесс $X_1(t)$ то при $\Delta_{21} < \Delta_{11}$ возникает ошибка перепутывания первого процесса со вторым с вероятностью

$$P(1, 2) = P[\Delta_{21} < \Delta_{11} / X_1(t)]$$

Обозначив

$$\Delta_{11} - \Delta_{21} = \gamma_1$$

Можно определить $P(1, 2)$

$$P(1, 2) = \int f[\gamma_1 / X_1(t)] d\gamma_1, \quad (2)$$

где $f[\gamma_1 / X_1(t)]$ - условная плотность распределения разности сумм квадратов ошибок предсказания при предъявлении процесса $X_1(t)$.

Из выражения (2) видно, что для определения вероятностей ошибок перепутывания необходимо определить условный закон распределения $f[\gamma_1 / X_1(t)]$.

Как известно [2], условное математическое ожидание представляется линейной комбинацией отсчетов предистории, т.е. ошибку предсказания можно представить в виде линейной комбинации

$$\delta_{11} = X_1(t_n) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k X_1(t_k) = - \sum_{k=1}^{n-1} a_k X_1(t_k) \quad (3)$$

$$\delta_{21} = X_1(t_n) - \sum_{k=1}^{n-1} b_k X_1(t_k) = - \sum_{k=1}^{n-1} b_k X_1(t_k) \quad (4)$$

где $n-1$ - длина предистории;

a_k и b_k - коэффициенты, получаемые из условия минимума среднеквадратической ошибки предсказания первым и вторым фильтром соответственно.

$$a_n = b_n = -1$$

Так как отсчеты $\chi_i(t_k)$ распределены нормально с $M[\chi_i(t_k)] = 0$ и $D[\chi_i(t_k)] = \sigma_i^2$ ($k = \overline{1, n}$), то δ_{11} и δ_{21} , являющиеся линейными комбинациями отсчетов, также будут распределены нормально со следующими параметрами:

$$M[\delta_{11}] = M[\delta_{21}] = 0 \quad ; \quad (5)$$

$$D[\delta_{11}] = \sigma_1^2 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k < j} a_k a_j \rho_{1kj} \right) = \sigma_{11}^2 \quad ; \quad (6)$$

$$D[\delta_{21}] = \sigma_2^2 \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 + 2 \sum_{k < j} b_k b_j \rho_{2kj} \right) = \sigma_{21}^2 \quad ; \quad (7)$$

где ρ_{1kj} - коэффициент корреляции между k и j -м отсчетами процесса $\chi_1(t)$.

Так как δ_{11} и δ_{21} являются линейными комбинациями одних и тех же отсчетов, то между ними очевидно существует корреляционная зависимость

$$K_{\delta_{11} \delta_{21}} = M \left[\sum_{k=1}^n a_k \chi_1(t_k) \sum_{k=1}^n b_k \chi_1(t_k) \right] = \sigma_1^2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k b_j \rho_{1kj} \quad (8)$$

При классификации рассматриваются суммы квадратов ошибок предсказания и, так как δ_{11} и δ_{21} распределены нормально с $M[\delta_{11}] = M[\delta_{21}] = 0$ и дисперсиями $D[\delta_{11}]$ и $D[\delta_{21}]$, то δ_{11}^2 и δ_{21}^2 будут распределены по закону χ^2 со следующими параметрами:

$$M[\delta_{11}^2] = D[\delta_{11}] \quad ; \quad (9)$$

$$M[\delta_{21}^2] = D[\delta_{21}] \quad ; \quad (10)$$

$$D[\delta_{11}^2] = 2 \sigma_{11}^4 \quad ; \quad (11)$$

$$D[\delta_{21}^2] = 2 \sigma_{21}^4 \quad . \quad (12)$$

Можно показать, что коэффициент корреляции между квадратами ошибок предсказания равен $K_0^2 = 2K^2\delta$

Введем в рассмотрение новую случайную величину

$$\alpha_1 = \delta_{11}^2 - \delta_{21}^2 \quad (13)$$

Очевидно, что

$$M[\alpha_1] = M[\delta_{11}^2] - M[\delta_{21}^2] = \sigma_{11}^2 - \sigma_{21}^2; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} D[\alpha_1] &= D[\delta_{11}^2] + D[\delta_{21}^2] - 2K^2\delta_1 = \\ &= 2(\sigma_{11}^4 + \sigma_{21}^4 - 2K^2\delta_1), \end{aligned} \quad (15)$$

Из выражений (1) и (13) следует, что

$$\gamma_1 = \sum_{\kappa=1}^N \alpha_{1\kappa} = \sum_{\kappa=1}^N \delta_{11\kappa}^2 - \sum_{\kappa=1}^N \delta_{21\kappa}^2 \quad (16)$$

Так как ошибки предсказания $\delta_{ij\kappa}$ ($\kappa = 1, \bar{N}$) независимы [2], то γ_1 является суммой независимых одинаково распределенных величин и, согласно теореме Ляпунова [3]; γ_1 является нормально распределенной случайной величиной со следующими параметрами:

$$M[\gamma_1] = NM[\alpha_1] = N(\sigma_{11}^2 - \sigma_{21}^2); \quad (17)$$

$$D[\gamma_1] = 2N[\sigma_{11}^4 + \sigma_{21}^4 - 2K^2\delta_1], \quad (18)$$

т.е. плотность распределения γ_1 запишется следующим образом:

$$f(\gamma_1/\chi_1(t)) = \frac{\exp\left\{\frac{[\gamma_1 - N(\sigma_{11}^2 - \sigma_{21}^2)]}{4N(\sigma_{11}^4 + \sigma_{21}^4 - 2K^2\delta_1)}\right\}}{2\sqrt{\pi N(\sigma_{11}^4 + \sigma_{21}^4 - 2K^2\delta_1)}} \quad (19)$$

Следовательно, вероятность перепутывания первого процесса со вторым будет определяться следующим образом:

$$P(1,2) = \frac{1 - \varphi\left(\frac{\sqrt{N}(\sigma_{21}^2 - \sigma_{11}^2)}{2\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{21}^2 - 2K^2\sigma_1^2}}\right)}{2} \quad (20)$$

где $\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ - функция Лапласа;
 $\sigma_{11}^2, \sigma_{21}^2$ и $K\sigma_1^2$ - определяются из выражений (6), (7), (8).

Путем аналогичных рассуждений можно получить вероятность перепутывания второго процесса с первым

$$P(2,1) = \frac{1 - \varphi\left(\frac{\sqrt{N}(\sigma_{11}^2 - \sigma_{21}^2)}{2\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_{11}^2 - 2K^2\sigma_2^2}}\right)}{2} \quad (21)$$

Из формул (20), (21) видно, что вероятности ошибок классификации не зависят от дисперсий классифицируемых процессов. Следовательно данный алгоритм можно применять для классификации процессов с неизвестными дисперсиями.

В качестве примера рассмотрим случай классификации двух процессов при предсказании по одной точке. В этом случае $\alpha_1 = \rho_1, \sigma_1 = \rho_2, \alpha_2 = \rho_2, \sigma_2 = -1$, где ρ_1, ρ_2 - коэффициенты корреляции для первого и второго процессов.

Тогда с помощью выражений (6), (7), (8), (20), (21) вероятности перепутывания можно записать в виде:

$$P(1,2) = \frac{1 - \varphi\left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{N}{1 + \frac{2(1-\rho_1^2)}{(\rho_1-\rho_2)^2}}}\right]}{2}; \quad (22)$$

$$P(2,1) = \frac{1 - \varphi\left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{N}{1 + \frac{2(1-\rho_2^2)}{(\rho_1-\rho_2)^2}}}\right]}{2} \quad (23)$$

Следовательно, вероятности ошибок классификации при предсказании по одной точке полностью определяются коэффициентами корреляции классифицируемых процессов и длиной выборки.

Полученные в данной работе формулы могут быть использованы при определении применимости предложенного алгоритма для решения конкретных задач, или для определения длины выборки, обеспечивающей заданные вероятности ошибок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рогавя С.С. Распознавание стохастических процессов с помощью сравнения точности действия ряда обучающихся предсказывающих фильтров. - "Автоматика" АН УССР, 1968, № 5, стр.55-61.
2. Рогавя С.С., Хваниа Р.М., Геладзе В.И. Анализ функционирования предсказывающих прототипов в системе распознавания стохастических процессов. Доклады второй республиканской научно-технической конференции по метрологии, стр.15-21, ТИ ВНИИМ, Тбилиси, 1972.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей, "Наука", М., 1965, 400, стр. с илл.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ В СИСТЕМЕ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ПОВЕРКИ

При использовании различного рода автоматических и полуавтоматических поверочных установок и систем с применением специализированных вычислительных устройств для определения ряда метрологических характеристик и параметров поверяемых объектов возникает необходимость в специальных арифметических устройствах.

Ниже рассматривается разработанное в ТФ ВНИИМ устройство, примененное в автоматизированной системе поверки (АСП) счетчиков электрической энергии для вычисления относительной погрешности. Подобное устройство позволяет воспроизводить методом кусочно-линейной аппроксимации широкий класс нелинейных функций $y = f(x)$.

Относительная погрешность счетчика электрической энергии определяется по формуле:^{*}

$$\delta = \frac{n_n - n_{\phi}}{n_{\phi}} \cdot 100\% \quad (I)$$

где: n_n - номинальное число импульсов формируемых за время одного оборота образцового счетчика;

n_{ϕ} - фактическое число импульсов формируемых за время одного оборота поверяемого счетчика.

Вычисленная часть АСП построена таким образом, что величина n_n сохраняется постоянной для всех типов счетчиков и режимов поверки и равна $2^{10} = 1024$. При выборе этого числа руководствовались тем, что относительная погрешность счетчика лежит в

* Элькин С.Р., Иванов В.В., Симаев С.Ш. Установка для автоматической поверки однофазных счетчиков электрической энергии. Материалы I Республиканской конференции. "Применение методов кибернетики в информационно-измерительной технике", ч.2, Тбилиси, ТФ ВНИИМ им.Д.И.Менделеева, 1973г., с.660-666.

пределах $\pm 6\%$, а необходимая точность определения ее равна 0,1%. При этом относительная погрешность счетчика становится функцией одной переменной. Аппроксимированная зависимость

$$\delta = f(\Delta n) \text{ приведена на рис.1.}$$

Таким образом, воспроизведя эту зависимость функциональным преобразователем, можно для каждого Δn непосредственно определить соответствующую относительную погрешность. Структурная схема устройства, реализующего описанный метод дана на рис.2.

Устройство состоит из двоичного счетчика C_1 , где хранятся определяемые в процессе сбора информации Δn , и счетчика C_2 , который регистрирует значения относительных погрешностей. Для обеспечения необходимой точности определения относительной погрешности при заданном интервале разбора ее значений, достаточно иметь семirazрядные двоичные счетчики, в которых старший разряд используется для знака погрешности. Счетчик C_2 состоит из двух последовательно соединенных двоично-десятичных счетчиков ДДС-1 и ДДС-2 (в ДДС-1 хранится дробная часть погрешности, в ДДС-2 - целая ее часть).

Устройство включает в себя также схемы совпадения СС1 и СС2, которые срабатывают в момент, соответствующий переходу с одного линейного участка кривой (см.рис.1) на последующий. Схема сравнения СС1 срабатывает при значениях относительной погрешности равных +3,7; +5,3; +6,4, а схема сравнения СС2 - при значениях -1,3; -2,8; -3,6; -4,8; -5,7. Генератор импульса ГИ служит для переписи информации из C_1 в C_2 .

Рассмотрим, как происходит вычисление положительных значений относительно погрешности. Как видно из рис.1 на участке OA

разность Δn и относительная погрешность прямо пропорциональны Δn в свою очередь, равно дополнительному коду, записанному в Сч1. Поэтому, если погрешность находится в пределах 0-3,7% при параллельном заполнении Сч1 и Сч2 сигнал переполнения первого счетчика запирает оба счетчика и код, записанный в двоично-десятичных счетчиках будет равен погрешности δ .

После погрешности $\delta = 3,7\%$ эта пропорциональность нарушается и на каждом последующем отрезке увеличивается относительно предыдущего на единицу младшего разряда (см. рис. 1). Для перехода на последующие участки нелинейности А, В, С производится корректировка; а именно, при достижении погрешности значений +3,7; 15,3; +6,4, схема совпадения СС1 запирает вход Сч1 на необходимое количество импульсов.

Отрицательное значение погрешности также прямо пропорционально разности Δn , Δn в свою очередь равно прямому коду Сч1. С целью применения такого же метода переписи и сохранения пропорциональной зависимости необходимо, либо код Сч1 преобразовать в дополнительный, либо применить метод двойной переписи с помощью буферного счетчика. Первое, связанное осложнением схемы, второе с большими временными затратами.

В данном устройстве применен реверсивный счетчик Сч2, который в случае отрицательной погрешности работает на вычитание, а корректировка кода погрешности происходит аналогично описанному выше для положительных значений, с той разницей, что в точках D , E , F , K , N запирается счетчик Сч2.

Выбор постоянных углов наклона линейных участков аппроксимированной кривой приводит к постоянству частоты заполнения счетчиков, что значительно упрощает аппаратное исполнение поворочных установок, использующих арифметические устройства.

Аналогичным образом можно строить различные монтажные кривые при условии постоянства угла наклона на всех линейных участках их аппроксимированных зависимостей. Переход с одного участка на другой реализуется соответственно построенными схемами сравнения.



Рис. 2

Схемы сравнения аппроксимированных зависимостей

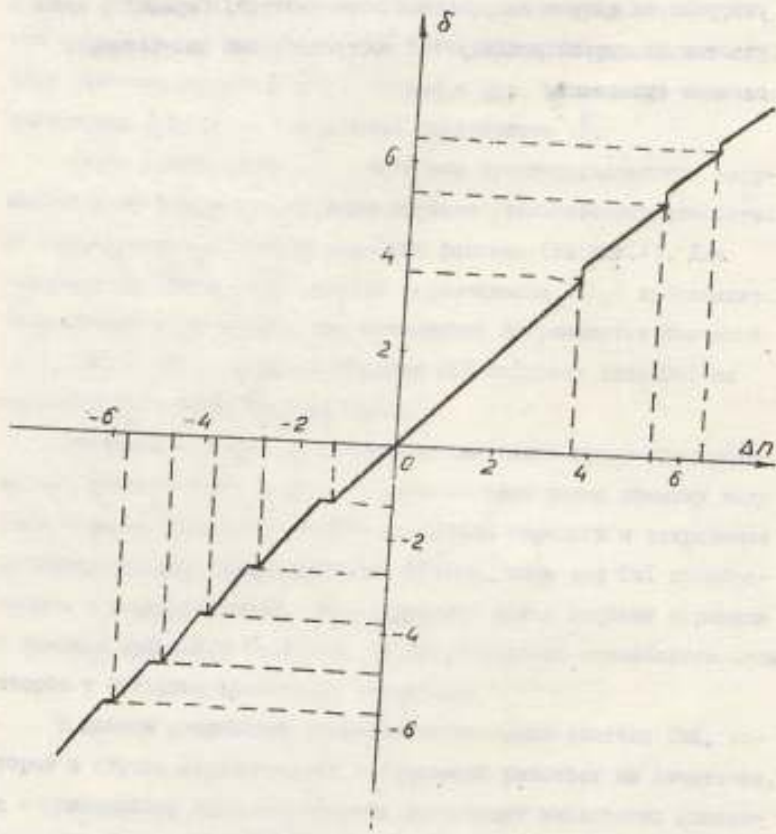


Рис. 1

Аппроксимация функции $\delta = f(\Delta\pi)$

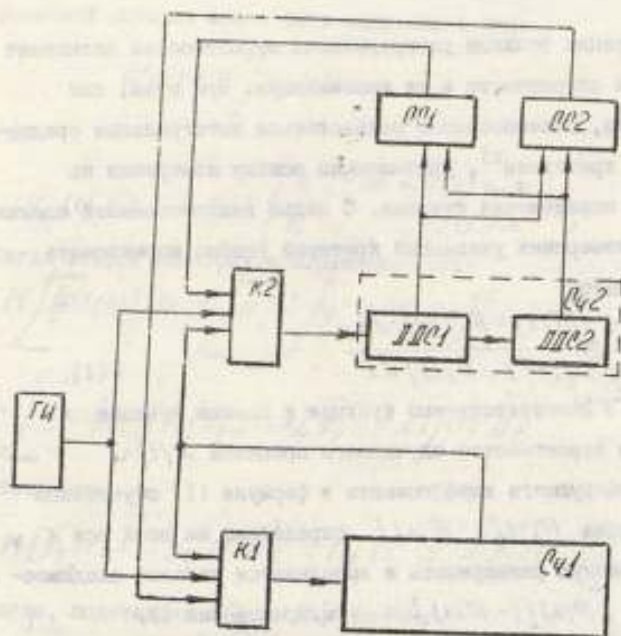


Рис. 2

Блок-схема функционального преобразователя

О РАСЧЕТЕ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ
ОДНОМЕРНОГО СЛУЧАЙНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

При измерении функции распределения вероятностей возникает задача оценки погрешности и ее минимизации. При этом, как показал анализ, целесообразно пользоваться интегральным средне-квадратичным критерием⁽¹⁾, учитывающим ошибку измерения на всей области определения функции. С целью количественной оценки погрешности измерения указанный критерий удобно нормировать следующим образом:

$$\gamma = \frac{M \int_{-\infty}^{\infty} [F(x) - F^*(x)]^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} F(x)[1 - F(x)] dx} \quad (1)$$

где $F(x)$ и $F^*(x)$ соответственно функция и оценка функции распределения вероятностей случайного процесса $x(t)$.

Выбор нормирующего коэффициента в формуле (1) обусловлен тем, что функция $F(x)[1 - F(x)]$ определена на всей оси x , имеет квадратичную размерность и выполняется условие сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)[1 - F(x)] dx$ (см. приложение 1).

Как известно, непараметрические измерения функции распределения $F(x)$ проводятся в ограниченном диапазоне $x \in [x_{мин}, x_{макс}]$. Поскольку априори известно, что $F(-\infty) = 0$, а $F(+\infty) = 1$ естественно принять за значение $F^*(x)$ в областях $x < x_{мин}$, $x > x_{макс}$ соответственно ноль и единицу. Поэтому числитель в выражении (1), представляющий абсолютную погрешность измерения, примет вид

$$\tilde{\gamma} = \int_{-\infty}^{x_{мин}} [F(x)]^2 dx + M \int_{x_{мин}}^{x_{макс}} [F(x) - F^*(x)]^2 dx + \int_{x_{макс}}^{\infty} [1 - F(x)]^2 dx \quad (2)$$

(1) Джангис Г., Цатто Д. Спектральный анализ и его приложения
Вып. 2., М., 1972.

Рассмотрим:

$$M \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} [F^*(x) - \bar{F}^*(x)]^2 dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} [F^*(x)]^2 dx + M \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} [\bar{F}^*(x)]^2 dx - 2M \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F^*(x) \bar{F}^*(x) dx. \quad (3)$$

Непараметрическая оценка функции распределения по коррелированной выборке может быть записана в виде

$$\bar{F}^*(x) = \frac{1}{T} \int_0^T y_F(t) dt, \quad (4)$$

где

$$y_F(t) = y_F(t, x) = \begin{cases} 1, & -\infty < F(t) \leq x \\ 0, & F(t) > x \end{cases}. \quad (5)$$

Тогда второй интеграл в выражении (3):

$$\begin{aligned} M \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} [\bar{F}^*(x)]^2 dx &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} M \left[\frac{1}{T} \int_0^T y_F(t, x) dt \right]^2 dx = \\ &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \frac{1}{T^2} \iint_0^T M [y_F(\tau, x) y_F(s, x)] d\tau ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим

$$M [y_F(\tau, x) y_F(s, x)] = \Gamma_y(\tau - s, x). \quad (7)$$

Тогда, подставляя (7) в (6), получим

$$M \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} [F^*(x)]^2 dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \frac{1}{T^2} \iint_0^T \Gamma_y(\tau - s, x) d\tau ds.$$

Введем функцию окна

$$D(u, v) = \begin{cases} 1, & 0 \leq v \leq u \\ 0, & \text{вне} \end{cases}$$

Тогда

$$M \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} [F^*(x)]^2 dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} D(\tau, s) ds \int_{-\infty}^{\infty} D(\tau, t) \Gamma_y(\tau - s, x) d\tau \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(\tau, t) \Gamma_y(\tau - s, x) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} D(\tau, t) \Gamma_y(\tau - s, x) e^{-j\omega\tau} d\tau \Big|_{\omega=0} \quad (9)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} Z(\tau, j\omega) G_{ys}(-\omega) d\omega,$$

где, по формулам преобразования Фурье:

$$\left. \begin{aligned} Z(\tau, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} D(\tau, t) e^{-i\omega t} dt \\ D(\tau, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Z(\tau, \omega) e^{i\omega t} d\omega \\ G_{yz}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_y(\tau-s) e^{-i\omega \tau} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Можно показать, что

$$G_{yz}(-\delta) = e^{i\delta S} G_y(\delta) \quad (11)$$

Подставляя (9) в (8) с учетом (11), получим

$$M \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} [F^*(x)]^2 dx = \frac{1}{T} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \int_{-\infty}^{\infty} Z(\tau, \nu) G_y(\nu) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} D(\tau, s) e^{i\nu s} ds. \quad (12)$$

Учитывая формулы (10) и применяя функцию окна $D(u, \nu)$,

выражение (12) можно привести к виду: (см. приложение II)

$$M \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} [F^*(x)]^2 dx = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) dt \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \Gamma_y(\tau, x) dx. \quad (13)$$

Представим $\Gamma_y(\tau, x)$ на основании равенства (5) и (7) через двумерную плотность распределения

$$\Gamma_y(\tau, x) = M[y_y(\tau, x), y_y(\tau + \tau, x)] = \iint_{-\infty}^{\infty} f_{2Y}(\gamma_1, \gamma_2, \tau) d\gamma_1 d\gamma_2. \quad (14)$$

Тогда

$$\frac{1}{T} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \Gamma_y(\tau, x) dx = \frac{1}{T} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \iint_{-\infty}^{\infty} f_{2Y}(\gamma_1, \gamma_2, \tau) d\gamma_1 d\gamma_2 \quad (15)$$

выражение (15) после ряда преобразований (см. приложение III)

приводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \Gamma_y(\tau, x) dx &= \frac{2}{T} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x_{\max} - \gamma_2) d\gamma_2 \int_{-\infty}^{\gamma_2} f_{2Y}(\gamma_1, \gamma_2, \tau) d\gamma_1 + \\ &+ \frac{2(x_{\max} - x_{\min})}{T} \int_{-\infty}^{x_{\min}} d\gamma_2 \int_{-\infty}^{\gamma_2} f_{2Y}(\gamma_1, \gamma_2, \tau) d\gamma_1 + \frac{1}{T} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x_{\max} - \gamma) f_{1Y}(\gamma, \tau) d\gamma + \\ &+ \frac{x_{\max} - x_{\min}}{T} \int_{-\infty}^{x_{\min}} f_{1Y}(\gamma, \tau) d\gamma. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя (16) в (13), получим:

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} M[F'(x)]^2 dx = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) dt \left[2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - \tau) d\tau \int_{-\infty}^{\tau} f_2(\tau, \tau_2, \tau) d\tau_2 + \right. \\ \left. + 2(x_{\max} - x_{\min}) \int_{-\infty}^{x_{\max}} d\tau_2 \int_{-\infty}^{\tau_2} f_2(\tau, \tau_2, \tau) d\tau + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x_{\max} - \tau) f_2(\tau, \tau) d\tau + \right. \\ \left. + (x_{\max} - x_{\min}) \int_{-\infty}^{x_{\max}} f_2(\tau, \tau) d\tau \right]. \quad (17)$$

Рассмотрим интеграл из равенства (3)

$$-2M \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F(x) F'(x) dx = -2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F(x) dx \int_{-\infty}^x f(\tau) d\tau \quad (18)$$

где

$$\int_{-\infty}^x f(\tau) d\tau = M[F'(x)].$$

Подставляя (17) и (18) в (3), а последнее - в выражение (2),

получим

$$\delta = - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F^2(x) dx + \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) dt \left[2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - \tau) d\tau \int_{-\infty}^{\tau} f_2(\tau, \tau_2, \tau) d\tau_2 + \right. \\ \left. + 2(x_{\max} - x_{\min}) \int_{-\infty}^{x_{\max}} d\tau_2 \int_{-\infty}^{\tau_2} f_2(\tau, \tau_2, \tau) d\tau + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x_{\max} - \tau) f_2(\tau, \tau) d\tau + \right. \\ \left. + (x_{\max} - x_{\min}) \int_{-\infty}^{x_{\max}} f_2(\tau, \tau) d\tau \right] - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F^2(x) dx + \\ + \int_{x_{\min}}^{\infty} [1 - F(x)]^2 dx. \quad (19)$$

Таким образом, получено аналитическое выражение, связывающее погрешность измерения с параметрами измерения: временем анализа и границами амплитудного диапазона анализируемого процесса.

Это выражение может быть принято в качестве расчетного при проектировании статистических анализаторов функций распределения.

Приложение I

Доказательство сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)[1-F(x)]dx$.

Как известно

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(\tau) d\tau \\ 1-F(x) &= \int_x^{\infty} f(\tau_2) d\tau_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $f(\tau)$ - плотность распределения вероятностей процесса $x(t)$.

Тогда $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)[1-F(x)]dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^x f(\tau) d\tau \int_x^{\infty} f(\tau_2) d\tau_2$ (2)

Введем функцию

$$A(u, v) = \begin{cases} 1, & v < u \\ 0, & v \geq u \end{cases}$$

и преобразуем равенство (2)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)[1-F(x)]dx &= \iiint A(x, \tau_1) \cdot A(\tau_2, x) \cdot f(\tau_1) \cdot f(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 dx = \\ &= \iint f(\tau_1) \cdot f(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \int A(\tau_2, x) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(x, \tau_1) \cdot A(\tau_2, x) dx = \begin{cases} \tau_2 - \tau_1, & \text{при } \tau_1 < \tau_2 \\ 0, & \text{при } \tau_1 \geq \tau_2 \end{cases}$$

Следовательно, равенство (3) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)[1-F(x)]dx &= \iint (\tau_2 - \tau_1) f(\tau_1) f(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_2 f(\tau_2) d\tau_2 \int_{-\infty}^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1 - \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau_2) d\tau_2 \int_{\tau_2}^{\infty} f(\tau_1) d\tau_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Однако

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2) dx_2 = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1) dx_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x_2) dx_2 = M(x) \end{aligned} \right\}$$

С учетом неравенств (5), (4) можем записать

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) [1-F(x)] dx &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x_2) dx_2 \right| + \left| M(1x1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2) dx_2 \right| \leq \\ &\leq |M(x)| + |M(1x1)| = const \end{aligned}$$

Приложение II

Преобразование выражения (I2).

Преобразуем выражение (I2). Для этого, исходя из (10), введем обозначение

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau, s) e^{j\tau s} ds = \bar{z}(\tau, j\omega).$$

Учитывая, что $\bar{z}(\tau, j\omega) = z(\tau, -j\omega)$, как комплексно сопряженные функции, выражение (I2) перепишется:

$$\begin{aligned} \int_{x_{min}}^{x_{max}} M[F^*(x)]^2 dx &= \frac{1}{T^2} \int_{x_{min}}^{x_{max}} dx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{z}(\tau, j\omega) z(\tau, -j\omega) G_y(\nu, x) d\nu = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{z}(\tau, j\omega)|^2 G_y(\nu, x) d\nu. \end{aligned}$$

Обозначим $|\bar{z}(\tau, j\omega)|^2 = \bar{z}_1(\nu)$, тогда

$$\begin{aligned} \int_{x_{min}}^{x_{max}} M[F^*(x)]^2 dx &= \frac{1}{T^2} \int_{x_{min}}^{x_{max}} dx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{z}_1(\nu) G_y(\nu, x) d\nu = \frac{1}{T^2} \int_{x_{min}}^{x_{max}} dx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{z}_1(\tau) G_y(\tau, x) d\tau = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{x_{min}}^{x_{max}} dx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{z}_1(\tau) G_y(\tau, x) d\tau, \end{aligned}$$

где

$$D_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\tau, \omega) \tilde{f}(\tau, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\tau, \omega) \tilde{f}(\tau, -\omega) e^{i\omega\tau} \cdot e^{i\omega(s-s)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} D(\tau, s) D'(\tau, s) ds.$$

Обозначим $\omega' = -\omega$, тогда $D'(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\tau, \omega) e^{i\omega'(s-\tau)} d\omega' = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\tau, \omega) e^{i\omega'(s-\tau)} d\omega' = D(\tau, s-\tau).$

Следовательно

$$D'(\tau, s-\tau) = D(\tau, s-\tau)$$

и

$$D_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} D(\tau, s) D(\tau, s-\tau) ds$$

Подставляя значения функций $D(\tau, s)$ и $D(\tau, s-\tau)$, получим

$$D_1(\tau) = (T-\tau) \cdot D(\tau, \tau)$$

Отсюда

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} M[P^*(x)]^2 dx = \frac{1}{T} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \int_{-\infty}^{\infty} (T-\tau) D(\tau, \tau) \Gamma_2(\tau, x) d\tau = \\ = \frac{1}{T} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \Gamma_2(\tau, x) d\tau.$$

Приложение III

Преобразование выражения (15).

Рассмотрим выражение $\frac{1}{T} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \iint_{-\infty}^{\infty} f_{2r}(\tau_1, \tau_2, \tau) d\tau_1 d\tau_2 =$

$$= \frac{1}{T} \iiint_{-\infty}^{\infty} D(x_{\max} - x_{\min}, x - x_{\min}) \cdot A(x, \tau_2) \cdot f_{2r}(\tau_1, \tau_2, \tau) \tau d\tau_2 dx,$$

где

$$A(u, v) = \begin{cases} 1, & v < u \\ 0, & v \geq u \end{cases}$$

После подстановки значений функций Λ получаем:

$$\frac{1}{T} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \iint_{\tau_1, \tau_2} f_{2T}(\tau_1, \tau_2, \tau) d\tau_1 d\tau_2 = \frac{1}{T} \iint_{\tau_1, \tau_2} f_{2T}(\tau_1, \tau_2, \tau) d\tau_1 d\tau_2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} D(x_{\max} - x_{\min}, x - x_{\min}) \times \\ \times [A(\tau_2, \tau) A(x, \tau_1) + A(\tau_1, \tau_2) A(x, \tau)] + \frac{\delta(\tau_1 - \tau_2)}{\delta(0)} A(x, \tau)] dx,$$

где $\delta(\tau)$ - дельта-функция.

Раскроем скобки во втором интеграле и рассмотрим каждое слагаемое отдельно:

$$A(\tau_2, \tau) \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} D(x_{\max} - x_{\min}, x - x_{\min}) A(x, \tau_1) dx = \\ = A(\tau_2, \tau) \times \left\{ \begin{array}{l} x_{\max} - \tau_2, \text{ при } x_{\min} \leq \tau_2 \leq x_{\max} \\ x_{\max} - x_{\min}, \text{ при } \tau_2 < x_{\min} \\ 0 \text{ при } \tau_2 > x_{\max} \end{array} \right\} = \\ = A(\tau_2, \tau) \cdot D(x_{\max} - x_{\min}, \tau_2 - x_{\min})(x_{\max} - \tau_2) + \\ + A(\tau_2, \tau) \cdot A(x_{\min}, \tau_2)(x_{\max} - x_{\min}).$$

Аналогично, второй и третий члены суммы

$$A(\tau_1, \tau_2) \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} D(x_{\max} - x_{\min}, x - x_{\min}) A(x, \tau_1) dx = \\ = A(\tau_1, \tau_2) D(x_{\max} - x_{\min}, x - x_{\min})(x_{\max} - \tau_1) + A(x_{\min}, \tau_1)(x_{\max} - x_{\min}), \\ \frac{\delta(\tau_1 - \tau_2)}{\delta(0)} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} D(x_{\max} - x_{\min}, x - x_{\min}) A(x, \tau_2) dx = \\ = \frac{\delta(\tau_1 - \tau_2)}{\delta(0)} D(x_{\max} - x_{\min}, \tau_1 - x_{\min})(x_{\max} - \tau_1) + \frac{\delta(\tau_1 - \tau_2)}{\delta(0)} A(x_{\min}, \tau_1)(x_{\max} - x_{\min}).$$

Подставляя эти выражения под интеграл, получаем требуемую формулу (16).

ОЦЕНКА ФАКТОРА КОГЕРЕНТНОСТИ В ОПТИЧЕСКИХ И ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ
УЗЛАХ ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

Известно, что тенденции развития цифровых измерительно-вычислительных комплексов в значительной мере связаны с использованием оптических и оптоэлектронных методов представления и обработки измерительной информации [1 : 2], в том числе методов, основанных на эффектах поляризационно-интерференционного взаимодействия когерентных световых потоков [3]. В этой связи представляется целесообразным определение и уточнение требований к когерентности и оценка ее влияния на работу узлов и аппаратуры обработки в целом.

Поскольку эффекты поляризационно-интерференционного взаимодействия световых потоков определяются фазовыми соотношениями исходных потоков [4,5], то стабильность результата взаимодействия зависит от стабильности разности фаз взаимодействующих световых потоков в течении всего времени прохождения сигналов по операционному тракту. Отсюда вытекает необходимость условия:

где $\sum_{i=1}^n l_i n_i \leq L$,
 $l_i n_i$ - оптическая длина i -го участка операционного тракта с коэффициентом преломления n_i , L - длина когерентности.

Поскольку в системах обработки информации оптический сигнал представляет собой двумерную информационную картину, то требование когерентности должно быть отнесено к любой ее точке.

Представляется удобным сформулировать эти требования на основе функции взаимной когерентности [5] следующим образом.

При взаимодействии двух световых потоков вида:

$$E_1 = E_1(t) \cos[2\pi \nu t - \varphi_1(t)]; \quad E_2 = E_2(t) \cos[2\pi \nu t - \varphi_2(t)]$$

распределение интенсивности в интерференционной картине описывается выражением

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)| \cos[2\pi \nu \tau + \varphi_{12}(\tau)], \quad (1)$$

где $I_1 \sim E_1^2(t)$ и $I_2 \sim E_2^2(t)$ - интенсивности исходных потоков; $0 \leq |\gamma_{12}(\tau)| \leq 1$ - функция взаимной когерентности. Значения $|\gamma_{12}(\tau)| = 1$ соответствуют когерентным полям, а значения $|\gamma_{12}(\tau)| = 0$ некогерентным. При $0 < |\gamma_{12}(\tau)| < 1$ поля частично когерентны. Величина

$$\varphi_{12}(\tau) = \varphi_1(t - \tau_1) - \varphi_2(t - \tau_2)$$

представляет собой разность фаз, приобретенную интерферирующими потоками до совмещения. Из (1) легко заметить, что интерференционная картина определяется только стабильностью величины

$\varphi_{12}(t)$, а значения начальных фаз $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ на нее не влияют. Это позволяет использовать излучение с произвольными начальными фазами при условии стабильности величины $\varphi_{12}(t)$

Сказанное справедливо и для двумерных световых потоков с меняющейся в сечении интенсивностью, функция когерентности которых $\gamma(x, y, t)$ определяется также и координатами x и y . При этом для обеспечения способности двумерных волновых полей к интерференции, функция взаимной когерентности должна удовлетворять следующим требованиям [5]:

1. $|\gamma(x, y, t)| \sim 1$
2. $\tau \ll \tau_k$

где τ_x - время когерентности, а τ - минимальная задержка на отдельных участках операционного тракта.

$$3. |\chi(x, y, t)| = \text{const}; \quad \varphi(x, y, t) = \text{const}$$

При выполнении этих требований обеспечивается когерентность рабочего излучения в оптической системе обработки информации.

Поскольку эффекты взаимодействия поляризованных световых потоков также определяются стабильностью разности фаз [4,6] взаимодействующих световых потоков, то использование эффектов поляризации предъявляет к рабочему излучению требования когерентности аналогичные приведенным выше.

В [3] было показано, что для отработки логических функций, отличных от дизъюнкции необходимо выполнение равенств:

$$S_1(1,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad S_2(1,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Поскольку оба равенства принципиально равноценны и кроме того, физические процессы, происходящие при совмещении световых потоков на светоделителе и на границе раздела двух оптических сред, одинаковы, то исследуем влияние когерентности на гашение потока $S_1(1,1)$, образующегося на светоделителе.

В [3,7] для интенсивности потока $S_1(1,1)$ получено:

$$\{S_1(1,1)\} = \rho_1^2 a_1^2 + \tau_1^2 b_1^2 + 2\rho_1 a_1 \tau_1 b_1 \cos(\epsilon_1 - \delta_1 - 2\alpha_1) + \rho_n^2 a_n^2 + \tau_n^2 b_n^2 + 2\rho_n a_n \tau_n b_n \cos(\epsilon_n - \delta_n - 2\alpha_n) \quad (2)$$

Картина, наблюдаемая за время T , необходимое для ее фиксации, определяется усреднением (2) по промежутку T . В случае когерентности потоков $I_1(x)$ и $I_2(y)$ величины $\epsilon_1 - \delta_1$ и $\epsilon_n - \delta_n$,

стабильны. Поэтому в силу постоянства величин $\rho_{\perp}, a_{\perp}, \tau_{\perp}, b_{\perp}, \alpha_{\perp}$ и $\rho_{\parallel}, a_{\parallel}, \tau_{\parallel}, b_{\parallel}, \alpha_{\parallel}$ интенсивности $\{S_i(t)\} = \text{const}$ и усреднение по промежутку T не изменяет выражения (2). Последнее означает, что в этом случае наблюдение стабильной картины возможно при соблюдении условий:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \pi n; \quad \frac{\tau_{\perp} R_1}{\tau_{\parallel} R_2} = \frac{[1 - (\tau_{12})_{\parallel}^2] (\tau_{12})_{\perp}}{[1 - (\tau_{12})_{\perp}^2] (\tau_{12})_{\parallel}}, \quad (3)$$

где α_1, α_2 - фазы взаимодействующих световых потоков, $(\tau_{12})_{\perp}, (\tau_{12})_{\parallel}$ - коэффициенты Френеля

$$R_1 = \left| \arctg \frac{a_{\parallel}}{a_{\perp}} \right|; \quad R_2 = \left| \arctg \frac{b_{\parallel}}{b_{\perp}} \right|$$

$a_{\parallel}, a_{\perp}, b_{\parallel}, b_{\perp}$ - составляющие амплитуд взаимодействующих световых волн соответственно параллельно и перпендикулярно к плоскости падения.

Легко показать, что выполнению (3) соответствуют равенства:

$$\begin{aligned} \rho_{\perp} a_{\perp} = \tau_{\perp} b_{\perp} \quad \varepsilon_{\perp} - \delta_{\perp} = \pi n + 2\alpha_1 \\ \rho_{\parallel} a_{\parallel} = \tau_{\parallel} b_{\parallel} \quad \varepsilon_{\parallel} - \delta_{\parallel} = \pi n + 2\alpha_{\parallel} \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом (4) при нечетных n из (2) следует

$$\{S_i(t)\} = (\rho_{\perp} a_{\perp} - \tau_{\perp} b_{\perp})^2 + (\rho_{\parallel} a_{\parallel} - \tau_{\parallel} b_{\parallel})^2 = 0$$

то есть в направлении распространения потока S_i перенос энергии отсутствует.

При некогерентных потоках $I_1(x)$ и $I_2(y)$ величины $\varepsilon_{\perp} - \delta_{\perp}$ и $\varepsilon_{\parallel} - \delta_{\parallel}$ в течении промежутка времени T многократно изменяются, принимая любые значения в интервале $[0; 2\pi]$

По этой причине и вследствие постоянства α_{\perp} и α_{\parallel} случайно

и многократно изменяется в интервале $[0; 2T]$ за время T и величины $\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1 - 2\alpha_1$ и $\varepsilon_n - \bar{\varepsilon}_n - 2\alpha_n$. Поэтому, наблюдаемая картина является осреднением интенсивности потока за время T . При этом:

$$\int_0^T \cos(\varepsilon_n - \bar{\varepsilon}_n - 2\alpha_n) dt \rightarrow 0$$

$$\int_0^T \cos(\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1 - 2\alpha_1) dt \rightarrow 0$$

Поэтому усредненная интенсивность потока φ за время T на основании (2) может быть записана в виде [8]:

$$\varphi = \frac{1}{T} \int_0^T \{ S_1(t) \} dt = \rho_1^2 a_1^2 + \tau_1^2 b_1^2 + \rho_n^2 a_n^2 + \tau_n^2 b_n^2 \quad (5)$$

Как легко заметить из (5) $\varphi \neq 0$. То есть, гашение потока при некогерентных $I_1(x)$ и $I_2(y)$ невозможно. Следовательно некогерентное излучение в рассматриваемых системах не может быть использовано для моделирования логических функций отличных от дизъюнкции.

Л и т е р а т у р а

1. Кравцов Н.В., Чирков Л.Е., Поляченко В.Л. Элементы оптоэлектронных информационных систем, М., "Наука", 1970, 230с.
2. Катс Г.П. Оптико-электронная обработка информации, М., "Машиностроение", 1973, 470с.
3. Джагаров Д.А., Манукян В.С. О возможности реализации элементов оптических автоматов на основе поляризационно-интерференционного взаимодействия световых потоков. "Автоматризм", 1974, № I, стр.40-42.

4. Бор Ч., Вольф Э. Основы оптики, М., "Наука", 1970, 740с.
5. Кондратенков Г.Е. Обработка информации когерентными оптическими системами, М., "Советское радио", 1972, 250с.
6. Шерклиф У. Полдризванный свет, М., "Мир", 1965, 200с.
7. Манукян Е.С., Джагаров Е.А. К вопросу о универсальном базисе в устройствах обработки измерительной информации, представленной в оптической форме. Материалы I республиканской конференции "Методы кибернетики в информационно-измерительной технике", Тбилиси, Тбилисский филиал ВНИИМ, 1973, стр.121-124.
8. Манукян Е.С., Джагаров Е.А. Метод повышения помехоустойчивости оптических линий связи. "Радиоэлектроника", 1972, т.АХ, № 12, стр.60-61.

ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ
СИСТЕМ В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ

В кибернетических моделях, системах автоматического управления и информационно-вычислительных системах происходит передача информации по каналам связи и переработка этой информации в вычислительных преобразователях. Возможность многоканальной параллельной обработки информации при помощи аналоговых оптических и оптико-электронных моделей позволяет добиться существенного повышения быстродействия по сравнению с одноканальными электронными устройствами, однако этот выигрыш в быстродействии по существу сводится на нет в моделях, где требуется осуществлять запись информации перед обработкой на носитель [1,2]. В связи с этим в [3] был предложен новый подход к организации структуры оптико-электронных моделирующих устройств, позволяющий работать без записи информации на носитель, т.е. в реальном масштабе времени. Данный подход рассматривался на примере реализации время-импульсных оптико-электронных моделей, на входы которых поступают непрерывные аналоговые сигналы.

На практике, во многих случаях моделирования, анализа и обработки информации приходится иметь дело с импульсными входными сигналами. Так, изучение динамических систем при помощи методов Монте-Карло неизбежно связано с работой модели в режиме периодизации с максимально возможным быстродействием. Высокое быстродействие при моделировании облегчает выполнение процедуры оптимизации параметров в тех случаях, когда необходимо отслеживать оптимальную комбинацию параметров при изменяющихся условиях.

Рассмотренные в [3] время-импульсные оптико-электронные модели могут оказаться непригодными для обработки импульсных входных сигналов ввиду того, что эти модели содержат в себе схемы сравнения, работающие с определенным тактом. Этот рабочий такт модели не может совпадать с поступающими на вход модели импульсами различной τ меняющейся длительности. Кроме того, быстродействие такой модели ограничено частотой такта, увеличение которой также лимитировано. В связи с этим, был предложен метод построения многоканальных время-импульсных оптико-электронных моделей, работающих с импульсными входными сигналами без записи информации на носитель с высоким быстродействием [4].

В настоящей работе указанный подход иллюстрируется на примере время-импульсной оптико-электронной модели, реализующей параллельную многоканальную операцию деления.

На рисунке фиг. I обозначено: 1, 8 - входные пучки света, 2 - светоделитель, 3 - оптическая линия задержки, 4 - амплитудный модулятор света, 5, 9 - преобразователи оптического сигнала в электрический, 6 - генератор изменяющегося напряжения, 7 - устройство сравнения, 10 - формирователь импульсов, 11 - выходной пучок света.

Первый входной пучок света I, представляющий собой последовательность импульсов света, имеющих длительность T_s , паузу θ_s и период T_s падает на светоделитель 2.

$$T_s = T_s + \theta_s \quad (1)$$

Пространственно-временное распределение светового потока в импульсах есть $\Phi_1(x, y, t)$, тогда, согласно (1) количество световой энергии $W_1(x, y, t)$, поступающей на светоделитель

2 за период T_s равно:

$$W_1(x, y, t) = \varepsilon_s \Phi_1(x, y, t) \quad (2)$$

при условии, что за время T_s , $\Phi_1(x, y, t) = \text{const}$

Среднее количество световой энергии, поступающей на светоделиитель 2 в единицу времени равно:

$$W_{\text{ср.}}(x, y, t) = \frac{\varepsilon_s}{T_s} \Phi_1(x, y, t) \quad (3)$$

Световой поток $\Phi_1(x, y, t)$ делится на светоделителе 2 на два потока: $\Phi_2(x, y, t)$ и $\Phi_3(x, y, t)$, где выполняется условие:

$$\Phi_1(x, y, t) = \Phi_2(x, y, t) + \Phi_3(x, y, t) \quad (4)$$

$$\frac{\Phi_2(x, y, t)}{\Phi_3(x, y, t)} = \frac{m}{n} \quad (5)$$

m, n - постоянные числа, характеризующие светоделиитель 2, при этом $m \geq n$.

Световой поток $\Phi_2(x, y, t)$, прошедший через светоделиитель 2, пропускается далее через оптическую линию задержки 3 и, далее, через амплитудный модулятор света 4 на оптический выход вычислителя.

Обозначим K_p и K_{p_2} постоянные коэффициенты светопропускания оптической линии задержки 3 и амплитудного модулятора света 4 полностью открытого состояния. Тогда с оптического выхода амплитудного модулятора света 4 излучается световой поток $\Phi_{\text{вых}}(x, y, t)$, равный:

$$\Phi_{\text{вых}}(x, y, t) = K_p K_{p_2} \Phi_2(x, y, t) \quad (6)$$

когда амплитудный модулятор света 4 пропускает свет. Другая часть входящего пучка света I, отразившаяся от светоделителя 2, поступает на вход преобразователя оптического сигнала в электрический 5. В данном преобразователе, кроме преобразования оптических импульсов в электрические импульсы напряжения, осуществляется также усиление и ограничение последних по амплитуде. Таким образом, с выхода преобразователя 5 на вход генератора изменяющегося напряжения 6 поступает электрические импульсы напряжения длительностью τ_v , с паузой θ_v и периодом $T_v = \tau_v + \theta_v$ и с постоянной амплитудой U_0 (см. временные диаграммы на рисунке (фиг.2). Кроме того, выполняются следующие равенства:

$$\tau_v = \tau_3, \quad \theta_v = \theta_2, \quad T_v = T_3 \quad (7)$$

Данные импульсы U_0 запускают генератор изменяющегося напряжения 6. Импульсы напряжения на выходе генератора имеют постоянную длительность τ_r , паузу θ_r и период T_r , причем:

$$\tau_r = \tau_v, \quad \theta_r = \theta_v, \quad T_r = T_v \quad (8)$$

Следовательно, с учетом (7) получаем:

$$\tau_r = \tau_3, \quad \theta_r = \theta_2, \quad T_r = T_3 \quad (9)$$

Амплитуда $U_r(t)$ импульсов на выходе генератора изменяющегося напряжения изменяется во времени в течение промежутка τ_r длительности импульса по закону:

$$U_r(t) = \frac{K}{t^2}, \quad 0 \leq t \leq \tau_r, \quad (10)$$

где κ - постоянный коэффициент.

Данные импульсы $U_r(t)$ поступают на первый вход устройства сравнения 7.

Второй входной пучок света В с энергией, переносимой в единицу времени $W_2(t)$, поступает на вход преобразователя оптического сигнала в электрический 9. При этом, на выходе преобразователя возникает электрическое напряжение U_{mp} , равное:

$$U_{mp} = \alpha W_2(t), \quad (II)$$

где α - постоянный коэффициент.

Напряжение U_{mp} поступает на второй вход устройства сравнения 7. В устройстве сравнения осуществляется сравнение амплитуд двух напряжений, поступающих на его входы. Промежуток времени Δt между началом импульса $U_r(t)$ и моментом t_0 равенства двух сравниваемых напряжений в устройстве сравнения изменяется от $\Delta t = 0$ до $\Delta t = \tau_2 = \tau_r$ в зависимости от величины $W_2(t)$ в момент сравнения. Из (I0) имеем:

$$\Delta t = \frac{\kappa}{U_r(t)}, \quad 0 \leq \Delta t \leq \tau_r \quad (I2)$$

В момент t_0 :

$$U_r(t_0) = U_{mp}(t) \quad (I3)$$

или с учетом (I0) и (II):

$$\frac{\kappa}{\Delta t} = \alpha W_2(t) \quad (I4)$$

Отсюда:

$$\Delta t = \frac{\kappa}{\alpha W_2(t)} \quad (I5)$$

Формирователь импульсов 10, установленный на выходе устройства сравнения формирует электрические импульсы напряжения с постоянной амплитудой U_{ϕ} и с длительностью τ_{ϕ} , равной $\tau_{\phi} = \Delta t$. С учетом (15) получаем:

$$\tau_{\phi} = \frac{\kappa}{\alpha W_2(t)} \quad (16)$$

Напряжение U_{ϕ} управляет работой амплитудного модулятора света 4.

Оптическая линия задержки 3 служит для обеспечения необходимой величины задержки во времени световых импульсов, с тем, чтобы момент их поступления на амплитудный модулятор света 4 совпадал с моментом поступления на него импульсов напряжения U_{ϕ} с выхода формирователя импульсов 10.

На выход модели будут пропускаться световые импульсы длительностью $\tau_{\text{вых}} = \tau_{\phi}$ и с пространственно-временным распределением светового потока $\Phi_{\text{вых}}(x, y, t)$

Из (16) имеем:

$$\tau_{\text{вых}} = \frac{\kappa}{\alpha W_2(t)} \quad (17)$$

Среднее количество световой энергии $W_{\text{вых ср}}(x, y, t)$ излучаемой в единицу времени на оптическом выходе амплитудного модулятора света равно:

$$W_{\text{вых ср}}(x, y, t) = \frac{\tau_{\text{вых}}}{T_s} \Phi_{\text{вых}}(x, y, t) \quad (18)$$

или, с учетом (6) и (17):

$$W_{\text{вых ср}}(x, y, t) = \frac{\kappa \kappa_1 \kappa_2}{\alpha T_s^2} \frac{\Phi_2(x, y, t)}{W_2(t)} \quad (19)$$

Из (3), (4) и (5) получаем:

$$\Phi_2(x, y, t) = \frac{m T_2^2}{(m+n) T_3} W_{\text{вх.ср.}}(x, y, t) \quad (20)$$

Подставляя (20) в (19) получим:

$$W_{\text{вх.ср.}}(x, y, t) = \frac{m K K_1 K_2}{\alpha T_3(m+n)} \frac{W_{\text{вх.ср.}}(x, y, t)}{W_2(t)} \quad (21)$$

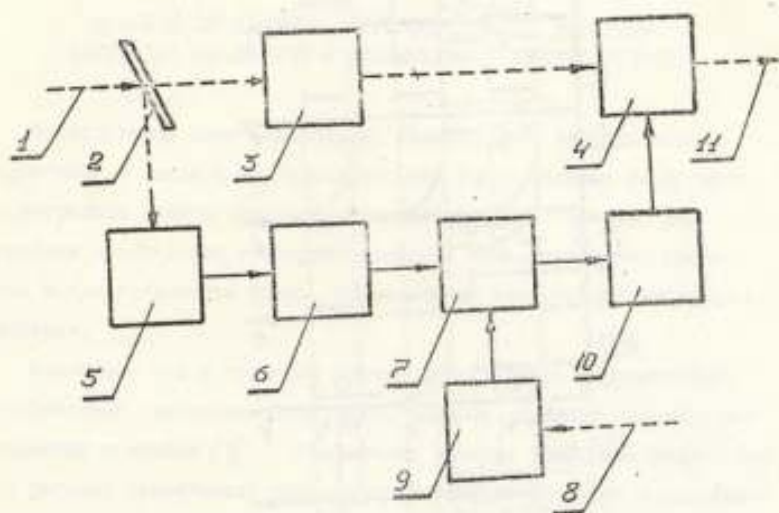
Обозначив $\frac{m K K_1 K_2}{\alpha T_3(m+n)} = \gamma$ - постоянный коэффициент, получаем окончательно:

$$W_{\text{вх.ср.}}(x, y, t) = \gamma \frac{W_{\text{вх.ср.}}(x, y, t)}{W_2(t)}$$

Таким образом, модель осуществляет многоканальную операцию деления. Вследствие отсутствия записи информации на носитель достигается большое быстродействие, а работа во время-импульсном режиме обеспечивает большую точность вычислений с оптическими сигналами.

Список литературы

1. Престон К. Когерентные оптические вычислительные машины, "Мир", 1974, 400с.
2. Катус Г.П. Оптико-электронная обработка информации, "Машиностроение", 1973, 447с.
3. Рабинович Е.И. Аналоговое моделирование на модуляторах света, техн.информ.Госкомитета СМ СССР по науке и технике, сер.АСУ и ВТ, 1976, № II, 10с.
4. Чхеидзе М.В., Рабинович Е.И., Чхеидзе Г.В. Оптический время-импульсный вычислитель, авт.свид. № 560242. Выдана открытий и изобретений № 4, 1977, приоритет от 10.06.75г.



Фиг. 1.



Фиг. 2

С.Н. Далакишвили, Ш.Д. Гловели,
В.Г. Дараселия.

НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ТОЧНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРО- МАГНИТНЫХ ПАРАМЕТРОВ В АЛЮМИНИЕВЫХ ЭЛЕКТРОЛИЗЕРАХ.

Исследования электромагнитных явлений при электролизе алюминия, в связи с их отрицательными последствиями на процесс электролиза всегда занимали значительное место при решении проблем дальнейшего усовершенствования технологических процессов и проектировании новых, более мощных конструкций электролизеров.

Известно, что в процессе электролиза расплав подвергается воздействию электромагнитных сил, которое ухудшает основные показатели процесса [1]. Уменьшение влияния электромагнитных сил на расплав приобретает большое практическое значение в современных мощных и сверхмощных электролизерах с силой тока 150-250 кА.

Решение этой важной задачи требует знания пространственного распределения электрического и магнитного полей в действующих алюминиевых электролизерах, и тем самым, наличия объективных методов и средств измерения параметров этих полей в высоко-температурной и агрессивной среде расплава.

Поставленная задача решается лишь частично разработкой средств измерений параметров электромагнитного поля из-за специфических условий электролиза и недоступности большей части электролизера для непосредственных измерений. В связи с этим весьма перспективным становится применение для этой цели методов математики и вычислительной техники.

В данной работе представлен комплексный подход к решению поставленной задачи:

а) с учетом квазистационарного характера электромагнитного поля в расплаве, разрабатываются приближенные методы расчета электрического и магнитного полей в объеме электролизера, реализуемые с помощью соответствующих алгоритмов и программ на ЭЦМ;

б) в методах расчета используется исходная измерительная информация, полученная путем измерения параметров поля в характерных точках расплава электролизера с помощью средств измерения, разработанных применительно к условиям электролиза.

В метод расчета электрического поля вводится понятие фиктивных источников поля: в n фиксированных точках на заданной поверхности в расплаве экспериментально определяются значения потенциала φ_m и определяются фиктивные источники q_k , которые будучи расположенными в заданных точках на одной горизонтальной линии над поверхностью, удовлетворяют граничным условиям исследуемой области на поверхности.

Значения фиктивных источников поля находится решением системы линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^n A_{mk} q_k = \varphi_m ;$$

Для численного расчета потенциала электрического поля получено выражение:

$$\varphi_p = \sum_{k=1}^n q_k \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[\frac{(-1)^{i+j}}{\sqrt{\left[(x_k + (-1)^i \left(l_c + \frac{1}{2} l_x - x_{cp} \right) - \frac{1}{2} l_x \right]^2 + \left[y_k + (-1)^j \left(\frac{1}{2} l_y + \frac{1}{2} l_y - y_{cp} \right) - \frac{1}{2} l_y \right]^2 + (z_k - z_{cp})^2}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(-1)^{i+j}}{\sqrt{\left[(x_k + (-1)^i \left(l_c + \frac{1}{2} l_x - x_{cp} \right) - \frac{1}{2} l_x \right]^2 + \left[y_k + (-1)^j \left(\frac{1}{2} l_y + \frac{1}{2} l_y - y_{cp} \right) - \frac{1}{2} l_y \right]^2 + (z_k + z_{cp})^2}} \right] \right\}$$

где φ_p - расчетное значение потенциала в точке расплава с координатами x_{op}, y_{op}, z_{op} ;

x_k, y_k, z_k - заданные координаты точек, в которых располагаются фиктивные источники поля;

l_x, l_y - длина и ширина электролизера;

i, j - принимают значения натуральных чисел.

Точность определения потенциала зависит от количества и топографии исходных измерений. Для практических целей достаточным является измерение потенциала в 20-25 точках.

Метод расчета магнитного поля основан на принципе суперпозиции, разделении поля в расплаве на внутреннее \vec{H}^i и внешнее \vec{H}^n . Внутреннее магнитное поле, созданное объемными токами, текущими в расплаве удовлетворяет уравнению: $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$; и рассчитывается на основании закона Био-Савара-Лапласа; при этом область электролизера рассматривается в виде прямоугольного параллелепипеда, сечение которого совпадает с сечением анода и делается допущение, что ток протекает с анода по направлению катоду с равномерной плотностью.

Напряженность внутреннего поля определяется в любой точке исследуемой области как геометрическая сумма векторов напряженностей, создаваемых прямолинейными проводниками конечной длины l_z сечениями $dx \cdot dy$ с элементарными токами в них: $dJ = j_z dx dy$; и сводится к расчету двойных интегралов составляющих H'_x, H'_y .

$$H'_x = \frac{j_z}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{y_0 - y}{z_0^2} \left(\frac{z' - z_0}{z'} + \frac{z'' + z_0}{z''} \right) dx dy;$$

$$H'_y = \frac{j_z}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{x - x_0}{z_0^2} \left(\frac{z' - z_0}{z'} + \frac{z'' + z_0}{z''} \right) dx dy;$$

где: x_0, y_0, z_0 - координаты точки наблюдения;
 z', z'' - координаты начала и конца проводника;
 r_0, z', z'' - нормаль радиуса-вектора, и расстояния
от начала и конца проводника до точки
наблюдения соответственно;

$l_x = 2a, l_y = 2b$ - длина и ширина анода.

Внешнее магнитное поле создается токонесущими элементами как самого электролизера, так и соседних агрегатов и является потенциальным: $\text{rot } \vec{H} = 0$.

Экспериментально получая на граничной поверхности параллелепипеда значения составляющих напряженности внешнего магнитного поля, рассматриваемой области определяем составляющие H_x'', H_y'', H_z'' методом конечных разностей.

Абсолютное значение вектора напряженностей магнитного поля в любой исследуемой точке расплава определяется выражением:

$$|\vec{H}| = \sqrt{(H_x'' + H_x')^2 + (H_y'' + H_y')^2 + H_z''^2}$$

Получение исходной измерительной информации при расчете осуществляется с помощью измерителей электрического и магнитного полей, разработанных авторами и предназначенных одновременно для экспериментальных исследований указанных полей в доступных областях электролизера [2].

Для измерения составляющих напряженности магнитного поля расплава разработан новый метод измерения и создан измерительный преобразователь, позволяющий значительно расширить диапазон измерения и автоматически исключать влияния других составляющих на результат измерения [3]. С помощью измерителя магнитного поля могут быть получены сведения о характере изме-

нения поля в расплаве, достаточные для оценки нежелательных электромагнитных явлений.

С целью определения надежности разработанных средств измерения, а также возможности получения исходных данных для расчета были проведены промышленные испытания на Волгоградском алюминиевом заводе. Измерения потенциала электрического тока и напряженности магнитного поля осуществлялись на электролизерах с верхним подводом тока на 150 кА, а также на сверхмощных экспериментальных электролизерах на силу тока 150 кА. Результаты измерений потенциала электрического поля и напряженности магнитного поля в расплаве фиксировались индикатором измерительного блока.

Измерения потенциала по отношению катоду (α) были проведены на горизонтальных плоскостях в обеих сторон анода при различных глубинах погружения зонда (β). При этом предполагалось, что электрическое поле за время измерений, не меняется вследствие изменения междупольного расстояния. Данные измерений сведены в табл. I.

Составляющие напряженности магнитного поля в расплаве (H_x, H_y, H_z) измерялись по периметру анода также на различных глубинах (табл. 2).

Измерения проводились на электролизерах с силой $I = 250$ кА и разность потенциалов между анодом и катодом $U_{ок} = 4,0$ В.

№№ п/п	Потенциал $U(\beta)$			№№ п/п	Потенциал $U(\beta)$		
	$\lambda = 0$	$\lambda = 10\text{см}$	$\lambda = 25\text{см}$		$\lambda = 0$	$\lambda = 10\text{см}$	$\lambda = 25\text{см}$
1.	3,47	3,13	2,52	7.	2,55	2,42	2,24
2.	3,66	3,25	2,40	8.	3,29	2,95	2,46
3.	2,25	2,95	2,10	9.	3,12	3,10	2,72
4.	3,17	2,87	1,97	10.	3,33	3,12	2,70
5.	3,03	2,56	1,33	11.	3,78	3,56	2,66
6.	3,03	2,33	1,25	12.	2,81	2,60	2,44

Таблица № 2

№№ п/п	Поверхность расплава			Расплав $\lambda = 20\text{ см}$		
	H_x А/м	H_y А/м	H_z А/м	H_x	H_y	H_z
1.	-45	+11,25	+8,25	-37,5	+22,5	+3,75
2.	-32,25	+8,25	+5,25	-34,45	+24,75	+3,25
3.	-34,5	+0,75	+3,75			
4.	-27,75	+6,0	+3,75	-57,5	+18,0	+22,5
5.	-37,5	+0,75	0,0	-69,0	-22,5	0,0
6.	-34,45	+7,5	0,0	-61,0	-10,5	0,0
7.	-37,5	-9,75	-0,0	-75,0	-7,5	0,0
8.	+37,5	-8,25	-15,75	+41,25	-3,75	-12,75
9.	+34,45	-0,75	-12,0	+63,75	+14,25	-13,5
10.	+30,75	+10,5	+5,25	+63,75	+22,5	-3,0
11.	+34,45	0,0	+9,0	+57,0	-10,5	+0,75
12.	+34,0	-12,0	+17,5	+56,25	-6,75	+14,25
13.	+30,0	-4,5	+17,5	+65,25	-1,5	+9,75
14.	+41,25	+6,75	+24,75	+34,45	+0,75	+18,75

Проведенные испытания показали высокую надежность разработанных средств измерений в сложных условиях электролиза алюминия и количественно подтвердили качественные стороны процесса.

Полученные результаты измерений были использованы для расчета магнитного поля алюминиевого электролизера проведенным выше методом суперпозиции с приемлемой для практических целей погрешностью в пределах 5-8%.

Таким образом, применение приближенных методов расчета в сочетании с ограниченным количеством натуральных измерений на действующих электролизерах дает возможность с требуемой точностью определить распределения электромагнитных параметров полей в расплаве, а использование для этой цели вычислительной техники делает предложенные методы весьма перспективными при проектировании и испытании новых конструкций электролизеров.

Список литературы:

1. Электролиз алюминия. Под ред. Г.В.Фороглома М., "Металлургия", 1967.
2. *კეთილკლი მი. დ., დარქიძევილი თ.ბ., დარახელია ვ.ბ. "ბადნიძის ელექტრომაგნიტური პარამეტრების საზომი ხელსაწყო". (ვეფხვიური ინჟინერინგის №15, 1972წ. იანვარი)*
3. Далакишвили О.Н., Гловели Ш.Д., Шелиава Г.Г. "Устройство для измерения магнитного поля расплава", Авт.свид. № 457945, "Бюллетень изобретений", № 3, 1975.

УДК 519-24.

К ВОПРОСУ ОБ АВТОМАТИЧЕСКОМ ВЫБОРЕ
АМПЛИТУДНОГО ДИАПАЗОНА АНАЛИЗА

М.В. Чхеидзе, Э.А. Саакян,
Э.С. Демуров, П.И. Погребещий.

Рассматривается метод автоматического масштабирования входного измеряемого сигнала с целью наилучшего использования амплитудного диапазона анализатора. Максимальный амплитудный диапазон определяется с помощью среднего времени превышения входным сигналом некоторого уровня A .

Приводится расчетная формула погрешности, на основе которой рассчитывается время анализа, необходимое для определения максимального диапазона анализа с заданной погрешностью.

УДК 62-501.

КЛАССИФИКАТОР ПОМЕХ В СИСТЕМАХ ОБНАРУЖЕНИЯ
СИГНАЛОВ НА ФОНЕ АНСАМБЛЯ ПОМЕХ

В.С. Наткович.

Рассматривается задача обнаружения случайного сигнала из заданного множества на фоне одной из помех, воздействующих на приемную систему. Предполагается, что на начальном интервале времени наблюдения на вход системы поступает выборка "чистой" помехи с неизвестным номером, который остается неизменным и на интервале времени обнаружения. Для обработки этой выборки используется классификатор помех, а собственно обнаружение сигналов проводится в зависимости от его решения. Правило обнаружения при этом синтезируется с учетом характеристик классификатора. Определяются условия целесообразности такого подхода при неизвестных вероятностных распределениях на множествах сигналов и помех. Библ. 4.

ЗАДАЧА ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ И ОПТИМАЛЬНЫЕ
РЕШЕНИЯ В ВОЗМОЖНО НАИБОЛЕЕ СТРОГИХ КРИТЕРИЯХ.

В.Л. Баранов.

Рассматривается задача обнаружения полезных сигналов из произвольного множества на фоне случайного шума в условиях априорной неопределенности, представляемая как задача проверки простой гипотезы против сложной альтернативы при фиксированном уровне значимости. Формулируется и доказывается ряд теорем относительно минимальных решений и решений, оптимальных по наиболее строгому критерию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОШИБОК КЛАССИФИКАЦИИ
В РАСПОЗНАЮЩЕЙ СИСТЕМЕ С ПРЕДСКАЗЫВАЮЩИМИ ПРО-
ТОТИПАМИ.

С.Е. Рогова, В.И. Геладзе.

Рассматриваются вероятности ошибок классификации случайных процессов распознающей системой с предсказывающими прототипами.

Полученные формулы могут быть использованы при определении применимости алгоритма классификации для решения конкретной задачи, или для определения длины выборки, обеспечивающей заданные вероятности ошибок.

УДК 681.3.058.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ В СИСТЕМЕ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ПОВЕРКИ.

С.Ш. Симаев, Р.Б. Клебанский,
Б.Ш. Барбакадзе.

В статье рассматривается функциональный преобразователь воспроизводящий нелинейную функцию одной переменной методом кусочно-линейной аппроксимации.

Преобразователь используется для определения относительной погрешности в системе автоматической поверки счетчиков электрической энергии.

УДК 519-24.

О РАСЧЕТЕ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Э.С. Демуров, Ф.Ф. Дорфман.

Рассматривается задача оценки погрешности непараметрического измерения функции распределения вероятностей.

Получено аналитическое выражение этой погрешности на основе интегрального среднеквадратического критерия, с учетом амплитудного диапазона анализируемого случайного процесса при аппаратурном измерении функции распределения.

Эта зависимость позволяет минимизировать погрешность измерения функции распределения путем выбора оптимального амплитудного диапазона случайного процесса при заданном времени анализа.

УДК 681.327.

ОЦЕНКА ФАКТОРА КОГЕРЕНТНОСТИ В ОПТИЧЕСКИХ И
ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ УЗЛАХ ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИ-
ТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ.

В.С. Манукян, В.А. Дзгаров.

Статья посвящена исследованию требований к когерентности рабочего излучения в системах обработки измерительной информации, реализованных с использованием принципов оптической и оптоэлектронной обработки информации.

Требования к рабочему излучению сформулированы в статье в виде совокупности аналитических выражений, регламентирующих функцию когерентности рабочего излучения.

В статье приведен анализ характеристик рабочего излучения, необходимых для выполнения логических операций в устройствах обработки измерительной информации, реализованных на основе принципов оптической обработки информации. Показано, что для выполнения таких операций некогерентное излучение непригодно. Библ. 5.

УДК 681.351.

ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ
СИСТЕМ В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ.

М.В. Чхеидзе, Е.И. Рабинович,
Г.Б. Чхеидзе, Р.И. Кахидзе.

Описывается время-импульсная оптико-электронная модель, реализующая параллельную многоканальную операцию деления над импульсными входными сигналами. Показано, что благодаря отсутствию записи информации перед обработкой на носитель, существенно повышается быстродействие и точность обработки.

НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ТОЧНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРО-
МАГНИТНЫХ ПАРАМЕТРОВ В АЛЮМИНИЕВЫХ ЭЛЕКТРОЛИЗЕРАХ.

О.Н. Далакишвили, Ш.Д. Гловели,
В.Г. Дараселия.

Рассматривается задача количественного определения потенциала электрического поля и составляющих напряженности магнитного поля в расплаве действующих алюминиевых электролизеров, необходимых для дальнейшего усовершенствования технологического процесса получения алюминия.

Учитывая специфику условий электролизера (наличие агрессивной и высокотемпературной среды, а также недоступность для измерения большинства областей электролизера), предлагаются приближенные методы расчета указанных параметров на ЭЦМ с использованием результатов ограниченного количества измерений в характерных точках расплава, позволяющих решать поставленную задачу с требуемой для практики точностью.

Приведены сведения о разработанных авторами средствах и методах измерений для получения исходной измерительной информации и результаты промышленных испытаний этих средств на современных мощных и сверхмощных промышленных электролизерах.

О Г Л А В Л Е Н И Е

1. М.В. Чхеидзе, Э.А. Саакян, Э.С. Демуров, П.И. Погребецкий
" К вопросу автоматического выбора амплитудного диапазона анализа".
2. Э.С. Наткович. " Классификатор помех в системах обнаружения сигналов на фоне импульсных помех".
3. В.Л. Барташев. " Задача обнаружения сигналов и оптимальные решения ее в смысле наиболее строгих критериев".
4. С.К. Рогачев, В.И. Теладзе. " Определение вероятностей ошибок классификации в распознающей системе с предсказывающими прототипами".
5. С.М. Симеон, Р.Б. Клебанский, Е.Ш. Барбакадзе.
" Функциональный преобразователь для определения относительной погрешности в системе автоматической поверки".
6. Э.С. Демуров, Ф.Ф. Дорфман. О расчете методической погрешности измерений одномерной функции распределения вероятностей.
7. Э.С. Манукян, Е.А. Джагаров. Оценка фактора когерентности в оптических и оптико-электронных узлах измерительно-вычислительных комплексов.
8. М.В. Чхеидзе, Е.И. Рабинович, Г.Б. Чхеидзе, Р.И. Кахидзе.
" Принцип построения оптических вычислителей, работающих в реальном масштабе времени".
9. С.Н. Далакишвили, Ш.Д. Гловели, В.Г. Дараселия.
" Новые возможности точного определения электромагнитных параметров в алмазных электролизерах".

Методы математики и кибернетики в создании измерительно-
вычислительных комплексов.

Труды метрологических институтов СССР, вып.228 (288).

Подписано в печать 5/XI-1977г.

М-46918; Формат бумаги 60x90 1/16

Уч.-изд. л.3. Тираж 500

Зак. № 2409. Цена 42 коп.

Репозит Груз. НИИИТИ

380030, Тбилиси, пр. И. Чавчавадзе, 35.

