

Справ.

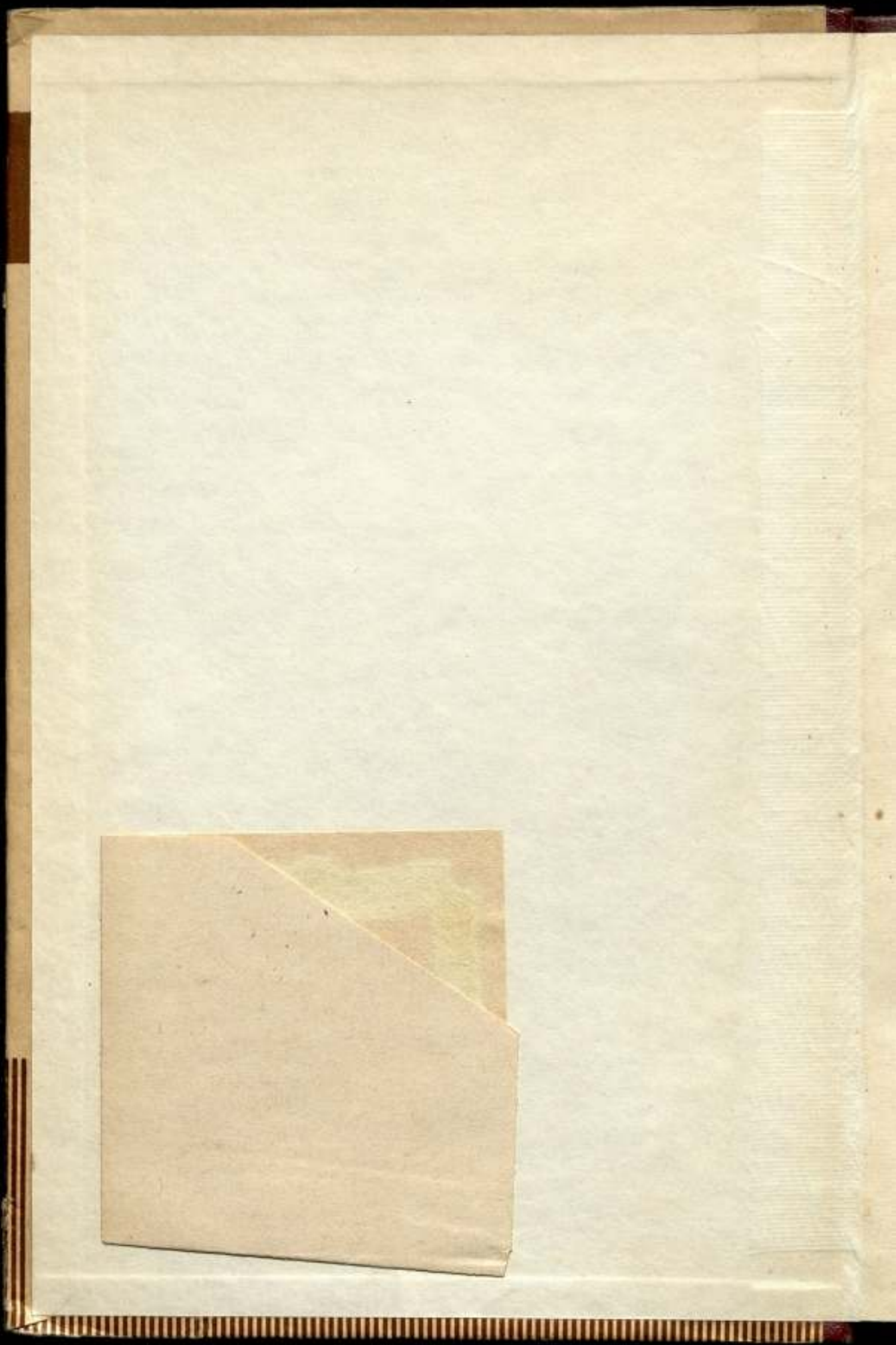
ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ
ИМ. Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

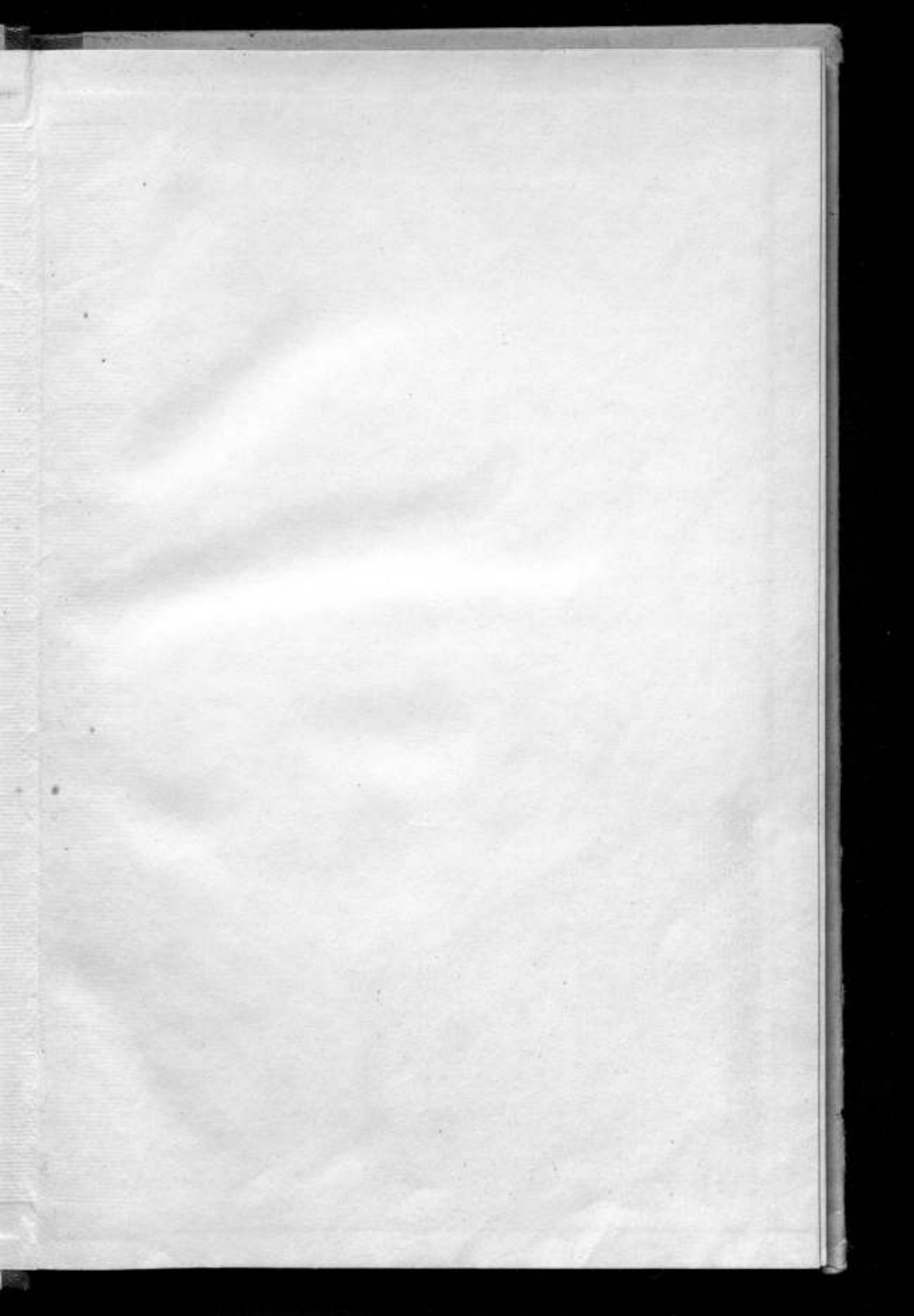
ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ
ТЕПЛОВЫХ
ИЗМЕРЕНИЙ

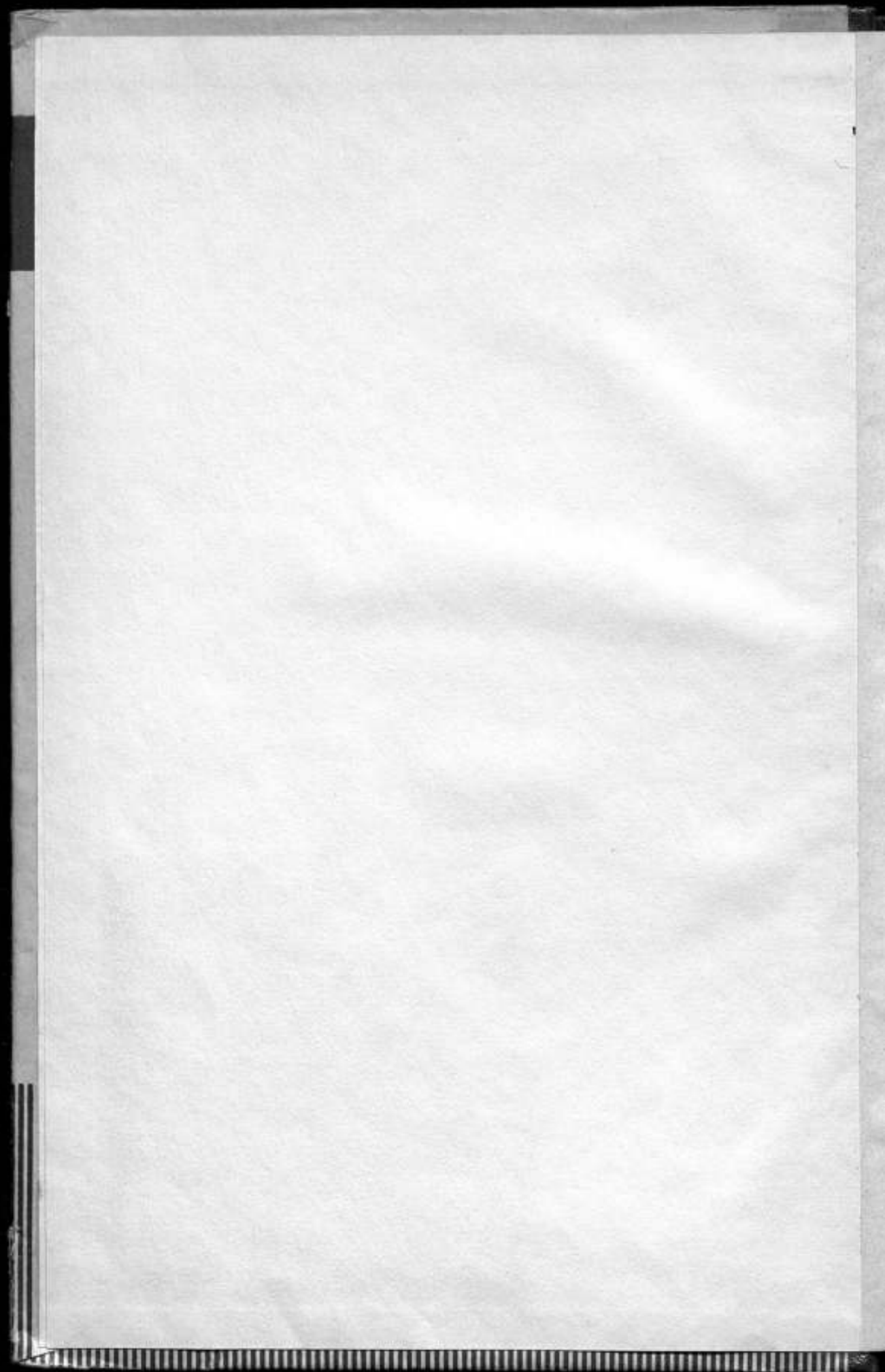
ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР

ВЫПУСК 111 (171)









ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
МЕТРОЛОГИИ ИМ. Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ
ТЕПЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Физика

ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР

ВЫПУСК 111 (171)

Под редакцией

к. т. н. Б. Н. ОЛЕЙНИКА и к. т. н. О. А. СЕРГЕЕВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО СТАНДАРТОВ

МОСКВА — ЛЕНИНГРАД

1969

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

В. О. Арутюнов (председатель), Н. Н. Александрова (секретарь), А. Н. Гордов, П. Н. Горюнов, Е. Ф. Долинский, А. И. Карташев, Л. К. Каяк, И. И. Киренков, Д. К. Коллеров, Б. Н. Олейник (зам. председателя), К. П. Широков, Е. Г. Шрамков, М. Ф. Юдин

Ответственный редактор

д-р техн. наук проф. В. О. АРУТЮНОВ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В сборнике представлены результаты работ, выполненных главным образом сотрудниками отдела тепловых измерений ВНИИМ. Статьи, включенные в сборник, посвящены задачам обеспечения высокой точности и единства тепловых измерений в стране.

Сборник состоит из пяти разделов. Первый из них знакомит с новейшей информацией о работах международных организаций в области температурных и тепловых измерений и представит интерес для специалистов, занимающихся вопросами термодинамики, теплофизики и термометрии.

Статьи второго раздела представляют собой обзоры современных сравнительных стационарных методов измерения теплопроводности твердых тел и методов измерения теплопроводности тонких пленок, а также процессов переноса тепла при наличии двух механизмов — кондукции и излучения. В обзорных статьях рассмотрены последние работы зарубежных и советских специалистов.

Третий раздел содержит статьи, в которых излагаются результаты работ по созданию новых методик измерений, а также высокоточных и стандартных измерительных приборов. Особый интерес вызовет предлагаемая группой авторов методика поверки газовых калориметров, которая уже начинает внедряться в промышленности. Одна из статей этого раздела посвящена методике впервые выполненных во ВНИИМ государственных испытаний $\alpha\lambda$ -калориметра ЛИТМО. Впервые приведено описание разработанных во ВНИИМ отечественных калориметров для стандартных измерений теплоты сгорания веществ и массивных калориметров сжигания для точных измерений малых тепловых эффектов. В таких приборах нуждаются многие отрасли народного хозяйства (теплоэнергетическая, газовая, нефтяная, химическая и др.). В этом же разделе описана новая установка для поверки и градуировки плоских тепломеров, а также результаты выполненных с ее помощью государственных испытаний тепломеров ОРГРЭС. Интересно решение частной, но важной задачи о выборе материала ампул, применяемых при анализе чистоты органических соединений криоскопическим методом.

В четвертом разделе анализируются результаты исследования погрешностей тепловых измерений. Большое значение для практики точных изме-

рений теплоты сгорания имеет поправка на окисление азота, обнаруженная и исследованная сотрудниками ВНИИМ.

Пятый раздел содержит две статьи. В первой изложены результаты физико-математического исследования лучисто-кондуктивного теплообмена в плоском слое. Основной задачей авторов было создание теории, позволяющей учитывать долю лучистого переноса энергии при измерении теплопроводности полупрозрачных тел. Однако результаты работы выходят за рамки этой задачи, что и нашло отражение в названии статьи. Полученное аналитическое выражение для температурного поля в плоском слое при наличии излучения без каких-либо допущений о характере температурного распределения позволяет учитывать поправку на лучистый перенос энергии. Авторы второй статьи критически оценивают существующие температурные данные о теплоемкости, теплопроводности и температуропроводности плавленого кварца — материала, который часто применяется в качестве образцового вещества.

РЕДАКТОРЫ

УДК 536.5

Б. Н. ОЛЕЙНИК

ВНИИМ

ПЕРЕСМОТР «ПОЛОЖЕНИЯ О МЕЖДУНАРОДНОЙ ПРАКТИЧЕСКОЙ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ШКАЛЕ (МПТШ)»

Первое «Положение о Международной практической температурной шкале» было принято Седьмой Генеральной конференцией по мерам и весам в 1927 г. По мере накопления новых экспериментальных данных, уточняющих значения реперных точек, диапазонов температуры для приборов, используемых в различных участках шкалы и т. п. в «Положение» вносились отдельные изменения в 1948 и 1960 гг. В настоящее время действует «Положение о Международной практической температурной шкале 1948 г. Редакция 1960 г.» [1].

Однако уже в 1960 г. было ясно, что для дальнейшего прогресса в области термометрии необходимо составить программу работ по новым исследованиям в широком диапазоне температур и проводить систематические обсуждения результатов на высоком международном уровне. Роль высшего метрологического органа в области температурных измерений играет Консультативный комитет по термометрии (ККТ) Международного комитета мер и весов, проводящий свою работу в тесном контакте с Международным бюро мер и весов.

В сентябре 1962 г. в г. Севре (Франция) состоялась 8-я сессия ККТ, которая рассмотрела состояние термометрических исследований и для глубокого изучения проблем усовершенствования температурных шкал создала две постоянно действующие Рабочие группы — для области высоких (I) и для области низких (II) температур. В состав Рабочих групп вошли ученые Англии, Голландии, СССР, США и ФРГ. Представители СССР вошли в состав обеих групп*: Б. Н. Олейник (ВНИИМ) — в Рабочую группу I, М. П. Орлова (ВНИИФТРИ) — в Рабочую группу II. Председателем обеих Рабочих групп был избран профессор Брикведде (Пенсильванский университет, США).

В сентябре 1963 г. в г. Севре состоялось первое заседание Рабочих групп. Рабочая группа I обсудила два вопроса: о вычислении таблиц или графиков вероятных величин отклонений температур по МПТШ от температур, определенных по термодинамической температурной шкале, и о зависимости относительного электрического сопротивления R_T/R_0 платинового термометра от температуры в МПТШ в области 630,5 — 1063° С (межд. 1948). Рабочая группа II обсудила вопрос о зависимости между R_T и R_0 платинового термометра сопротивления и температурой,

* Б. Н. Олейник и М. П. Орлова принимали участие в работе 6, 7 и 8-й сессии ККТ и во всех заседаниях Рабочих групп в период с 1962 по 1967 гг.

определенной по термодинамической шкале в интервале 20—90° К, а также о методе градуировки платинового термометра сопротивления в этой области температур [2].

На втором заседании Рабочих групп в сентябре 1964 г., которое проходило там же, было продолжено обсуждение основных вопросов, выдвинутых в 1963 г.

Рабочая группа I рассмотрела и рекомендовала таблицу разности между температурами по термодинамической шкале и МПТШ в области от —183 до +1063° С. Разности построены главным образом на основании работ по газовой термометрии, выполненных в СССР (ВНИИМ) [3] и ФРГ (Физико-технический институт — РТВ) [4]. Во ВНИИМ были проведены измерения в точках олова, кадмия, цинка и золота. Рабочая группа I предложила изменить значения температур вторичных реперных точек МПТШ, а также продолжить работы по созданию таблицы зависимости R_T/R_0 платинового термометра от температуры в МПТШ в области 630,5—1063° С.

Рабочая группа II рассмотрела вопрос о построении температурной шкалы ниже 90° К. Была предложена таблица зависимости R_T/R_0 платинового термометра от температуры по термодинамической шкале для диапазона от 14 до 273° К. Таблица получила наименование ССТ-64. Намечено направление дальнейшей работы по уточнению значений термодинамических температур реперных точек ниже 90° К и разработке методов интерполяции для определения температуры между реперными точками при использовании таблицы ССТ-64.

В сентябре 1964 г. в г. Севре состоялась 7-я сессия ККТ, на которой были рассмотрены следующие вопросы:

- 1) область температур от —183 до 0° С (постоянные точки МПТШ, расхождения между термодинамической температурной шкалой и МПТШ);
- 2) область температур от 0 до 1063° С (постоянные точки МПТШ, платиновая термометрия, коэффициенты расширения кварца, расхождение между термодинамической температурной шкалой и МПТШ);
- 3) пирометрия (международные сличения температурных ламп, фотоэлектрическая пирометрия);
- 4) область температур от 20 до 90° К (первичные и вторичные постоянные точки МПТШ, платиновая термометрия, расширение МПТШ);
- 5) область низких температур (шкалы гелия-4 и гелия-3, индиевый термометр, германиевый термометр, платиновая термометрия, расширение МПТШ).

ККТ рассмотрел и одобрил рекомендации Рабочих групп и призвал все национальные лаборатории внести свой вклад в уточнение и расширение МПТШ. ККТ предложил расширить исследования в следующих направлениях:

- а) изучение расхождений между термодинамической температурной шкалой и МПТШ;
- б) построение высокотемпературной шкалы платинового термометра сопротивления (630,5—1063° С), а также изучение стабильности и точности измерений;
- в) международные сличения температурных ламп при высоких температурах;
- г) исследование таблиц ССТ-64 относительных сопротивлений термометра сопротивления для области температур 12—273° К;
- д) изучение способов приведения показаний платинового термометра к стандартной таблице в области температур 12—273° К;
- е) изучение зависимости упругости паров сжиженных газов от температуры для термометрических целей;

ж) международные сличения полупроводниковых термометров сопротивления.

В соответствии с повесткой ККТ обсудил результаты международных сличений температурных ламп, в которых приняли участие шесть лабораторий [5]. В таблице приведены отклонения от средних значений температурных ламп для этих лабораторий. Данные таблицы подтверждают высокий уровень эталонных измерений во ВНИИМ в области температур выше 1063° С. ККТ принял решение о проведении новых международных сличений температурных ламп с помощью объективных фотоэлектрических методов измерений. В этих сличениях принимает участие и ВНИИМ (СССР).

Температура, °С	Отклонения от средних значений (в град) для лабораторий					
	Англия, NPL	Австралия, ANSL	СССР, ВНИИМ	Япония, NRLM	ФРГ, PTB	Голландия Univ. (Utrecht)
1063	0	-1,5	0	1	0,5	2
1209	-1	-1,5	0	1	1	1,5
1330	-1	-1,5	0	1,5	0,5	0,5
1416	-1	-2	0	1,5	1	1,5
1453	-2	-3	-0,5	3	0	1,5
1548	-1,5	-3	-1,5	2,5	0,5	2,5
1651	-1	-1,5	-2	3,5	0,5	3
1706	-1,5	-1	1,5	3,5	0	2,5
1922	-2,5	0	-1,5	3	1	1

ККТ принял решение продолжить деятельность Рабочих групп. В состав групп дополнительно включен представитель Японии.

Третье заседание Рабочих групп состоялось в сентябре 1966 г. в СССР: вначале в Москве (Рабочая группа II), а затем в Ленинграде (Рабочая группа I). Во время заседаний Рабочих групп были достигнуты значительные успехи в пересмотре и расширении МПТШ. Рабочие группы рекомендовали внести следующие изменения:

1) расширить МПТШ ниже ее современной нижней точки, т. е. точки кипения кислорода, и включить шкалы давления пара ^4He и ^3He ;

2) пересмотреть зависимость электрического сопротивления платины от температуры в области выше точки кипения кислорода и расширить применение термометра сопротивления на область высоких температур;

3) изменить значения температур некоторых реперных точек МПТШ;

4) изменить значение второй постоянной Планка c_2 .

Предлагаемые изменения имеют цель приблизить МПТШ (насколько это возможно в настоящее время) к термодинамической шкале, улучшить воспроизводимость и повысить точность приборов, служащих для интерполяции, а также улучшить методы градуировки последних.

Рабочие группы высказали твердое мнение о необходимости как можно скорее пересмотреть МПТШ и предложили, чтобы ККТ просил Международный комитет мер и весов о следующем: а) опубликовать предварительные решения по расширению современной шкалы и временно изменить ее некоторые аспекты; б) обратиться к Генеральной конференции по мерам и весам с просьбой дать Международному комитету мер и весов разрешение на изменение МПТШ.

В сентябре 1967 г. в Вашингтоне (США) было проведено 4-е заседание Рабочих групп, в Оттаве (Канада) состоялась 8-я сессия ККТ. В результате тщательного обсуждения вопросов повестки дня были выработаны рекомендации.

Рекомендация Т-1

Консультативный комитет по термометрии рекомендует принять принцип пересмотра Международной практической температурной шкалы таким, чтобы как можно лучше согласовать ее с термодинамической шкалой и расширить ее до $13,810^\circ \text{K}$.

Консультативный комитет полагает, что окончательный проект, предназначенный для представления в Международный комитет мер и весов, будет готов в июне 1968 г.

Рекомендация Т-2

Консультативный комитет по термометрии (ККТ) соглашается установить Международную практическую температурную шкалу (МПТШ), пересмотренную и расширенную, на следующих принципах:

1. Приписать реперным точкам следующие значения температур:

Тройная точка равновесного водорода	13,810	} $^\circ\text{K}$
Точка кипения равновесного водорода	20,280	
Тройная точка кислорода	54,361	
Точка кипения кислорода	90,188	
Тройная точка воды	273,16 *	} $^\circ\text{C}$
	0,01 *	
Точка кипения воды	100,000	
Точка затвердевания цинка	419,58	
Точка затвердевания серебра	961,93	
Точка затвердевания золота	1064,43	

2. Между $13,810$ и $90,188^\circ \text{K}$ МПТШ должна быть временной шкалой (предложена Рабочей группой II ККТ на заседании в сентябре 1966 г.), которая в случае необходимости может быть изменена. Лаборатории, имеющие национальные шкалы, могут употреблять их только после согласования с таблицей ССТ-64 (или со своими вариантами этой таблицы). Такое согласование рассматривается как способ осуществления МПТШ и поддержания высокой воспроизводимости национальных шкал.

3. В интервале $90,188$ — $237,15^\circ \text{K}$ МПТШ должна быть определена с помощью платинового термометра сопротивления и исходной таблицы зависимости отношений R_t/R_0 от температуры. Таблица должна быть основана на результатах, достигнутых посредством газового термометра в Национальном исследовательском совете (Оттава) и подтвержденных результатами подобных измерений, произведенных в лаборатории Камерлинг—Оннес (Лейден), в Национальной физической лаборатории (Теддингтон) и в Институте физико-технических и радиотехнических измерений в СССР (Москва).

4. Между 0°C и точкой затвердевания сурьмы МПТШ должна быть определена по платиновым термометрам сопротивления с помощью уравнения Каллендера—Мозера, с согласованным значением γ ; постоянные R_0 ,

* По определению термодинамической шкалы.

α и δ определяются при градуировке термометра в тройной точке воды, точке кипения воды и точке затвердевания цинка. Установлено, что такой же результат достигается при использовании тройной точки воды и точек затвердевания олова и цинка при соответствующем приписанном значении температуры точки затвердевания олова.

5. Между точкой затвердевания сурьмы и $1064,43^\circ\text{C}$ МПТШ должна быть определена как МПТШ 1948 г. с использованием новых, недавно принятых значений для точек затвердевания серебра и золота и значения для точки затвердевания сурьмы, определенного с помощью платинового термометра сопротивления в соответствии с приведенным выше пунктом 4. Такое определение МПТШ сохранится до тех пор, пока новые исследования не позволят расширить область применения термометра сопротивления выше точки затвердевания сурьмы.

6. Выше точки затвердевания золота МПТШ должна быть определена как МПТШ 1948 г., но со значениями $0,014388$ метр-градус для s_2 и $1064,43^\circ\text{C}$ для точки золота. Однако, если Международным союзом чистой и прикладной физики будет рекомендовано для общего употребления новое значение s_2 до того, как будет опубликована шкала, это значение должно быть принято и для МПТШ.

В октябре 1967 г. Тринадцатая Генеральная конференция по мерам и весам приняла «Резолюцию 8», в соответствии с которой Международному комитету мер и весов поручается принять необходимые меры по разработке и введению новой Международной практической температурной шкалы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Положение о Международной практической температурной шкале 1948 г. Редакция 1960 г. «Труды институтов Комитета», вып. 63 (123), М.—Л., Стандартгиз, 1962.
2. Орлова М. П. Сессия Рабочих групп Консультативного комитета по термометрии. «Измерительная техника», 1964, № 2.
3. Kirénkov J. J., Gordov A. N., Izrailov K. S. et Dijkov U. V. Nouvelles mesures des températures thermodynamiques aux points-repères de l'étain, du cadmium, du zinc et de l'or. Comité Consultatif de Thermométrie, 6 session, 1962, Paris, p. 39.
4. Moser H., Thomas W. Comparaison de l'E. I. P. T. avec l'échelle thermodynamique entre les points du zinc et de l'or d'après les plus récentes mesures au thermomètre à gaz. Comité Consultatif de Thermométrie, 6 session, 1962, Paris, p. 34.
5. Barber C. R., L'étalonnage de quatre lampes étalons secondaires à ruban de tungstène par six laboratoires. Comité Consultatif de Thermométrie, 7 session, Paris, 1964.

Поступила в редакцию
8/11 1968 г.

РЕШЕНИЯ ТРИНАДЦАТОЙ ГЕНЕРАЛЬНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
ПО МЕРАМ И ВЕСАМ О ЕДИНИЦАХ ИЗМЕРЕНИЯ
ТЕПЛОВЫХ ВЕЛИЧИН

В 1927 г. Седьмая Генеральная конференция по мерам и весам утвердила «Положение о Международной температурной шкале», которое создало основу для единства измерений температуры во всем мире. Этим «Положением» была установлена термодинамическая стоградусная шкала, в которой численные значения температуры сопровождались символом единицы °С или °C (Int.). «Положение» было пересмотрено в 1948 г. Девятой Генеральной конференцией по мерам и весам и получило наименование «Международная практическая температурная шкала 1948 г.». В 1960 г. Одиннадцатая Генеральная конференция по мерам и весам приняла новое «Положение о Международной практической температурной шкале 1948 г.». «Положение» (редакция 1960 г.) определяет термодинамическую шкалу следующим образом:

«Термодинамическая шкала Кельвина, по которой температуры обозначаются символом T и их числовые значения сопровождаются знаком °К, принимается в качестве основной шкалы; должна существовать возможность в конечном счете отнести к этой шкале результат любого измерения температуры. Значение градуса Кельвина определено решением, установившим значение $273,16^\circ \text{K}$ для термодинамической температуры тройной точки воды (Десятая Генеральная конференция по мерам и весам, 1954 г., Резолюция 3)».

Тринадцатая Генеральная конференция по мерам и весам (октябрь 1967 г.) приняла ряд решений об обозначении единицы термодинамической температуры, разности и интервала температур, об определении кельвина — единицы термодинамической температуры. Кроме того, конференция признала необходимым пересмотреть «Положение» о температурной шкале, а также внести ряд производных тепловых единиц в перечень единиц, принятых Одиннадцатой Генеральной конференцией по мерам и весам (1960 г.). Ниже приводятся резолюции Тринадцатой Генеральной конференции.

Единица термодинамической температуры

РЕЗОЛЮЦИЯ 3

ТРИНАДЦАТАЯ ГЕНЕРАЛЬНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО МЕРАМ И ВЕСАМ

Принимая во внимание, что наименования «градус Кельвина» и «градус», символы «°К» и «град» и правила их применения, содержащиеся в Резолюции 7 Девятой Генеральной конференции (1948 г.), в Резолюции 12 Одиннадцатой Генеральной конференции (1960 г.), и учитывая решение, принятое Международным комитетом мер и весов в 1962 г. (протоколы, 30, стр. 27), что единица термодинамической температуры и единица температурного интервала являются одной и той же единицей, которая должна иметь одно название и обозначаться одним символом,

РЕШАЕТ

1) единица термодинамической температуры именуется «кельвин» и обозначается символом «К»;

2) те же названия и символ употребляются для выражения температурного интервала;

3) температурный интервал может быть также выражен в градусах Цельсия;

4) решения, упоминаемые в начале настоящей Резолюции и касающиеся наименования единицы термодинамической температуры, ее символа и обозначения единицы для выражения температурного интервала или разности температур, отменяются, но употребление их, которое является следствием этих решений, временно допускается.

РЕЗОЛЮЦИЯ 4

ТРИНАДЦАТАЯ ГЕНЕРАЛЬНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО МЕРАМ И ВЕСАМ

Принимая во внимание, что было бы полезно четко сформулировать определение единицы термодинамической температуры, которое содержится в Резолюции 3 Десятой Генеральной конференции (1954),

РЕШАЕТ сформулировать это определение следующим образом:

«кельвин — единица термодинамической температуры является $1/273,16$ частью термодинамической температуры тройной точки воды».

Производные единицы

РЕЗОЛЮЦИЯ 6

ТРИНАДЦАТАЯ ГЕНЕРАЛЬНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО МЕРАМ И ВЕСАМ

Принимая во внимание, что будет полезно привести и другие производные единицы в списке 4-го параграфа Резолюции 12 Одиннадцатой Генеральной конференции (1960),

РЕШАЕТ внести в этот список:

Волновое число	1 на метр
Энтропию	джоуль на кельвин
Удельную теплоемкость	джоуль на килограмм·кельвин
Коэффициент теплопроводности	ватт на метр·кельвин
Активность (радиоактивность источника)	1 на секунду

Международная практическая температурная шкала
(разработка новой редакции)

РЕЗОЛЮЦИЯ 8

ТРИНАДЦАТАЯ ГЕНЕРАЛЬНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО МЕРАМ И ВЕСАМ

Принимая во внимание, что назрела необходимость пересмотреть Международную практическую температурную шкалу 1948 г., как это уже было указано Двенадцатой Генеральной конференцией (1964 г.) в ее Резолюции 10, и что компетентные лаборатории согласились на общий пересмотр этой шкалы, **дает возможность** Международному комитету мер и весов принять необходимые меры для того, чтобы ввести в действие новую Международную практическую температурную шкалу.

Поступила в редакцию
8/II 1968 г.

**РАБОТЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ
ПО СТАНДАРТИЗАЦИИ (ИСО)
В ОБЛАСТИ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЙ ТЕПЛОВЫХ ВЕЛИЧИН**

Международная организация по стандартизации (ИСО) со времени своего образования (1946 г.) проводит большую работу по величинам и единицам измерения величин, а также в смежных областях. С 1952 г. эту работу возглавляет Технический комитет № 12 ИСО (ТК12).

Основная деятельность Комитета заключается в разработке рекомендаций, относящихся к следующим вопросам: величины, символы и определения величин, наименования единиц измерений и их сокращенные обозначения, международные символы единиц, определения единиц и переводные множители. Активными членами ТК12 являются 25 стран, включая СССР, Венгрию, Польшу, Румынию, Чехословакию, США, Англию, Францию и др., а также 20 стран-наблюдателей. Секретариат ТК12 ведет Дания (датская организация по стандартизации).

Комитет плодотворно сотрудничает с другими Техническими комитетами ИСО, а также с Международным комитетом мер и весов и его Консультативными комитетами, в частности с Консультативным комитетом по термометрии; Международной электротехнической комиссией; Международным союзом чистой и прикладной химии и его Комиссией по физическим и химическим символам и терминологии; Международным союзом чистой и прикладной физики и его Комиссией по символам и единицам; Международной организацией по законодательной метрологии и другими международными организациями.

Одними из первых были рекомендации R31 «Основные величины и единицы системы МКСА» и «Величины и единицы пространства и времени», принятые ИСО в 1956 г. Основными единицами системы МКСА являются метр, килограмм, секунда, ампер, градус Кельвина и свеча. Документ содержит единицы измерения величин, их международные обозначения и определения. Для каждой величины приводятся единицы измерения в различных системах (МКСА, СГС, МТС, МКГСС, британские единицы и др.).

В 1965 г. Совет ИСО принял в качестве рекомендации документ ИСО (R31, часть I) «Величины и единицы на основе СИ и величины и единицы пространства и времени». Эта рекомендация явилась основой для международной стандартизации единиц измерений.

Для решения отдельных важных задач стандартизации в области величин, единиц, символов и переводных множителей Комитет образовал два подкомитета.

Первый подкомитет ТК12 (ПК1) был образован в 1963 г. на шестом заседании ТК12, происходившем в Копенгагене.

Задача ПК1 формулируется следующим образом: стандартизация общих методов перевода числовых значений физических величин из одной системы единиц в другую при сохранении точности первоначальных значений в переведенных значениях.

Второй подкомитет ТК12 (ПК2) был образован в 1965 г. Он решает круг задач по общим правилам использования единиц СИ, а также кратных и дольных от единиц в различных областях науки и техники.

Первое заседание ПК2 проходило в 1966 г. в г. Гельсингере (Дания). На заседании были представлены национальные службы по стандартизации и метрологии: Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева — СССР, Национальное бюро стандартов — США, Британский институт стандартизации — Англия, Национальная физическая лаборатория — Англия, Служба нормализации ФРГ, Институт стандартизации Индии — и представители ряда крупных фирм США, Англии, Франции, Швеции и других стран.

ПК2 обсудил вопросы об общих принципах применения кратных и дольных от единиц, о выборе единиц измерения давления и напряжения, о списке наиболее широко распространенных единиц СИ и рекомендуемых кратных и дольных от единиц. В принятых резолюциях заседания секретариату было поручено подготовить новые предложения по правилам использования единиц СИ, кратных и дольных от единиц СИ, а также составить перечень наиболее распространенных единиц в промышленности, торговле, химической технологии и инженерных работах.

Второе заседание ПК2 состоялось в Москве в 1967 г. На этом заседании были рассмотрены новые документы, разработанные секретариатом на основе резолюций первого совещания, и согласованы кратные и дольные от единиц СИ, которые рекомендуются для применения в различных отраслях промышленности, в торговле, технологии и науке. В таблице приведены рассмотренные тепловые единицы:

Величина	Единица измерения в системе СИ	Рекомендуемая кратная и дольная от единицы СИ
Термодинамическая температура	°К (градус Кельвина)	—
Международная практическая температура	°С (градус Цельсия)	—
Температурный интервал	град, °К, °С	—
Коэффициент линейного расширения	град ⁻¹ , °К ⁻¹ , °С ⁻¹	—
Количество теплоты	дж	Тдж, Гдж, Мдж, кдж, мдж
Тепловой поток	вт	квт
Плотность теплового потока	вт/м ²	Мвт/м ² , квт/м ²
Коэффициент теплопроводности	вт/м·град	—
Коэффициент теплопередачи	вт/м ² ·град	—
Теплоемкость	дж/град	кдж/град
Удельная теплоемкость	дж/кг·град	кдж/кг·град
Энтропия	дж/°К	кдж/°К
Удельная энтропия	дж/кг·°К	кдж/кг·°К
Удельная энергия	дж/кг	Мдж/кг кдж/кг
Удельная скрытая теплота	дж/кг	Мдж/кг кдж/кг

В таблице использованы символы единиц, соответствующие документу ИСО 150/R31. Для единиц энтропии и удельной энтропии применяется символ $^{\circ}\text{K}$, тогда как ГОСТ 8550—61 «Тепловые единицы» в этом случае предусматривает символ «град».

Настоящее решение ПК2 направил в Совет ИСО для издания в качестве рекомендации ИСО «Перечень кратных и дольных от единиц СИ для применения в промышленности и науке». В рекомендацию будут внесены изменения, вытекающие из решений Тринадцатой Генеральной конференции по мерам и весам (октябрь 1967 г.), по вопросу об использовании символов $^{\circ}\text{K}$ и $^{\circ}\text{C}$ для обозначения температуры и разности температур.

Поступила в редакцию
8/11 1968 г.

УДК 536.2.08. : 539.2

О. А. СЕРГЕЕВ, А. З. ЧЕЧЕЛЬНИЦКИЙ

ВНИИМ

СТАЦИОНАРНЫЕ СРАВНИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТВЕРДЫХ МАТЕРИАЛОВ

Необходимость изучения теплофизических свойств материалов (в частности, теплопроводности) привела к созданию большого количества различных методов (в основном специализированных), так как при выборе метода в каждом конкретном случае требования практики меняются. В одних случаях определяющей величиной является температурный диапазон, в других — класс испытуемых материалов, в третьих — продолжительность испытаний, точность измерений и т. д.

Наличие столь большого количества методов измерения потребовало классификации их по различным признакам. Вместе с тем возникла необходимость анализа различных групп методов с целью определения границ и целесообразности их применения.

Целью настоящей работы был анализ одной из групп — сравнительных стационарных методов аксиального теплового потока.

Теоретической основой стационарных методов является решение уравнения Фурье для стационарного одномерного случая в соответствующей системе координат.

Стационарные методы измерения теплопроводности твердых материалов наиболее распространены, так как, во-первых, обеспечивают более точные результаты по сравнению с другими методами, а во-вторых, просты в реализации: для измерения теплопроводности достаточно создать в образце направленный тепловой поток известной величины и определить градиент температур вдоль потока.

По способу определения теплового потока стационарные методы делятся на абсолютные и сравнительные [1]. Измерение тепловых величин всегда является косвенным, т. е. зависит от прямых или косвенных измерений целого ряда иных величин. Если метод требует прямых или косвенных измерений только тех величин, которые отличаются от искомой, его называют абсолютным. Если же метод требует определения той же величины, что и измеряемая, его называют сравнительным, так как он построен на сравнении искомого значения величины с другим значением той же величины, установленным иным путем. В частности, сравнительными называют такие методы, в которых теплопроводность исследуемого материала определяется по отношению к теплопроводности аттестованного стандартного образца.

Существует два пути измерения теплопроводности стационарными сравнительными методами. Первый из них — создание методов, при которых прибор предварительно градуируется по стандартным образцам тепло-

проводности. Единственным примером градуируемого прибора служит прибор типа А-21, созданный Ю. С. Ипатовым, В. И. Лейкумом, Б. Н. Олейником и З. К. Патовской [2]. Он предназначен для измерения теплопроводности твердых материалов (диэлектриков и пластических масс) при комнатных температурах. При постоянном тепловом потоке показания микроамперметра n , пропорциональные перепаду температур на испытуемом образце, зависят от теплопроводности последнего λ_x . Для каждого прибора зависимость $n = f(\lambda_x)$ устанавливают предварительным градуированием по стандартным образцам теплопроводности. Отсутствие достаточного количества стандартных образцов пока еще не позволяет создать градуируемые приборы, работающие в достаточно широком интервале теплопроводности и температур, хотя они просты по конструкции и удобны в эксплуатации.

Второй путь — создание методов, основанных на непосредственном сравнении в опыте теплопроводности испытуемого и стандартного образцов. Для этого испытуемый и стандартный образцы располагают по одну сторону плоского нагревателя, параллельно друг другу, либо последовательно один за другим.

В работе [31] изложены теоретические основы двух вариантов метода измерения теплопроводности стержней при их параллельном расположении. В первом варианте (рис. 1) рассматривается система двух полуограниченных стержней одинакового диаметра. При равенстве температур на одном конце ($T = T_0$ при $x=0$) и нулевой температуре удаленных концов ($T=0$ при $x=\infty$) задача сводится к решению уравнения

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\alpha PT}{\lambda S}, \quad (1)$$

где

$S = S_1 = S_2$ — площадь поперечного сечения стержня;

$P = P_1 = P_2$ — его периметр;

α — коэффициент теплоотдачи.

Решение уравнения [1] можно представить в виде

$$T = T_0 e^{-\frac{\alpha P x^2}{\lambda S}}. \quad (2)$$

Из уравнения [2] для точек $x = l_1$ первого стержня и $x = l_2$ второго стержня, имеющих одинаковую температуру, получаем

$$\frac{\lambda_2 \alpha_1 l_1^2}{\lambda_1 \alpha_2 l_2^2} = 1$$

или

$$\lambda_1 = \lambda_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^2. \quad (3)$$

Во втором варианте метода (рис. 2) рассматриваются стержни конечной длины. Уравнение (1) решается при следующих граничных условиях:

$$T = T_0 \text{ при } x = 0;$$

$$T = T' \text{ при } x = L;$$

$$T = T'' \text{ при } x = 2L.$$

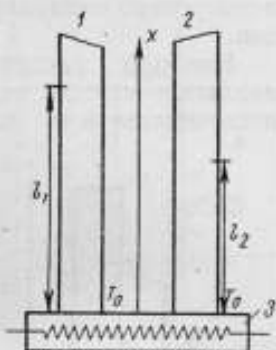
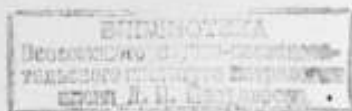


Рис. 1. Метод измерения теплопроводности полуограниченных стержней [31].

1 — стандартный образец;
2 — испытуемый образец;
3 — электронагреватель.



Решение уравнения в этом случае приводит к выражению для λ_1

$$\lambda_1 = \lambda_2 \left[\frac{\ln \frac{T_1' + T_2''}{2T_0} + \sqrt{\frac{T_1' + T_1''}{2T_0} - 1}}{\ln \frac{T_2' + T_2''}{2T_0} + \sqrt{\frac{T_2' + T_2''}{2T_0} - 1}} \right]^2. \quad (4)$$

Реализация методов связана либо с измерением трудно определяемых коэффициентов теплоотдачи α_1 и α_2 , либо с обеспечением их равенства, что, однако, требует практически невыполнимого тождества размеров, формы и состояния поверхности испытуемого и стандартного образцов.

Наиболее распространенными являются методы, основанные на последовательном расположении

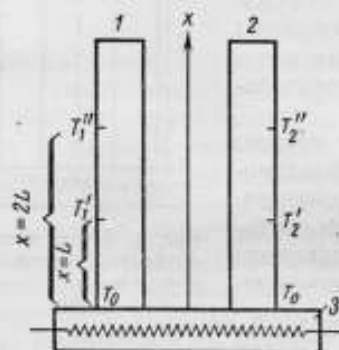


Рис. 2. Метод измерения теплопроводности стержней конечной длины [31].

1 — стандартный образец; 2 — испытуемый образец; 3 — электронагреватель.

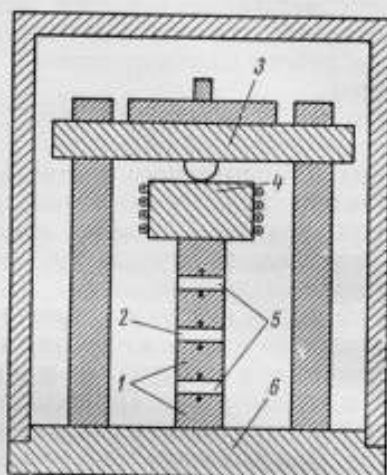


Рис. 3. Схема установки Стэкса и Чесмара [4].

1 — серебряные блоки; 2 — испытуемый образец; 3 — нагрузочное устройство; 4 — блок нагревателя; 5 — стандартные образцы; 6 — теплоприемник.

(Точками отмечены места расположения термопар.)

образцов. В этом случае стандартный и испытуемый образцы располагают вплотную один за другим, и количество тепла Q от нагревателя проходит через оба образца. При отсутствии тепловых потерь с боковой поверхности составной стержня

$$\lambda = \lambda_{ст} \frac{S \left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right)_{ст}}{S \left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right)}, \quad (5)$$

где индекс «ст» указывает, что соответствующая величина относится к стандартному образцу.

Примером реализации указанной схемы может служить прибор, разработанный Стэкс и Чесмаром [4, 28—30]. Прибор (рис. 3) чрезвычайно прост по конструкции. Испытуемый 2 и два стандартных образца 5 устанавливают между четырьмя серебряными блоками 1. Чтобы обеспечить плотный контакт образцов и блоков в случае непараллельности их торцов, давление на составной стержень передается через шар из нержавеющей стали. Как полагают авторы, серебряные блоки обеспечивают параллельность потока и оси стержня даже при различных сечениях испытуемого и стандартных образцов. Источник тепла 4 представляет собой цилиндр

из нержавеющей стали с навитой на него нихромовой спиралью. Массивное медное основание *б* вместе со стенками служит теплоприемником. Для получения данных при температуре, выше комнатной, все устройство помещали в вакуумную печь.

Особенностью прибора является то, что температура измеряется не непосредственно в образцах, а вблизи поверхности граничащих с ними серебряных блоков. Для измерений покрытые изоляцией спаян хромоникелевых — никельалюминиевых термопар вводили в отверстие в блоках на глубину, превышающую диаметр спая не менее чем в восемь раз. При такой методике измерений особо остро встает вопрос о термических контактных сопротивлениях, возникающих на границе раздела образец — блок. Чтобы уменьшить эти сопротивления, торцовые поверхности шлифовали и полировали, а для смазки торцов использовали индиевую амальгаму.

При отсутствии потерь через испытуемый и два стандартных образца должно протекать одинаковое количество тепла, а перепады температур на стандартных образцах должны быть равны. Причиной потери тепла может быть излучение с боковой поверхности стержня, конвекция и отвод тепла по термопарным проводам. Для уменьшения потерь от излучения серебряные блоки полировали, а конвекцию уменьшали за счет верхнего расположения источника тепла и оценивали по результатам измерений в вакууме. Авторы приводят элементарные оценки потерь тепла от излучения и кондукции. При определении потерь от излучения они исходят из предположения, что температуры стержня и окружающей оболочки постоянны, т. е. не учитывают распределение температур по стержню. Тепловые потери за счет отвода по проводам определяют на основании закона Фурье. В результате оказывается, что тепловые потери малы в сравнении с потоком тепла по стержню. При расчете теплопроводности испытуемого образца удельный поток тепла принимается равным среднему значению тепловых потоков в двух стандартных образцах, и потери тепла через боковую поверхность, таким образом, учитываются.

В качестве стандартных применяли образцы из нержавеющей стали; для материалов с низкой теплопроводностью предлагается использовать кварц.

По мнению авторов, их метод позволяет получить данные с погрешностью не более 10%, что соответствует приводимым расчетам.

Недостатком рассмотренной схемы являются значительные боковые утечки тепла, сохраняющиеся, несмотря на принятые меры к их уменьшению.

Следующим шагом на пути развития стационарных сравнительных методов является установка, разработанная Ван Дазеном и Шелтоном [5].

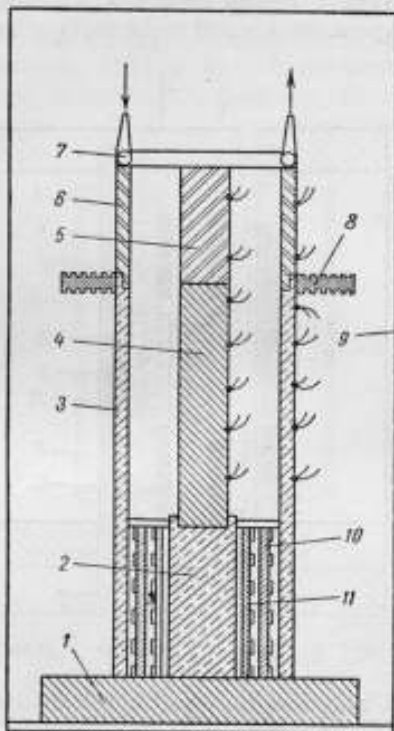


Рис. 4. Схема установки Ван Дазена и Шелтона [5].

1 — массивное основание; 2 — нагреватель; 3, 8 — составной охранный цилиндр; 4 — испытуемый образец; 5 — стандартный образец; 7 — холодильник; 8 — нагреватель охранный цилиндра; 9 — корпус; 10, 11 — электронагреватели (точками отмечены места расположения термопар).

Схема установки приведена на рис. 4. Испытуемый образец 4 припаян к медному цилиндру 2, получающему тепло от окружающей его нагревательной спирали, а стандартный 5 — к образцу 4 и холодильнику 7. Принципиальным отличием ее от установки Стакс и Чесмара является введение охрannого цилиндра оригинальной конструкции, который служит для создания распределения температур подобного распределению в испытуемом и стандартном образцах. Охранный цилиндр состоит из двух частей. Верхняя часть 6 представляет собой никелевую трубу, припаянную с одной стороны к холодильнику 7 и с другой — к трубе 3 из хромоникелевой нержавеющей стали. Использование на отдельных участ-

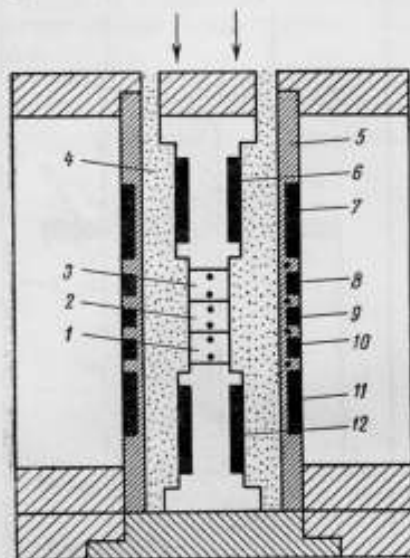


Рис. 5. Схема установки Бауэрса и др. [7].

1, 3 — стандартные образцы; 2 — испытуемый образец; 4 — изоляционная засыпка; 5 — охранный цилиндр; 6 — источник тепла; 7—11 — нагреватели; 12 — теплоприемник (точками отмечены места расположения термопар).

Франклем [6] для измерений теплопроводности полупроводников при температурах не выше 800°C . Аналогичная схема использована Бауэрсом и др. [7] (рис. 5).

Поток тепла через составной стержень поддерживали нагревателями 6 и 12. Нагреватели 7—11, расположенные на поверхности охрannого цилиндра, использовали для создания распределения температур в алуидовом цилиндре, идентичного распределению в составном стержне. Идентичность показаний термопар стержня и охрannого цилиндра в соответствующих сечениях свидетельствует об отсутствии радиального градиента температур по изоляционной засыпке и, следовательно, радиальных тепловых потерь. Для измерения температуры использовали платино-платинородиевые термопары. Для исключения погрешностей, связанных с термическим контактным сопротивлением, термопары монтировали непосредственно в испытуемом и стандартных образцах, в отверстиях диаметром 0,8 мм, высверленных ультразвуком. Для предохранения термопар от загрязнения при высоких температурах использовали алуидовую защиту. Во избежание окисления частей прибора все измерения проводили в атмо-

сферах охрannого цилиндра материалов, близких по теплопроводности к соответствующему участку стержня, позволяет регулировать распределения температур в нем, пользуясь двумя нагревателями — дисковым нагревателем 8 на границе цилиндров 3 и 6 и нагревателем 10 у основания цилиндра 3. Распределение температур в составном стержне и охрannом цилиндре измеряют термопарами. В качестве образцового материала используют свинец, а в некоторых случаях — никель и цинк.

Ссылаясь на анализ точности метода, который, к сожалению, не приводится в работе, авторы считают, что погрешность определения коэффициента теплопроводности в данном случае не превышает 2%. Недостатком конструкции установки является верхнее расположение холодильника, что приводит к потерям тепла за счет свободной конвекции. Кроме того, не предусмотрен контроль мощности теплового потока (поток измеряется только на выходе из испытуемого образца).

От последнего недостатка свободна установка, созданная Кинджери и

сфере гелия. В качестве стандартного образца теплопроводности использовали алунд.

Как Кинджери и Франкль, так и использовавшие ту же схему Бауэрс и др., обнаружили хорошее совпадение экспериментальных данных, полученных на установке, с данными, полученными независимыми абсолютными методами. По данным Бауэрс и др., рассогласование не превышало 2%. Следует отметить, что совпадение результатов, полученных абсолютным и сравнительным методами, говорит о правильной аттестации стандартного образца.

Схемы, аналогичные рассмотренной, использовались рядом исследователей: Кнаппом [8], Шоулзом [9], Эвингом [10] и др. Изменения, внесенные ими, не принципиальны. У нас подобная установка была создана И. А. Смирновым и Е. В. Шадричевым [11] для исследования теплопроводности монокристаллов теллура в интервале температур 300—600° К. В качестве образцового вещества использовался плавный кварц. Не приводя подробного описания установки и анализа погрешностей метода, авторы оценивают его точность в 5—8%. По данным статьи проверить эту цифру не представляется возможным.

В работе Мирковича [14] описана установка, представляющая реализацию схемы Франкля и Кинджери с небольшими изменениями (рис. 6). Автор считает принципиальным введение стабилизатора теплового потока 4 между источником тепла 5 и стандартным образцом теплопроводности 3. Тепловой стабилизатор изготовлен из того же материала, что и стандартный образец, и имеет тот же диаметр. Он создает равномерный поток на входе в составной стержень и уменьшает перепад температур, возникающий между стандартным образцом и нагревателем при непосредственном контакте. Для уменьшения термического контактного сопротивления служит платиновая фольга толщиной 0,001 дюйма. Для изоляции образцов от охранного цилиндра применялся вермикулит.

Анализ погрешности измерений в работе не приводится, но в заключение автор, оценивая ее величину в 2—3%, делает вывод, что предлагаемая схема позволяет получать точные данные по коэффициентам теплопроводности твердых материалов.

В указанных работах основные усилия авторов направлены на уменьшение боковых утечек тепла, что усложняет конструктивную схему. Экспериментальная установка, созданная Пирсоном и Дэви [12], логически завершает путь развития схем сравнительного метода. В отличие от установки Кинджери и Франкля все нагреватели разделены на основную, состоящую из трех секций, намотанных на отдельной оболочке, и адиабатические, размещенные на охранном цилиндре. Основной нагреватель служит для создания в печи требуемого температурного уровня (до 700° С в данном случае). Двенадцать адиабатических нагревателей, имеющих независимое питание, обеспечивают равенство температур в соответствующих сечениях образцов и охранного цилиндра. Авторы не приводят ни подробного описания техники эксперимента, ни анализа

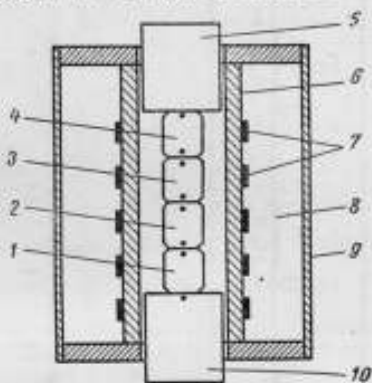


Рис. 6. Схема установки Мирковича [14].

1, 3 — стандартные образцы; 2 — испытуемый образец; 4 — тепловой стабилизатор; 5 — источник тепла; 6 — охранный цилиндр; 7 — нагреватели; 8 — изоляционная засыпка; 9 — корпус; 10 — теплоприемник (точками отмечены места расположения термопар).

погрешностей метода. Установка представляет собой сложную систему. Ручное регулирование двенадцати адиабатических, одного торцевого и трех основных нагревателей крайне затруднительно, и для нормальной работы необходима система автоматического регулирования.

При относительно большом количестве экспериментальных работ в литературе практически отсутствует теоретический анализ систематических погрешностей сравнительных методов измерения. Единственной работой такого рода является статья Лаубитца [13]. Она посвящена исследованию погрешностей, возникающих в результате отклонений потока от одномерного. Математическая модель схемы показана на рис. 7. Здесь A — образец

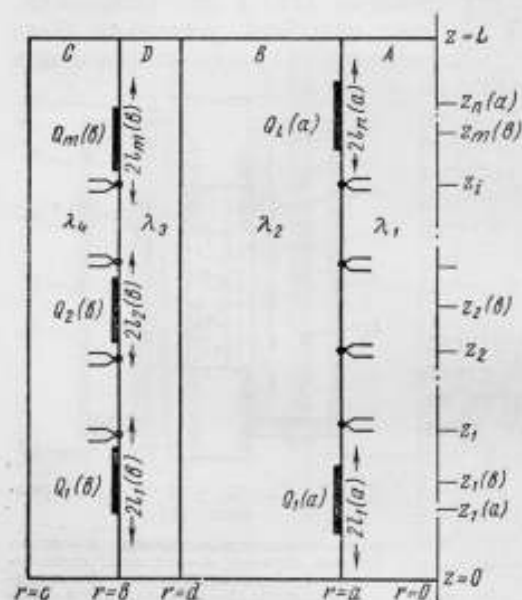


Рис. 7. Математическая модель сравнительного метода измерения, принятая в работе [13].

- 1) предполагается наличие радиальной симметрии;
- 2) $T(c, z) = 0$, т. е. температура внешней оболочки вдоль образующей равна нулю при всех значениях z ;
- 3) $T(r, L) = T(r, 0) = 0$, т. е. температура по торцам внешней оболочки равна нулю при всех значениях r ;
- 4) коэффициенты теплопроводности λ всех материалов не зависят от температуры.

Условия 2—4 могут вызвать некоторые возражения, но, как полагает автор, температура внешней оболочки (условия 2—3) мало влияет на распределение температур и тепловых потоков в печи, а удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных результатов говорит о корректности условия 4. На базе полученного решения исследуется влияние различных условий эксперимента на точность определения теплопроводности по схеме Франкля и Кинджери.

Погрешность измерения теплопроводности, связанную с аксиальными потерями тепла по изоляции, автор характеризует отклонением величины R от единицы (рис. 8), где R равно отношению теплопроводностей испытуемого и стандартного образцов. Выражение для R , полученное в результате аналитического решения задачи, имеет вид

$$R = \frac{2 [T(a, z_2) - T(a, z_3)]}{T(a, z_1) - T(a, z_2) + T(a, z_3) - T(a, z_4)} \quad (6)$$

Температура образца $T(a, z_1)$, измеренная в точке z_1 , зависит от отношения λ_1/λ_2 при условии абсолютного совпадения распределений температуры в образце и охранном цилиндре. Зависимость R от распределения мощностей нагревателей системы учитывается введением параметра $\Delta T/T_0$, где $\Delta T = |T(a, z_1) - T(a, z_2)|$ — полный перепад температуры по стержню, а T_0 — средняя температура образца. Для приведенной на рис. 8 кривой $\Delta T/T_0 = 0,05$.

На базе того же решения Лаубитц исследовал погрешность, возникающую за счет радиальных потерь тепла, а также погрешность, обусловленную относительным смещением образца и охранного цилиндра в осевом направлении (такое смещение может возникнуть при выборе конструкционных материалов с различными коэффициентами линейного расширения).

В результате численных оценок Лаубитц делает вывод, что применение рассмотренной схемы дает возможность получить данные о теплопроводности материалов с погрешностью не менее 10%. Сравнение с экспериментальными данными работ [5—12, 14] показывает, что полученное Лаубитцем значение погрешности завышено. Это может быть связано, в частности, с тем, что Лаубитц недооценивает возможности эксперимента.

Например, конструкция установки может обеспечивать более точное совпадение термомпар в образцах и охранном цилиндре, чем предполагаемое автором расхождение в 1 мм на 25 мм длины образцов, которое приводит к погрешности порядка 5%. Отношение теплопроводностей изоляции и образцов можно свести к 0,01 и даже меньшей величине (примером могут служить данные Мирковича [14]). Введением автоматической схемы регулирования мощности нагревателей можно добиться поддержания температур образца и охранного цилиндра с точностью до $0,01^\circ\text{C}$, тогда как Лаубитц вводит в расчет отклонение на 1°C и т. д. Следует отметить, что вызывает также сомнение полученная Лаубитцем зависимость погрешности, обусловленной аксиальными перетечками тепла, от λ_1/λ_2 . Действительно, при возрастании λ_1/λ_2 , т. е. при стремлении теплопроводности изоляции к нулю, потери тепла должны также монотонно уменьшаться и погрешность от этих потерь должна асимптотически стремиться к нулю. Расчетные данные Лаубитца не обнаруживают этого стремления. Кроме того, по данным А. И. Кайданова и А. В. Кайдановой*, при $\lambda_1/\lambda_2 = 1$ эта погрешность применительно к абсолютным измерениям равна 100%, тогда как оценка по Лаубитцу приводит к значению, равному 6%. По данным Лаубитца, изменение отношения теплопроводностей λ_1/λ_2 на два порядка от 10 до 1000 практически не влияет на величину погрешности, что также не соответствует результатам упомянутой выше работы.

Таким образом, следует признать, что в настоящее время отсутствует надежная теория рассматриваемого метода.

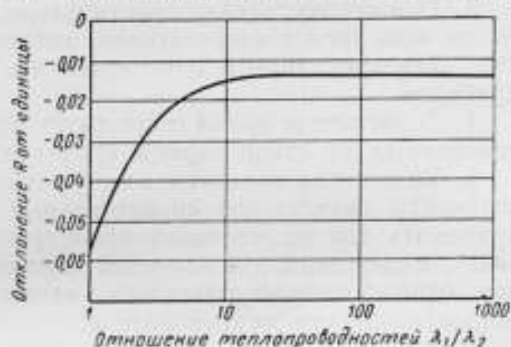


Рис. 8. Отклонение величины R от единицы как функция отношения теплопроводностей образца и изоляции.

* Стр. 103.

Выводы

1. Сравнительные методы не позволяют получить такие же точные результаты, как при абсолютных методах, так как содержат систематические погрешности аттестации стандартных образцов. Поэтому с практической точки зрения естественным является требование, чтобы при осуществлении сравнительных методов экспериментальная техника не усложнялась до уровня абсолютных методов, как это сделано в работах [5—12].
2. Случайные погрешности измерений теплопроводности сравнительными методами такие же, как и при измерении абсолютными методами, что обеспечивает высокую воспроизводимость результатов.
3. При осуществлении сравнительных методов нет необходимости все тепло, выделяемое нагревателем, направлять через испытуемый образец, что позволяет значительно упростить конструкцию соответствующих приборов.
4. В настоящее время отсутствует надежная теория расчета приборов, основанных на стационарном сравнительном методе.
5. Вследствие простоты конструкции приборов и высокой воспроизводимости результатов сравнительные методы наиболее целесообразно применять для исследования теплопроводности образцов при различных видах воздействия, для изучения близких по теплопроводности материалов, один из которых аттестован в качестве стандартного, и для измерения теплопроводности микрообразцов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев Г. М. Тепловые измерения. М., Mashgiz, 1957.
2. Ипатов Ю. С., Лейкум В. И., Олейник Б. Н., Патовская З. К. Приборы для измерения теплопроводности. «Труды институтов Комитета», вып. 63 (123). М.—Л., Стандартгиз, 1962.
3. Чудиновский А. Ф. Методы определения термических характеристик материалов. «Журнал теоретической физики», 1953, № 12.
4. Stuckes A. D., Chasmar R. P., Semiconductor Conferens Report, Physical Society, London, 1956.
5. Van Dusen M. S., Shelton S. M. Bur Standards Journal Research 1934, v. 12, № 4.
6. Franci J., Kingery W. D. Journal Am. Ceramic Society, 1954, v. 37, № 2.
7. Bowers R., Ure R. W., Bauerle I. E., Corhish A. J. Journal Applied Phys. 1959, v. 30, № 6.
8. Кларк W. J. Journ. Am. Ceramic Society, 1943, v. 26, № 2.
9. Scholes W. A., Journ. Am. Ceramic Soc., 1950, v. 33, № 4.
10. Ewing C. T., Walker B. E. ets Journal Chem. Engineering Data, 1962, v. 7, № 2.
11. Смирнов И. А., Шадринцев Е. В. Теплопроводность монокристаллов теллура в интервале температур 80—650° К. «Физика твердого тела», 1962, № 7.
12. Pearson G. J., Davey et al. Proc. Iowa Acad. Science. v. 64.
13. Laubitz M. J. Canadian Journal of Physics, 1961, v. 39, № 6, № 7.
14. Mircovich V. V. Journal of Am. Ceramic Society, 1965, v. 48, № 8.
15. Шлыков Ю. П., Ганин Е. А. Контактный теплообмен. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963.
16. Mac Ewan L. R., Stonle R. L., Journal Nucl. Mat. 1967, v. 21, № 1.
17. Weeks, Jamees, et al., Rew Sci. Instr., 1953 v. 24 (10).
18. Sablick, Show, Nucl. Mat. 16 1965.
19. Howl D. A. Journal Nucl. Mat. 1966, v. 19, № 1.
20. Kratz H. R., Raeth C. H. U. S. A. E. C. Publ., 1944.
21. Ames. Laborators, U. S. A. E. C. Publ. 1. s. c — 533.
22. Deem N. W., Nelson H. R. Thermal conductivity of Powder — metallurgy uranium, BMI—745, 1952.
23. Weeks L. Z. J., Metals (ASME, Trans, 203) 1955, v. 7.
24. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., ГИТТЛ, 1952.
25. Карслоу Г., Егер Д. Теория теплопроводности. М., изд. «Наука», 1964.

26. Драбл Дж., Голдсмит Г. Теплопроводность полупроводников. М., изд. «Наука», 1964.
27. Михеев М. А. Основы теплопередачи. М.—Л., ТЭИ, 1946.
28. Stuckes A. D. Physical Rev., 1957.
29. Stuckes A. D. Phil. Mag., 1960, v. 5, № 49.
30. Stuckes A. D. British J. Appl. Phys, 1961, v. 12, № 12.
31. Чудновский А. Ф. Теплофизические характеристики дисперсных материалов. М., Физматгиз, 1962.
32. Laubitz M. J. Canadian Journal of Physics, 1964, v. 42, № 1.
33. Laubitz M. J. Canadian Journal of Physics, 1965, v. 43, № 2.

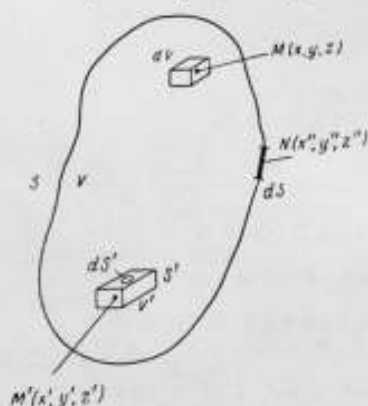
Поступила в редакцию
22/IV 1968 г.

ЛУЧИСТО-КОНДУКТИВНЫЙ ТЕПЛОБМЕН

Использование в промышленности различных кристаллических, стеклообразных и керамических материалов, обладающих повышенной термостойкостью или другими исключительными физическими характеристиками, требует всестороннего исследования теплофизических свойств этих веществ, в частности изучения энергетической стороны происходящих в материале процессов, в особенности, если объект находится в условиях

высоких температур и интенсивных потоков энергии. Для большой группы материалов таких, как стекло, кварц, корунд, германий, кремний и другие, эти исследования затруднены, поскольку передача энергии в этих средах осуществляется одновременно несколькими механизмами и, прежде всего, теплопроводностью и радиацией.

Вопросы, связанные с изучением обонх этих явлений, были предметом многочисленных исследований. Проанализируем известные нам работы с двух точек зрения: рассмотрим общие решения задач, связанных с нахождением температурных полей и потоков энергии в указанных веществах, и проследим, как применяются результаты этих исследований для измерения такой теплофизической величины, как



Схема, иллюстрирующая вывод уравнения лучисто-кондуктивного теплообмена.

коэффициент теплопроводности. Не будем касаться экспериментальной стороны вопроса и ограничимся работами теоретического характера.

Прежде всего, не углубляясь в математические тонкости проблемы, рассмотрим в общих чертах процесс передачи энергии в указанных материалах. Все эти материалы отличаются заметным пропусканием в видимой или инфракрасной области спектра, поэтому их называют полупрозрачными, поглощающими, или еще диатермическими средами. Последнее название происходит от английского diathermancy, что, по определению Тиндаля [1], означает для инфракрасной области то же, что «прозрачность» для видимого участка спектра.

Пусть имеется некоторый объем V , ограниченный поверхностью S (см. рисунок), причем внутри объема и на поверхности имеют место гра-

денты температур. Выделим вблизи точки M' объем V' с поверхностью S' и определим поток энергии через единичный элемент dS' этой поверхности. Для этого необходимо, кроме потока энергии q , которая распространяется путем теплопроводности, учесть поток лучистой энергии, испускаемой каждым элементом dV объема V и dS поверхности S и достигающей участка dS' . При этом на пути от точек M и N к M' происходит ослабление лучистой энергии по определенному закону из-за поглощения в среде. Поток лучистой энергии через рассматриваемый элемент dS' , таким образом, равен

$$E = \int_V j [T(M)] K(M, M') dV + \int_S B [T(N)] K(N, M') dS. \quad (1)$$

Здесь $j [T(M)]$ — излучение единицы объема материала при температуре $T(M)$;

$B [T(N)]$ — яркость на поверхности S в точке N ;

$K(M, M')$ и $K(N, M')$ — функции, учитывающие ослабление радиации в веществе;

E — плотность потока лучистой энергии.

Если в объеме V' нет посторонних источников энергии, то полный поток ее через замкнутую поверхность S' в стационарном режиме равен нулю. Поэтому интегрируя выражение $q dS' + E dS'$ по всей поверхности S' , а затем переходя к интегралу по объему V' , получим основное уравнение, описывающее процессы передачи энергии в среде

$$\operatorname{div} \bar{W} = 0, \quad (2)$$

где \bar{W} — вектор полной энергии, т. е. $\bar{W} = \bar{q} + \bar{E}$. Вектор \bar{q} определяется законом Фурье. Что же касается вектора \bar{E} , то его определение будет подробнее рассмотрено ниже.

Строгий вывод уравнения с учетом внутренних источников энергии приведен в работе Ю. А. Суринова [2].

Все абсолютные методы определения теплофизических свойств веществ предполагают предварительное знание аналитической связи между этими свойствами и температурой в каждой точке среды. Поэтому при исследовании указанных материалов необходимо решать уравнение (2), что в общем случае невозможно, поскольку температура $T(M)$ сложным образом входит под знаки производной и интеграла. Тем не менее в ряде частных случаев получены эффективные результаты.

Необходимость изучения лучистой теплопередачи возникла, по-видимому, впервые при решении ряда астрофизических проблем. В теории звездных фотосфер [3,5] одними из основных являются уравнения переноса излучения

$$\frac{dI_\nu}{dl} = -\alpha_\nu I_\nu + \epsilon_\nu \quad (3)$$

и лучистого равновесия

$$4\pi \int_0^\infty \epsilon_\nu d\nu = \int_0^\infty \alpha_\nu d\nu \int I_\nu d\omega, \quad (4)$$

где I_ν — спектральная интенсивность излучения, распространяющегося в направлении l ;

ϵ_ν — коэффициент излучения (поток энергии, излучаемый единичным объемом вещества в единичном спектральном интервале в единицу телесного угла);

α_ν — показатель поглощения вещества для частоты ν спектра.

В правой части уравнения (4) внутренний интеграл берется по всему телесному углу, в котором имеется радиация. Уравнение (3) является лишь математической записью закона сохранения энергии для стационарных условий. Уравнение (4) отражает наличие в среде лучистого равновесия [5], при котором количество энергии, излученной элементом объема, равно поглощенной этим же объемом радиации. Если показатель поглощения не зависит от частоты, то уравнения (3) и (4) можно заменить более простой системой

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta \frac{dI}{d\tau} &= I - S \\ S &= \int I \frac{1}{4\pi} d\omega \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

где $I = \int_{\nu=0}^{\infty} I_{\nu} d\nu$ — интегральная интенсивность излучения;

$\epsilon = \int_{\nu=0}^{\infty} \epsilon_{\nu} d\nu$ — интегральный коэффициент излучения;

$\tau = \int_l^{\infty} \alpha dl$ — безразмерная оптическая глубина;

ϑ — угол между направлением излучения и направлением радиуса-вектора.

Упрощенное решение системы (5) по методу Шустера—Шварцшильда [3, 5] состоит в том, что вместо $I(\tau, \vartheta)$ рассматривают средние интенсивности излучения, идущего в двух противоположных направлениях

$$I_1(\tau, \vartheta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\tau, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta; \quad I_2(\tau, \vartheta) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} I(\tau, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Тогда систему уравнений (5) можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{dI_1}{d\tau} &= I_1 - S \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{dI_2}{d\tau} &= S - I_2 \\ S &= \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \end{aligned} \right\}. \quad (5a)$$

Если поток излучения через среду задан, то система (5a) легко разрешима.

Более строгое решение уравнений (5) получают, заменяя эту систему интегральным уравнением. Для нахождения $I(\tau, \vartheta)$ второе уравнение подставляют в первое и заменяют интеграл суммой, используя одну из формул механических квадратур, а затем решают полученную систему линейных дифференциальных уравнений. Если же решим первое уравнение системы (5) относительно $I(\tau, \vartheta)$ и подставим во второе, получим интегральное уравнение Милна относительно функции $S(\tau)$ [6]

$$S(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E(\tau) |\tau - \tau'| S(\tau') d\tau',$$

ядро которого является интегральной показательной функцией.

Точное решение этого уравнения довольно сложно [5], однако значения функции $S(\tau)$ можно определить с достаточной точностью.

Чтобы определить температуру среды по найденным значениям $S(\tau)$, необходимо сделать дополнительные предположения.

В условиях термодинамического равновесия интенсивность излучения во всех направлениях одинакова, т. е. $\frac{dI_\nu}{d\Omega} = 0$, и из уравнения (3) получим обычную формулировку закона Кирхгоффа

$$\frac{\epsilon_\nu}{\alpha_\nu} = I_\nu(T), \quad (6)$$

где $I_\nu(T)$ — спектральная интенсивность излучения в условиях термодинамического равновесия при температуре T (определяется по формуле Планка).

Предположение о локальном термодинамическом равновесии заключается в том, что при наличии в реальной среде температурных градиентов равенство (6) по-прежнему считается справедливым. Обоснованием этой гипотезы служит совпадение экспериментальных данных с результатами теории, построенной в таком приближении. Это совпадение вполне удовлетворительно, если градиенты невелики. Принимая эту гипотезу, а также учитывая, что $S_\nu = \epsilon_\nu/\alpha_\nu$, и интегрируя по всему спектру, получаем зависимость температуры от оптической глубины

$$S(\tau) = \frac{\sigma}{\pi} T^4,$$

где $\sigma = \frac{bc}{4}$;

b — постоянная Стефана;
 c — скорость света.

Росселанд [4] нашел связь между полным потоком радиации E и градиентом температуры. Для этого правую часть уравнения (6) он заменил усредненной по всем углам интенсивностью излучения I'_ν

$$\frac{\epsilon_\nu}{\alpha_\nu} = I'_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\omega, \quad (7)$$

тогда для спектрального лучистого потока получается соотношение

$$\bar{E}_\nu = -\frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{\alpha_\nu} \nabla I_\nu.$$

Если показатель поглощения не зависит от частоты, то интегрируя по всему спектру, получим

$$\bar{E} = -\frac{16}{3} \cdot \frac{\sigma T^3}{\alpha} \nabla T. \quad (8)$$

Лучистым коэффициентом теплопроводности Росселанд назвал величину

$$\lambda_r = \frac{16}{3} \cdot \frac{\sigma T^3}{\alpha}. \quad (9)$$

Для изотропного излучения равенство (7) является следствием выражения (3), и соотношение (8) в этом случае строго выполняется.

В тех случаях, когда показатель поглощения зависит от частоты, рассматривают его среднее значение $\bar{\alpha}$, которое можно определить различными способами [5]. Наиболее точным является росселандово среднее

$$\bar{\alpha} = \frac{\int_{\nu=0}^{\infty} \frac{dI_\nu(T)}{dT} d\nu}{\int_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_\nu} \cdot \frac{dI_\nu(T)}{dT} d\nu}, \quad (10)$$

где α_ν — спектральный показатель поглощения сплошного излучения.

В работе [7] показано, что при вычислениях иногда необходимо учитывать отдельные спектральные линии поглощения. С помощью величины α находят решение уравнений (5), которое рассматривают как первое приближение, а затем его уточняют, учитывая зависимость показателя поглощения от частоты.

Для плоского слоя, на границах которого происходит теплообмен с окружающей средой, задачу лучисто-кондуктивной теплопередачи впервые рассматривал Келлет [8] и получил решения для двух случаев — когда на границах происходит обмен энергией только за счет излучения и когда поверхности поддерживаются при постоянных температурах T_1 и T_2 .

Для вывода уравнения, описывающего явления переноса в теле, составляют баланс энергии элементарного объема dV толщиной dx и единичной площади. Пусть F_1 и F_2 — лучистые потоки, падающие справа и слева на dV , а $F_1 dx \alpha$ и $F_2 dx \alpha$ — поглощаемая элементом радиация. За счет теплопроводности доставляется энергия $\lambda \frac{d^2T}{dx^2}$ (где λ — коэффициент теплопроводности материала), а за счет излучения теряется с обеих границ этого объема $2\alpha\sigma T^4$. Таким образом, приходим к уравнению

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} - 2\alpha\sigma T^4 + \alpha(F_1 + F_2) = 0. \quad (11)$$

В стационарном режиме общий поток энергии в любом сечении постоянен, поэтому

$$F_1 - F_2 - \lambda \frac{dT}{dx} = \text{const}. \quad (12)$$

Равенства (11) и (12) с учетом граничных условий однозначно определяют температурное поле в слое. По характеру вывода (11) ясно, что фактически здесь происходит такое же усреднение излучения по направлениям внутри вещества, как и в методе Шустера—Шварцшильда, т. е. это уравнение может описывать процесс лишь в первом приближении. Однако получить строгое решение нелинейного уравнения (11) не представляется возможным; в работе [8] его линеаризуют с помощью приближенного равенства

$$T^4 = 4TT_1^3 - 3T_1^4,$$

которое справедливо при T_1 , близких к некоторому фиксированному значению температуры \bar{T} . Вместо \bar{T} можно брать T_1 или T_2 , при этом, как указано в работе [8], разница в результате незначительна. В случае, когда поверхности поддерживаются при постоянных температурах T_1 и T_2 , T^4 заменяется линейным выражением $a_0T + b_0$, а параметры a_0 и b_0 входят в произвольные постоянные, которые можно определить только численными методами.

При выводе уравнения (11) предполагалось, что излучение единичного объема составляет $2\alpha\sigma T^4$ в соответствии с выводом Мак-Магона [9], который получил соотношение для объемной спектральной плотности излучения

$$\frac{j(\nu, T)}{a(\nu, T)} = 2I_B(\nu, T),$$

где $I_B(\nu, T)$ — спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре T .

Это равенство, так же как и (11), получено без учета диффузного характера излучения в веществе, т. е. усреднением лучистого потока по всевозможным направлениям распространения радиации в среде.

Как показал Гардон [10, 11], строгий вывод дает уравнение

$$j(\nu, T) = 4n^2\alpha_\nu I_B(\nu, T), \quad (13)$$

где n — показатель преломления среды.

Точное описание процесса, учитывающее диффузный характер радиации, вообще говоря, равносильно решению уравнения (3). Однако возможен и другой подход. Рассмотрим плоский слой толщиной z при температуре T и выделим на его границах две единичные площадки, каждая из которых видна из центра другой под углом φ к нормали в пределах телесного угла $d\Omega$. Пусть яркость этих площадок в вакууме есть $B_B(\nu, T)$, тогда от первой ко второй придет поток радиации $n^2 B_B(\nu, T) \cos \varphi e^{-\alpha z \sec \varphi} d\Omega d\nu$, ослабление которого на пути $z \sec \varphi$ определяется экспоненциальным законом. Интегрируя по всем пространственным направлениям, получим полный поток лучистой энергии, падающий на вторую площадку от всей противоположной границы слоя

$$dF = n^2 B_B(\nu, T) d\nu 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha z \sec \varphi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = n^2 B_B(\nu, T) d\nu 2\pi E_3(\alpha z),$$

где $E_3(\alpha z)$ — интегро-показательная функция.

Функции $E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n} dt$ постоянно появляются при решении задач, связанных с явлениями диффузии. Их теория достаточно разработана, и они подробно протабулированы.

Полное излучение, падающее на единичную площадку первой границы в той же частоте ν , составляет $dF_0 = n^2 \pi B_B(\nu, T) d\nu$, и пропускание слоя определится [12] равенством

$$D = \frac{dF}{dF_0} = 2E_3(\alpha z).$$

В работе [12] интегро-показательные функции обозначены по-другому, а именно: $K_n(x) = -E_{n+1}(x)$. При изучении процессов теплообмена в стеклорасплавах диффузный характер излучения учитывался именно таким образом [13—16].

При рассмотрении слоев, удаленных от границ, в работе [13] получено выражение для потока лучистой энергии в стационарном режиме

$$E = 2\pi n^2 \int_{\nu=0}^{\infty} \int_{\zeta=-\infty}^z I_B(\nu, T) K_1[\alpha_\nu(z-\zeta)] \alpha_\nu d\zeta d\nu - \\ - 2\pi n^2 \int_{\nu=0}^{\infty} \int_{\zeta=z}^{\infty} I_B(\nu, T) K_1[\alpha_\nu(\zeta-z)] \alpha_\nu d\zeta d\nu. \quad (14)$$

Ввиду того, что аналитическая зависимость α_ν неизвестна, в общем виде исследование (14) невозможно, поэтому автор предлагает представить α_ν в виде ступенчатой функции. Такое представление удобно при описании процессов в стеклах [15], где число ступеней не более трех. В этом случае в выражении (14) интегрирование по спектру заменяется суммой по всем ступеням. Если, кроме того, сделать предположение о линейном характере изменения температуры (или ее 4-й степени) с координатой, то, как и в работе [13], получим

$$E = - \left(\frac{4}{3} \pi n^2 \sum_{\mu} \frac{1}{\alpha_{\mu}} \int_{\nu_{\mu-1}}^{\nu_{\mu}} \frac{dI_B(\nu, T)}{dT} d\nu \right) \frac{dT}{dz}. \quad (15)$$

Выражение в скобках предлагается рассматривать как излучательный коэффициент теплопроводности. Сумма здесь берется по всем ступеням — участкам спектра, на каждом из которых α можно считать постоянным. Необходимость указанных упрощений снижает ценность полученного выражения. Аналогичные результаты найдены в работе [14] путем разложения функции Планка в ряд Тейлора и отбрасывания всех членов разложения, кроме первого. Малость первого отброшенного члена является критерием бесконечности среды и приводит к соотношению $\int \alpha dz > 3,2$ [14]. Таким образом, результаты исследований по лучистой теплопередаче в полупрозрачной среде в работах [13—16] сводятся к определению величины лучистого коэффициента теплопроводности

$$\lambda_r = \frac{4}{3} \pi n^2 \int_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_\nu} \cdot \frac{dI_B(\nu, T)}{dT} d\nu. \quad (16)$$

В работе [17] разработаны основы графического метода вычисления интегралов такого типа с помощью специальных функций, выражаемых интегралами от функций Планка по конечному участку спектра. С их помощью можно вычислить многие интегралы, включающие функцию Планка или ее производную. В частности, они полезны при нахождении росселандова среднего (10).

Единственной известной нам работой, в которой рассматривается нестационарный процесс лучисто-кондуктивного теплообмена, являются исследования Ван-дер-Хельда [18], где обобщенное уравнение Фурье выглядит так:

$$C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + 4 \int_{\nu=0}^{\infty} n_\nu^2 \alpha_\nu [J_\nu - I_B(\nu, T)] d\nu, \quad (17)$$

здесь C_p и ρ — теплоемкость и плотность материала.

Это равенство получено путем составления баланса энергии элементарного объема. Второе слагаемое правой части его представляет собой разность поглощенной и испускаемой радиаций. Рассматриваемая автором величина J_ν связана с лучеиспусканием самой среды так, что полное излучение единичного объема для частоты ν спектра есть $4n^2 J_\nu$. Если учесть рассеяние лучистой энергии в среде, введя полный показатель ослабления радиации $\gamma_\nu = \alpha_\nu + \delta_\nu$ (где δ_ν — показатель рассеяния среды), то можно получить интегральное соотношение между величинами J_ν и $I_B(\nu, T)$

$$4J_\nu = \int_V [\alpha_\nu I_B(\nu, T) + \delta_\nu J_\nu] e^{-\gamma_\nu r} \frac{1}{4\pi r^2} dV + \int_S [e_{\nu, \psi} I_B(\nu, T) + (1 - e_{\nu, \psi}) J'_\nu] \frac{e^{-\gamma_\nu r}}{4\pi r^2} \cos \psi dS, \quad (18)$$

где $e_{\nu, \psi}$ — монохроматический коэффициент черноты излучения границы тела в направлении, определяемом углом ψ от нормали.

Разложив $I_B(\nu, T)$ в ряд Тейлора и ограничась первыми двумя членами, получим

$$I_B(\nu, T) = I_B(\nu, T_0) + \frac{\partial I_B(\nu, T_0)}{\partial T} (T - T_0).$$

Как указано в работе [18], это равенство выполняется с точностью до 1% при $\frac{\partial T}{\partial r} \ll 0,004 \gamma_\nu T$. Обозначив $F_\nu = J_\nu - I_B(\nu, T)$, получим

$$\alpha_\nu I_B(\nu, T) + \delta_\nu J_\nu = \gamma_\nu I_B(\nu, T_0) + \delta_\nu F_\nu + \gamma_\nu \frac{\partial I_B(\nu, T_0)}{\partial T} (T - T_0). \quad (19)$$

Последнее слагаемое равенства (19) и F_v записывают в виде рядов по степеням оператора Лапласа ΔT , причем ряд для F_v имеет неопределенные постоянные, которые находят, подставляя эти ряды в уравнение (18) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях операторов. (К сожалению, в этом месте подробные выкладки отсутствуют, и оценить справедливость этих операций трудно). Правую часть выражения (17) также можно представить в виде ряда. Тогда

$$C_{p\rho} \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_m \Delta T + \frac{4}{5} \cdot \frac{n^2}{Y_2^3} \beta_s \Delta^2 T + \frac{4}{7} \cdot \frac{n^2}{Y_3^5} \beta_s \Delta^3 T + \dots, \quad (20)$$

где

$$\lambda_m = \lambda + \frac{4}{3} \cdot \frac{n^2}{Y} \beta_s = \lambda + \frac{4}{3} \int_0^\infty \frac{n_v^2}{Y_v} \cdot \frac{\partial I_B(v, T)}{\partial T} dv; \quad (21)$$

$$\int_0^\infty \frac{n_v^2}{Y_v} \cdot \frac{\partial I_B(v, T)}{\partial T} dv = \frac{n^2}{Y_1} \beta_s;$$

$$\int_0^\infty \frac{n_v^2}{Y_v^3} \left(1 + \frac{5}{9} \cdot \frac{\delta_v}{\alpha_v}\right) \frac{\partial I_B(v, T)}{\partial T} dv = \frac{n^2}{Y_2^3} \beta_s \text{ и т. д.}$$

Уравнение (20) решают методом последовательных приближений, считая первым приближением решение обычного уравнения Фурье, без учета излучения, т. е.

$$T - T_0 = \frac{q}{C_{p\rho}} \cdot \frac{1}{(4\pi a t)^{1/2}} e^{-\frac{r^2}{4at}}. \quad (22)$$

При этом в уравнении (20) следует оставить лишь первое слагаемое ряда. Затем вычисляют функции $\Delta^2 T$, $\Delta^3 T$ и т. д. и находят последующие приближения. Выражение (21) определяет эффективный коэффициент теплопроводности вещества. Для случая «серого» тела из (21) можно получить уже известное выражение Росселанда.

Метод разложения искомой температуры в ряд, ограничиваясь первыми членами разложения, применяют и для решения стационарных задач лучисто-кондуктивного теплообмена [19, 20]. В работе Л. П. Филиппова [19] для сильно поглощающей среды получено выражение, совпадающее с выражением (21). В целом все задачи лучистой теплопередачи существенно упрощаются, если изучать два крайних случая: среду большой оптической плотности и среду с малой оптической глубиной. Подробно этот вопрос освещен в обзорной статье Р. Д. Сесса [21], однако работа [19] там не рассматривалась. В отличие от других исследователей, автор работы [19] учитывает многократные отражения от границ слоя и решает уравнения переноса излучения (3) при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} I^+(0) &= e_1(1 - R_1)n^2 + R_1 I^-(0); \\ I^-(L) &= e_2(1 - R_2)n^2 + R_2 I^+(L), \end{aligned} \quad (23)$$

где I^+ и I^- — интенсивность излучения, идущего слева и справа;
 $e_1 = e_1(T_1)$;
 $e_2 = e_2(T_2)$ — интегральные коэффициенты излучения границ слоя;
 L — толщина слоя;
 R_1 и R_2 — коэффициенты отражения границ.

В результате получается интегро-дифференциальное уравнение относительно $y = \frac{dT}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^L K(x, \zeta) y(\zeta) d\zeta, \quad (24)$$

ядро которого представляет собой сложную функцию от величины $\frac{de}{dT}$, а также от коэффициентов отражения, показателя поглощения, длины волны и координаты. Для решения уравнения (24) производится разложение искомой температуры в ряд по малому параметру λ^{-1} с отбрасыванием членов второго порядка малости. Найденное выражение для теплового потока в среде показывает, что использованное приближение эквивалентно раздельному рассмотрению лучистой и кондуктивной теплопередачи с последующим аддитивным сложением результатов.

Радиационная составляющая играет существенную роль в процессе передачи тепла не только в твердых телах, но и во многих жидкостях и газах. Поэтому при измерении коэффициента теплопроводности в этих средах в последнее время обращают особое внимание на систематические погрешности, связанные с лучеиспусканием. В этом отношении показательны работы Лейденфроста [22] и Польца [23]. Авторы в основном интересуются температурное распределение в теле, а соотношение между лучистым и кондуктивным потоками энергии. При нахождении потока радиации в плоском слое поглощающего вещества учитывают излучение среды и ограничивающих поверхностей, а также многократные отражения от последних. В результате получают сложное интегральное выражение, для упрощения которого среду и границы считают «серыми», а температуру — линейной функцией координаты

$$\left. \begin{aligned} T(\eta) &= T_1 - \Delta T \frac{\eta}{\tau} \\ T^4(\eta) &= T_1^4 - 4T_1^3 \Delta T \frac{\eta}{\tau} \\ T_2^4 &= T_1^4 - 4T_1^3 \Delta T \end{aligned} \right\}, \quad (25)$$

где η и τ — безразмерная координата и оптическая глубина слоя.

Два последних равенства осуществляют линеаризацию задачи. Соотношения (25) ограничивают применимость полученных результатов случаями, когда радиационная составляющая мала. В работе [23] получено выражение для лучистого потока

$$E = \frac{16}{3} \cdot \frac{n^2 \sigma}{\tau} T^3 \Delta T Y(e, \tau), \quad (26)$$

где $Y(e, \tau)$ — функция, учитывающая влияние геометрии образца и коэффициентов черноты излучения границ.

Как видно из равенства (26), лучистый коэффициент теплопроводности отличается от выражения (9) функцией $Y(e, \tau)$, значения которой вычислены при различных e и τ и приведены в работе [23]. Лейденфростом были рассчитаны отношения потоков E/q при 700°K , соответствующие двум механизмам переноса. Для толуола, который рассматривается как образцовое вещество, при $e = 1,0$ это отношение равно 12%, при $e = 0,1$ оно равно 2%. Для воды $E/q_{\text{max}} = 0,3\%$.

Как уже указывалось выше, при исследовании совместного процесса теплопередачи, наряду с вектором теплового потока можно ввести в рассмотрение вектор радиации \vec{E} . Понятие светового вектора введено

А. А. Гершуном [24] для построения теории светового поля. Этот вектор определяется таким образом, что его проекция на направление, перпендикулярное выбранной площадке, равна разности лучистых потоков, падающих на нее с обеих сторон. Поскольку

$$\vec{E} = \int_{4\pi} B \vec{d}\omega,$$

(где B — яркость лучей, идущих в телесном угле $d\omega$), то при вычислении \vec{E} можно окружить точку рассмотрения сферой с единичной площадью поперечного сечения и найти геометрическую сумму всех элементарных потоков энергии, достигающих этой сферы. Кроме того, расходимость вектора \vec{E} можно выразить через поглощательную и излучательную способности вещества [24].

В многочисленных отечественных работах по лучистому теплообмену [2, 25, 26 и др.] векторные представления использовались давно. В. И. Андрианов применил это понятие для изучения потоков энергии при лучисто-кондуктивном теплообмене [27]. В интегральном выражении, связывающем температуру и поток радиации, автор заменяет интегро-экспоненциальные функции $K_2(x)$ и $K_3(x)$ экспонентами e^{-2x} и $0,5 e^{-2x}$, после чего решение ведет методом последовательных приближений. В качестве первого приближения принимается линейное распределение четвертой степени температуры

$$T^4(x) = T_1^4 + \frac{T_1^4 - T_2^4}{L} x. \quad (27)$$

В ходе дальнейшего решения получается выражение для полного потока энергии в среде

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{L} \lambda + A_s \sigma (T_1^4 - T_2^4). \quad (28)$$

Здесь A_s — эффективная радиационная функция, определяемая равенством

$$A_s = [4\alpha L (1 - R_1 R_2 e^{-4\alpha L}) - (R_1 + R_2) (1 - e^{-2\alpha L})^2 - 2(1 - R_1 R_2 e^{-2\alpha L}) (1 - e^{-2\alpha L})] [4(\alpha L)^2 - (1 - R_1 R_2 e^{-4\alpha L})]^{-1}. \quad (29)$$

Если сравнить второе слагаемое в выражении (28), определяющее лучистый поток, с (26), учитывая, что разность $T_1^4 - T_2^4$ можно представить, как $4T_1^3 \Delta T$, то видно, что функции A_s и $Y(e, \tau)$ имеют один и тот же смысл.

Рассмотренные выше аналитические решения с достаточной ясностью указывают на трудности, которые возникают при построении точной математической модели изучаемого процесса. Для получения обозримых результатов приходится вводить дополнительные предпосылки, не имея критериев, позволяющих оценить степень точности получаемого приближения. В большинстве работ для уточнения решений предлагается метод последовательных приближений, однако уже во втором приближении получаются столь сложные выражения, что практически реализовать метод не удастся. Кроме того, ни в одной из известных нам работ характер сходимости последовательных приближений при рассмотрении слоя конечной толщины не исследуется.

Численные методы решения получаемых уравнений, не претендуя на общность выводов, в каждом частном случае могут давать более достоверные результаты. Примеров изучения лучисто-кондуктивного теплообмена с помощью ЭВМ имеется много. Рассмотрим подробно работу Р. Висканты и А. Гроша [28], на которую часто ссылаются другие авторы. В ней для определения температурного поля используется уравнение баланса энергии

$$\frac{d}{dy} \left(\lambda \frac{dT}{dy} \right) = E_n(y). \quad (30)$$

Величина $E_n(y)$, названная в работе [28] чистым излучением, связана с введенными ранее величинами равенством

$$\begin{aligned} E_n(y) &= \int_0^{\infty} E_{n,v}(y) dv = \\ &= \int_0^{\infty} \{ 4n_v^2(y) \alpha_v(y) I_B[v, T(y)] - \alpha_v(y) E'_v(y) \} dv. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь величина $E'_v(y)$ учитывает радиацию всего слоя и связана с интенсивностью монохроматического излучения равенством

$$E'_v(y) = \int_{\Omega=4\pi} I_v(y, \mu) d\Omega; \quad |\mu = \cos \theta|. \quad (32)$$

Наконец, $I_v(y, \mu)$ удовлетворяет уравнению переноса лучистой энергии (в предположении локального термодинамического равновесия)

$$\mu \frac{dI_v(y, \mu)}{dy} = \alpha_v [I_v(y, \mu) - n^2 I_B(v, T)]. \quad (33)$$

Для решения уравнения (33) задаются условиями на границе $I_v(0)$ и $I_v(L)$. Найдя из выражения (33) $I_v(y, \mu)$, подставляют его в уравнение (32), а затем в (31). Для интегрирования по всему спектру делается предположение о «серости» среды. Тогда из уравнения (30) получаем нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} N \frac{d^2\Theta}{d\tau^2} &= n^2(\tau) \Theta^4(\tau) - \\ &- \frac{1}{2} \left[\beta(\tau) E_2(\tau) + \beta(\tau_0) E_2(\tau_0 + \tau) + \int_0^{\tau_0} n^2(\tau') E_1|\tau - \tau'| \Theta^4(\tau') d\tau' \right], \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$N = \frac{\lambda \alpha}{2\sigma T^{*3}}; \quad \Theta = \frac{T}{T^*}; \quad \beta = \frac{H}{\sigma T^{*4}}; \quad \tau_0 = \alpha L; \quad \tau = \alpha y;$$

T^* — произвольная температура;

H — лучистая энергия, испускаемая поверхностью.

Дважды интегрируя уравнение (34), приходим к нелинейному интегральному уравнению

$$\Theta(\tau) = G(\tau) + \frac{1}{2N} \int_0^{\tau_0} K(\tau, \tau') \Theta^4(\tau') d\tau', \quad (35)$$

где

$$K(\tau, \tau') = n^2 \left\{ E_3(\tau') - E_3|\tau - \tau'| + \frac{\tau}{\tau_0} [E_3(\tau_0 - \tau') - E_3(\tau')] \right\};$$

Это уравнение решается на ЭВМ методом последовательных приближений. Если j -е приближение найдено, то для $(j + 1)$ -го приближения рекуррентное соотношение будет

$$\Theta_{j+1}(\tau) = G(\tau) + \frac{1}{2N} \int_0^{\tau_0} K(\tau, \tau') \Theta_j(\tau') d\tau'. \quad (36)$$

Решение ведется до тех пор, пока не будет удовлетворяться неравенство

$$\left| \frac{\Theta_{j+1}(\tau) - \Theta_j(\tau)}{\Theta_j(\tau)} \right| \leq 0,0005. \quad (37)$$

Как указано в работе [28], если параметр N равен единице, то третье приближение согласуется с уравнением (37); для $N = 0,1$ нужно шесть приближений, а для $N = 0,075$ решения начинают колебаться, и процесс расходится. Для восстановления сходимости в уравнении (36) $\Theta_{j+1}(\tau)$ заменяют $[\Theta_{j+1}(\tau) + \Theta_j(\tau)]/2$. Тенденция к расходимости процесса по мере изменения N вполне понятна, так как, согласно общей теории интегральных уравнений, процесс (36) сходится лишь при значениях параметра $(2N)^{-1}$, меньших первого характеристического числа ядра $K(\tau, \tau')$.

Уравнение, эквивалентное уравнениям (30)—(31) для «серой» среды, но ограниченной не по одной, а по двум координатам плоскими поверхностями, решено на ЭВМ Т. Эйнштейном [29] по следующей схеме. Площадь поперечного сечения тела разбивается на 100 клеток, масса предполагается сосредоточенной в центре каждого элемента, а зависимость $T^4(x, y)$ внутри клеток — линейной. Таким образом была получена система 100 линейных уравнений, которая решалась с помощью ЭВМ. Интересно отметить, что Т. Эйнштейн рассчитал температурное поле для двух крайних случаев — чистой теплопроводности и лучистого теплообмена — и сравнил с решением общей задачи при одновременном учете обоих механизмов для одних и тех же параметров. Он получил $q_c + q_R \neq q_{cR}$ (q_c , q_R и q_{cR} — соответственно потоки энергии в этих трех решениях). Для условий, при которых отыскивалось решение ($N_{cR} = \frac{\lambda/L}{\sigma T^3} = 0,02-0,2$; $\tau_0 = \alpha L = 0,5-2,5$), максимальное значение $q_{cR}/(q_c + q_R)$ составляло 1,085.

В работе [30] представлены результаты решения задачи в цилиндрических координатах. Принципиальный ход решения остается прежним, однако интегралы, связанные с излучением объема и границ тела, не выражаются в явном виде, что усложняет работу и увеличивает объем необходимых операций.

Тем же методом замены интегралов конечными суммами с последующим получением системы линейных уравнений, решаемых на машине, можно исследовать и более общий случай нестационарного теплообмена [31], причем весь спектр разбивается на конечное число интервалов, и нет необходимости вводить средний показатель поглощения. Однако объем операций для получения надежных результатов чрезвычайно велик.

Выводы

1. Процесс передачи энергии в веществе путем излучения во многих случаях оказывает заметное влияние на распределение температуры в среде, поэтому для определения температурного поля необходимо решать обобщенное уравнение, описывающее сложный процесс теплообмена.
2. Все исследования лучистой теплопередачи разделяются на две группы. К первой относятся работы, в которых среда принимается бес-

конечно протяженной и влияние границ не учитывается. Как правило, в этих исследованиях авторы не рассматривают кондуктивную составляющую теплопередачи. Вторую группу составляют исследования лучисто-кондуктивного теплообмена в плоском (или цилиндрическом) слое. Аналитическое решение получают здесь на основе упрощающих предположений, фактически осуществляющих линеаризацию задачи. Однако и для линейной задачи получить точное решение довольно сложно, поэтому предлагается использовать метод последовательных приближений. В качестве первого приближения принимают линейный характер изменения температуры (или ее 4-й степени) по координате.

3. При учете диффузного характера излучения получаются более точные результаты, но интегральные и интегро-дифференциальные уравнения усложняются. Чтобы упростить математическое описание процесса, рассматривают усредненные по направлениям лучистые потоки (приближение Шустера—Шварцшильда) и получают систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. На процесс теплопередачи в изучаемых средах существенно влияет показатель поглощения, аналитическое выражение которого неизвестно, поэтому его заменяют усредненным по спектру значением, считая среду «серой». В отдельных случаях такое усреднение удобно проводить на нескольких участках спектра и представлять показатель поглощения ступенчатой функцией. Если указанная замена не производится в процессе решения, то результаты получаются в виде интегральных выражений, и практическое их применение сводится к тем же упрощениям.

5. Исследование процесса с использованием ЭВМ позволяет получить точные данные лишь в определенном интервале изменения параметров уравнения. Тем не менее, с помощью этих решений удалось показать, что раздельное изучение лучистого и кондуктивного теплообмена в одних и тех же условиях с последующим суммированием результатов не равноценно рассмотрению их совместного действия.

6. Измерение коэффициента теплопроводности полупрозрачных материалов связано с вычислением поправки на радиацию. Для случая оптически тонкого слоя, а также при комнатных температурах, когда лучистая составляющая мала, методика подобных расчетов достаточно разработана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tyndall. Heat a mode of motion. London, 1887.
2. Суринов Ю. А. Лучистый обмен при наличии поглощающей и рассеивающей среды. М., Изд. АН СССР, ОН, 1952, № 9—10.
3. Амбарцумян В. Теоретическая астрофизика. ГОНТИ, 1939.
4. Росселанд С. Астрофизика на основе теории атома. ОНТИ, 1936.
5. Соболев В. В. Курс теоретической астрофизики. М., Физматгиз, 1967.
6. Milne E. A. Monthly Notices Roy. Astron. Soc 81, 361, 1921.
7. Биберман Л. М. и Лагорнова А. Н. Влияние спектральных линий на коэффициент лучистой теплопроводности. «Оптика и спектроскопия», 1964, т. 16, вып. 2.
8. Kellet B. S. IOSA, 42 [5], 1952.
9. Mc-Mahon H. D. IOSA, 40 [6], 1950.
10. Gardon R. Emission of Radiation by Transparent Materials. Radiative Transfer from Solid Materials, Boston, 1960.
11. Gardon R. IACS, 39 [8], 1956.
12. Czerny M., Genzel L. Glasstech. Ber. 25 [5], 1952.
13. Genzel L. Glasstech. Ber. 26 [3], 1953.
14. Geffken W. Glasstech. Ber. 25, 1952, s. 392.
15. Czerny M. Glasstech. Ber. 28 5, 1955.
16. Genzel L., Z. Physik, 135, 1953, s. 177.
17. Czerny M. Z. Physik, 1954, n. 3, s. 302.
18. Van der Held. Appl. Sci. Res A3, p. 237, 1952; A4, p. 77, 1953.

19. Филиппов Л. П. Влияние излучения и поглощения среды на процесс теплопередачи. «Вестник МГУ», серия физико-математических и естественных наук, 1954, № 2.
20. Engelmann F., Schmidt H. E. Nucl. Sci. and Eng. 24, № 4, 1966.
21. Сесс Р. Д. Теплообмен при совместном действии теплового излучения и теплопроводности или конвекции. Сб. «Современные проблемы теплообмена», М., изд. «Энергия», 1966.
22. Leidenfrost W. Int. Journ. Heat and Mass Transf. 7, 447, 1964.
23. Politz H. Int. Journ. Heat and Mass Transf. 8, 515, 1965.
24. Гершун А. А. Теория светового поля. «Избранные труды по фотометрии и светотехнике». М., Физматгиз, 1958.
25. Сидоров Э. А. Труды IV конференции молодых ученых ЭНИИ. М., изд. АН СССР, 1957.
26. Шорин С. Н. Лучистый теплообмен в поглощающей среде. Изв. АН СССР, ОТН, 1951, № 3.
27. Адрианов В. Н. Радиационно-кондуктивный и радиационно-конвективный теплообмен. Сб. «Тепло- и массообмен», Минск, 1965, т. 2.
28. Viskanta R. Grosh A. Trans. ASME, с. 84, 64, 1962.
29. Einstein T. H. NASA, Technical Report, R-154, 1963.
30. Einstein T. H. NASA, Technical Report, R-156, 1963.
31. Gardon R. IACS, 41, № 6, 1958.

Поступила в редакцию
8/11 1968 г.

ИЗМЕРЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТОНКИХ СЛОЕВ ТВЕРДЫХ ВЕЩЕСТВ

Широкое использование в промышленности пленочных элементов и защитных покрытий требует изучения физических свойств тонких слоев твердых веществ.

Один и тот же материал в зависимости от того, находится ли он в виде большого образца или в виде тонкого слоя, имеет различные свойства, причем при переходе к очень малым толщинам наблюдается анизотропия его физических свойств.

Специфика измерения одного из важнейших свойств тонких слоев — теплопроводности — приводит к тому, что методы, с успехом используемые для измерения теплопроводности массивных образцов, оказываются непригодными для тонких слоев. Если в первом случае побочные эффекты, неизбежно возникающие при экспериментальном измерении теплопроводности, рассматриваются как систематические погрешности, то для тонких слоев они соизмеримы, а часто и превышают основные эффекты. Так, появляющиеся при измерениях в тонких слоях контактные термические сопротивления могут превосходить по величине термическое сопротивление исследуемого слоя; термоприемник, размеры которого в данном случае соизмеримы с размерами образца, существенно искажает температурное поле последнего и т. д.

Все методы измерения теплопроводности можно разделить на стационарные и нестационарные.

Стационарные методы

Простейшим, но, по-видимому, наиболее грубым методом измерения теплопроводности твердых веществ является известный метод пластины. В работе [1] дано описание его применительно к тонким слоям и сделана попытка учесть термическое сопротивление границы раздела образец—термоприемник. Принципиально этот метод можно использовать также для пленок, нанесенных на подложку с известной теплопроводностью. Эксперимент состоял из двух операций. Вначале между двумя листами металлической фольги (рис. 1) с прикрепленными к ним термопарами зажимали тонкую металлическую пластину с высокой теплопроводностью. По измеренному тепловому потоку и разности температур листов фольги определяли термическое сопротивление между термоприемником

и поверхностью металлической пластины. Сопротивление самой пластины при этом не принимали в расчет ввиду его малости.

Вторая операция заключалась в том, что металлическую пластину заменяли исследуемой и проводили аналогичные измерения. Полагая термические сопротивления между термодатчиком и металлической пластиной, а также между термодатчиком и исследуемым образцом равными, вычисляли теплопроводность исследуемого образца. Для измерения были взяты относительно толстые пластины (около 1 мм) малой теплопроводности ($0,15 \div 0,7 \text{ вт/м} \cdot \text{град}$), что соответствует термическим сопротивлениям $R_T = 1,4 \div 6,7 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{град/вт}$. Погрешность измерения теплопроводности, по мнению автора, равна 5—8%.

При распространении этой методики на образцы с меньшим термическим сопротивлением (меньше толщина и больше теплопроводность) значительно увеличиваются погрешности, вызванные возрастанием термического контактного сопротивления участка термодатчик—поверхность образца в процессе переноса энергии через всю систему. Следует обратить внимание на то, что термические сопротивления границ раздела фольга—металлическая пластина и фольга—исследуемый образец принимаются при этом равными, хотя это не совсем верно, так как они определяются не только степенью прижатия пластин, но и механическими свойствами материала образца и качеством обработки его поверхностей, что вносит дополнительную погрешность.

Здесь тепловой поток направлен перпендикулярно плоскости исследуемой пластины, и, следовательно, теплопроводность измеряется в этом направлении.

В работе [2] описан метод измерения, при котором тепловой поток направлен вдоль тонкого слоя, и представлены результаты измерения теплопроводности тонкой металлической фольги. Этот метод, впервые примененный Кришнаном и Джейном для тонких проволок, заключается в следующем. Тонкую полоску металлической фольги нагревают электрическим током и измеряют температуру на ее краях. Уравнение теплопроводности для тонкой фольги, нагреваемой электрическим током в вакууме, имеет вид

$$\lambda S \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{I^2 \rho}{S} - \sigma \epsilon P (T^4 - T_s^4) = 0, \quad (1)$$

- где λ — теплопроводность;
 ρ — удельное электрическое сопротивление;
 S и P — площадь поперечного сечения и периметр образца;
 I — сила тока;
 σ — постоянная Стефана—Больцмана;
 ϵ — степень черноты;
 T_s — температура экрана.

На среднем участке фольги наблюдается равномерное распределение температуры, поэтому ее можно определить из уравнения

$$\frac{I^2 \rho}{S} = \sigma \epsilon T_c^4 P, \quad (2)$$

полученного из выражения (1) при условии, что

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \text{ и } \left(\frac{T_0}{T}\right)^4 \ll 1.$$

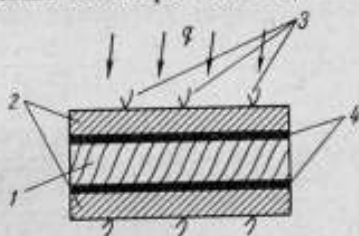


Рис. 1. Схема метода пластины [1].

1 — тонкая металлическая пластина (операция 1) или исследуемый образец (операция 2); 2 — металлическая фольга; 3 — термопары; 4 — бумага или пластмассовая пленка, нанесенная на фольгу.

Если разность температур $\Theta = T_c - T$ мала, то, линеаризовав уравнение (1), можно получить

$$\lambda S \frac{d^2\Theta}{dx^2} + \left(\frac{I^2}{S} \cdot \frac{dp}{dT} - 4\sigma\epsilon T_c^3 P - \sigma \frac{d\epsilon}{dT} T_c^4 P \right) \Theta = 0. \quad (3)$$

При граничном условии $\Theta|_{x \rightarrow \infty} = 0$ уравнение (3) имеет решение

$$\Theta = A e^{-kx},$$

где

$$k^2 = \frac{\left(4\sigma\epsilon T_c^3 P + \sigma \frac{d\epsilon}{dT} T_c^4 P - \frac{I^2}{S} \cdot \frac{dp}{dT} \right)}{\lambda S}, \quad (4)$$

или с учетом уравнения (2)

$$k^2 = \frac{4I^2\rho}{\lambda S^2 T_c} \left[1 + \frac{T_c}{4} \left(\frac{d \ln \epsilon}{dT} - \frac{d \ln p}{dT} \right) \right]. \quad (5)$$

После преобразования в уравнении (5) члена в квадратных скобках получим формулу для определения теплопроводности

$$\lambda = \frac{4I^2\rho}{S^2 T_c k^2} \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{d \ln (T^2/I)}{d \ln T} \right]. \quad (6)$$

Разность температур Θ на краях листа фольги измерялась специально сконструированным дифференциальным пирометром, возможности которого определили температурный диапазон измерений. Авторы предлагают использовать этот метод для измерений при температуре 2000°K и выше. Приведены результаты измерений теплопроводности вольфрамовой фольги толщиной 60 мкм и проволоки диаметром $0,2 \text{ мм}$ при температуре 1900°K . Среднее значение теплопроводности составляет $\lambda_{\text{ср}} = 117 \text{ вт/м}\cdot\text{град}$, а максимальное отклонение от него 6% . Авторы считают величину погрешности измерения λ , равной 7% .

В работе [3] предложен метод для измерения теплопроводности болометрических пленок. Здесь, как и в предыдущем методе, имеется свободный слой вещества (без подложки), по которому пропускают электрический ток. Математически метод сводится к решению уравнения (1) при малых разностях температур $\Theta = T - T_0$ с граничными условиями $\Theta|_{x=0} = \Theta|_{x=l} = 0$ (l — длина пленки, T — температура в точке с координатой x). Болометрическая пленка рассматривается как линейное сопротивление. Выражение для теплопроводности имеет вид

$$\lambda = \frac{I^2 \alpha R_0^2 l}{12(R - R_0) S} \left[1 - \frac{2(8\epsilon\sigma T_0^3 b l - I^2 R_0 \alpha)(R - R_0)}{I^2 \alpha R_0^2} \right], \quad (7)$$

где R и R_0 — сопротивление пленки при температурах T и T_0 ;

b — ширина пленки;

α — термический коэффициент сопротивления.

Таким образом, в отличие от предыдущего метода здесь не требуется локального измерения температуры пленки (в формулу (7) входит только значение температуры при $x = 0$). Однако, чтобы рассчитать теплопроводность по формуле (7), необходимо знать термический коэффициент сопротивления и степень черноты пленки. В работе [3] представлены результаты измерения теплопроводности тонких никелевых пленок толщиной $0,921 - 2,45 \text{ мкм}$. Полученные значения лежат в диапазоне $38,1 - 80 \text{ вт/м}\cdot\text{град}$ и растут с увеличением толщины пленки, что объясняется, по-видимому, систематическими погрешностями измерений.

Оба описанных метода применимы лишь для свободных пленок, проводящих электрический ток.

В литературе освещен ряд методов, при которых не требуется измерять температуру наружной поверхности образца, а достаточно лишь создать такие условия, при которых у двух образцов различной толщины эти температуры равны.

Метод измерения теплопроводности пленок из окиси алюминия при температурах 800—1900° С описан в работе [4]. На вольфрамовые нити (керы) наносят пленку окиси алюминия разной толщины; всего изготавливают три таких образца (третий — контрольный), параметры которых представлены в таблице.

Через образцы, находящиеся в вакууме, пропускают электрический ток и определяют зависимость мощности, подводимой к керу, от его температуры (рис. 2). Температуру керна определяют по его сопротивлению. Для образцов № 1 и 2 теплопередачу через цилиндрическую стенку можно выразить уравнениями

$$T_{к1} - T_{п1} = \frac{q_1}{2\lambda} d_{п1} \ln \frac{d_{п1}}{d_{к1}} \quad (8)$$

и

$$T_{к2} - T_{п2} = \frac{q_2}{2\lambda} d_{п2} \ln \frac{d_{п2}}{d_{к2}}, \quad (9)$$

где q — плотность теплового потока ($вт/м^2$) через боковую поверхность. Так как степень черноты у обоих образцов одинакова (одинаковы материал и технология нанесения пленки), то при равных мощностях, выделяющихся в кернах, температуры наружных поверхностей пленок $T_{п}$ также равны.

Вычитая уравнение (7) из (8) и учитывая, что $T_{п1} = T_{п2}$ при $q_1 = q_2 = q$, получают расчетную формулу

$$\lambda = \frac{q}{2\Delta T_{к1,2}} \left(d_{п2} \ln \frac{d_{п2}}{d_{к2}} - d_{п1} \ln \frac{d_{п1}}{d_{к1}} \right), \quad (10)$$

где

$$\Delta T_{к1,2} = T_{к2} - T_{к1}.$$

Измеренные значения теплопроводности пленки из окиси алюминия равны 0,1—0,5 $вт/м \cdot град$ в исследованном

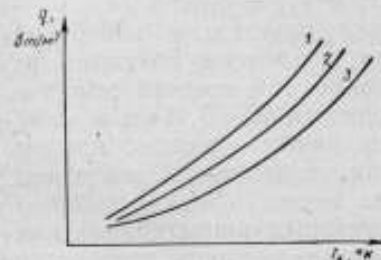
Рис. 2. Зависимость плотности теплового потока q от температуры керна $T_{к}$ (метод [4]).

1, 2, 3 — номера образцов.

диапазоне температур. Погрешность метода достигает 30—50%.

С небольшими изменениями этот метод использован Г. А. Жоровым и др. [5] для тех же пленок при температурах выше 1000° К. Измерения проводились на трубчатых и сплошных цилиндрических образцах с наружным диаметром 5,9 мм. Температура металлической подложки измерялась оптическим пирометром в полостях. У трубчатого образца — это внутренняя полость, которая должна нитировать излучение абсолютно черного тела, у сплошного образца — это одинаковые боковые отверстия. Эффективная теплопроводность $\lambda_{эф}$ при температурах 1100—2200° К равна 0,2—1,4 $вт/м \cdot град$. Погрешность измерения составляет 33—48%. Авторы показывают, что при высоких температурах основную роль в пере-

Номер образца	Диаметр керна, мкм	
	до нанесения покрытия	после нанесения покрытия
1	140	180
2	140	540
3	140	520



носе энергии в компактных и пористых материалах из окиси алюминия играют фотонные процессы.

Метод измерения теплопроводности, аналогичный изложенному в работах [4, 5], но для плоских образцов, был развит Блетоном и Речтером [6]. Покрытия, отличающиеся по толщине в два раза (0,127 и 0,254 мм), были нанесены на торцы стержней из железа «Армко» длиной 50,8 мм и диаметром 12,7 мм (рис. 3). Поверхности покрытий нагревались от высокотемпературного источника излучения, температура которого равна T_s . Противоположные концы стержней охлаждались кипящей водой. Тепловые потоки Q_1 и Q_2 , зависящие от толщины покрытия, были выравнены с помощью малого электрического нагревателя, расположенного

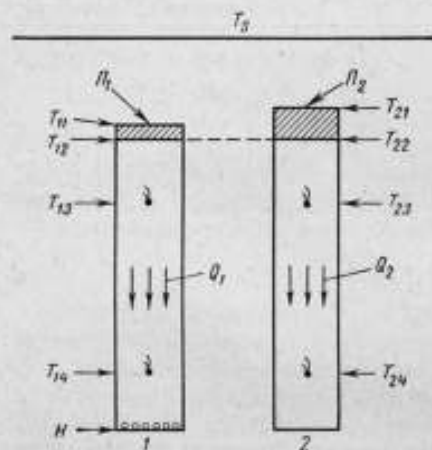


Рис. 3. Схема метода Блетона и Речтера [6].

1 и 2 — стержни; P_1 и P_2 — покрытия толщиной 127 и 254 мкм; H — дополнительный нагреватель.

около охлаждаемого конца стержня 1. Так как покрытия подвергались действию одного теплового источника, а тепловые потоки Q_1 и Q_2 равны, то T_{11} и T_{21} наружных поверхностей покрытий также равны. Тепловые потоки определяли по закону Фурье. При этом разности температур $(T_{13} - T_{14})$ и $(T_{23} - T_{24})$ измеряли термопарами, расположенными вдоль стержней, а значения теплопроводности железа «Армко» были взяты из литературы. Температуры внутренних поверхностей покрытий T_{12} и T_{22} определяли, экстраполируя показания термопар. Расчетная формула выведена в результате совместного решения уравнений теплопроводности для двух образцов при условии, что $Q_1 = Q_2$ и $T_{11} = T_{21}$.

Приведены результаты измерений напыленного в пламени покрытия из окиси циркония при средней температуре 163° С. Полученное значение теплопроводности ($\lambda = 0,18 \text{ вт/м} \cdot \text{град}$) приблизительно в три раза меньше, чем у массивных образцов. Авторы объясняют это сложной структурой покрытия, в частности, наличием пор. Погрешность измерения не оценивается. Метод [6] пригоден лишь для теплоизоляционных покрытий, так как только в этом случае можно получить достаточную разность температур наружной и внутренней поверхностей покрытия. Верхняя граница температурного диапазона измерений лимитируется температурой источника T_s , так как тепловой поток направлен от источника (экрана) к образцу. Область применения методов, описанных в работах [4, 5], также ограничена малыми значениями теплопроводности покрытий, но в отличие от метода работы [6] они пригодны для измерений только при высоких температурах. Действительно, при этих измерениях тепловой поток направлен от образцов к экрану, поэтому достаточно большой градиент температур на покрытии в условиях ограниченного теплообмена (только излучение) возможен, когда температура образцов на сотни градусов выше температуры экрана. Для расширения температурного диапазона в сторону более низких температур необходимо увеличить теплоотдачу от образцов к окружающей среде.

Пауэлл [7] измерял теплопроводность при охлаждении поверхности пленки воздухом в условиях вынужденной конвекции (рис. 4). Образец изготовлялся в виде стержня, на один торец которого наносилась исследуемая пленка.

двумя пленками, а на другом — устанавливался нагреватель. Вдоль стержня к его поверхности прикреплялись термопары, по показаниям которых определялся тепловой поток через стержень при известной его теплопроводности. Температура границы раздела пленка—подложка находилась экстраполяцией показаний термопар. Температура наружной поверхности пленки измерялась чувствительным термоэлементом. Описана методика градуировки термоэлемента. Погрешность измерения температуры составляет 0,5 град. Измерялось суммарное термическое сопротивление тонкого слоя напыленной стали (толщина покрытия 200—400 мкм) и границы раздела пленка—подложка. Для выяснения вклада в это термическое

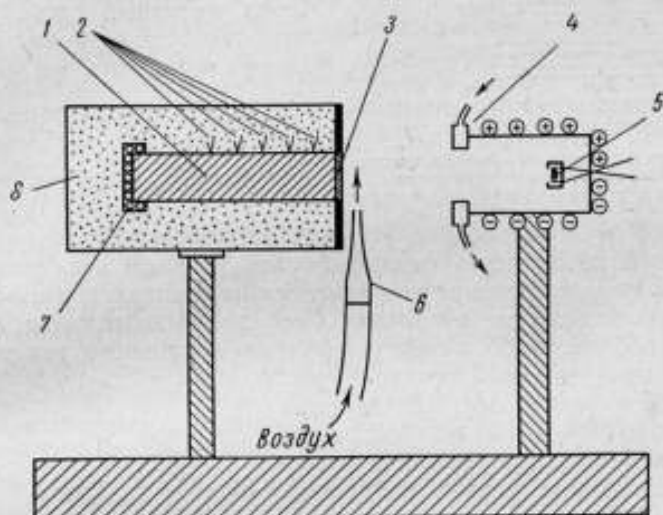


Рис. 4. Схема метода Паулла [7].

1—стержень из алюминиевой бронзы; 2—термопары; 3—исследуемое покрытие; 4—система водяного охлаждения камеры термоэлемента; 5—термоэлемент; 6—система воздушного охлаждения поверхности пленки; 7—кольцевой нагреватель; 8—изолятор.

сопротивление границы раздела и собственно напыленного покрытия использовалось значение теплопроводности $\lambda = 7 \text{ вт/м} \cdot \text{град}$, полученное для более толстых покрытий (4,3+ 5,3 мм) методом разделенного стержня. Оказалось, что термическое сопротивление границы раздела пленка—подложка составляет 25—50% от суммарного термического сопротивления и равно $1,51—3,84 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \cdot \text{град/вт}$. Измерения толстых электроосажденных покрытий никеля и хрома показали, что при такой технологии нанесения покрытия роль термического сопротивления границы раздела ничтожно мала.

Особое место занимают работы, посвященные измерению теплопроводности тонких покрытий оксидных катодов [8—12]. Технология их получения следующая. На две никелевые или платиновые пластины наносят слой карбоната щелочноземельного элемента, затем пластины складывают, и весь блок подвергают термической обработке в вакууме. В результате получается прочный тонкий слой оксидного покрытия (оксиды щелочноземельных элементов), который находится в хорошем тепловом контакте с пластинами. Так как теплопроводность оксидного покрытия мала, то термическое сопротивление границы раздела покрытие—подложка не учитывается.

В работах [8—10] измерения проводились по методу Пенджелли [8]. Слой оксидного покрытия находился между двумя тонкими металличе-

скими дисками с вмонтированными в них нагревателями (рис. 5). К дискам точечной сваркой приваривались термопары. Весь блок помещали в стеклянный баллон и доводили давление до $1,33 \cdot 10^{-4}$ н/м² (10^{-6} мм рт.ст.). Вначале определяли температурную зависимость мощности, теряемой дисками, при включенных нагревателях, а затем приступали к основной части эксперимента. С помощью нагревателя температуру T_1 верхнего диска поддерживали постоянной и измеряли равновесную температуру второго диска. По температуре второго диска, используя снятую ранее зависимость, определяли количество тепла Q_2 , теряемое вторым диском. Так как все это тепло должно проходить через оксидный слой, эффективную теплопроводность оксида $\lambda_{эф}$ можно вычислить из уравнения

$$Q_2 = \lambda_{эф} \frac{S}{l} (T_1 - T_2),$$

Рис. 5. Схема определения теплопроводности оксидных покрытий методом Пенджелли [8].

1 — слой оксидного покрытия; 2 — металлически блок; 3 — нагреватель; 4 — термопары.

где S и l — площадь и толщина покрытия.

В работе [11] использована усовершенствованная методика Вестона. Здесь тепловой поток через оксидный слой, равный тепловым потерям одного диска, определяется не по равновесным температурам, как у Пенджелли, а непосредственно из закона Стефана—Больцмана при температурах выше 650° К, либо путем расчета кондуктивного теплоотвода по термопарам при низких температурах. Эксперименты показали, что при высоких температурах ($650 \div 1300^\circ$ К) основную роль в переносе тепла через слабо поглощающий слой оксида играет излучение. Несмотря на это теплопроводность рассчитывалась из уравнения Фурье. Как показали исследования, для оксидных покрытий катодов толщиной 50—310 мкм она равна $(1,17 \div 12) \cdot 10^{-3}$ вт/м·град при $T = 1000^\circ$ К и $(0,63 \div 2) \cdot 10^{-3}$ вт/м·град при $T = 300^\circ$ К.

В работе [12] описан метод измерения теплопроводности оксидного покрытия при рабочей температуре катода $T \approx 1000^\circ$ К, который по существу является разновидностью метода Кольрауша. Увеличение температуры оксидного покрытия определяли по изменению его электрического сопротивления. При выводе формулы для расчета теплопроводности оксид рассматривали как нелинейное сопротивление. Расчет лучистого теплообмена в слое показал, что в данном случае отвод тепла излучением играет несущественную роль, особенно в тонких слоях (толщина $\delta \leq 100$ мкм), поэтому при расчете теплопроводности не учитывали излучение. Теплопроводность исследуемых покрытий толщиной 50—250 мкм лежит в диапазоне $(1,5 \div 8) \cdot 10^{-4}$ вт/м·град. Более низкие значения ее по сравнению с приведенными в работе [11] объясняются тем, что здесь фактически измеряется лишь кондуктивная составляющая эффективной теплопроводности.

Интересный, но главным образом качественный метод предложен в работе [13] для измерения анизотропии теплопроводности ориентированных полимерных пленок (рис. 6). На поверхность исследуемой пленки

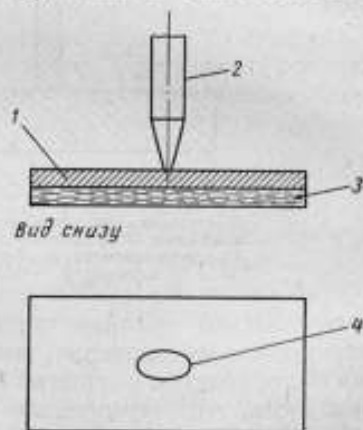


Рис. 6. Схема метода В. А. Каргина и Г. Л. Липатова [13].

1 — исследуемая пленка; 2 — точечный источник тепла; 3 — слой легко плавящегося вещества; 4 — эллипс плавления.

(толщиной $50 \div 250$ мкм) наносят тонкий слой легко плавящегося вещества (смесь воска с маслом). С противоположной стороны образца, перпендикулярно его поверхности, подводят точечный источник тепла — металлический стержень с электронагревателем, оканчивающийся усеченным конусом. С поверхностью пленки контактирует площадка малого сечения конуса, равная $0,7$ мм². При подведении тепла от стержня к образцу противоположная сторона последнего оплавляется, образуя при отсутствии анизотропии круг, а при наличии ее — эллипс. Отношение большой полуоси эллипса к малой и берется в качестве характеристики анизотропии теплопроводности пленки.

Последняя появившаяся в печати работа [22] посвящена измерению теплопроводности напыленных металлических покрытий из меди и никеля стационарным абсолютным методом цилиндра. Исследуемое покрытие образует цилиндрический слой толщиной $0,35$ — $1,7$ мм. Температура поверхности покрытий определялась термопарами. Полученные значения теплопроводности лежат в диапазоне $0,5$ — 6 вт/м·град. Погрешность измерения равна $6,5\%$ при 1000°C и $10,1\%$ при 200°C . Однако при вычислении погрешностей не учитывалось термическое контактное сопротивление между термопарой и поверхностью покрытия. Между тем это сопротивление может привести к существенному занижению результатов измерения. Так, например, авторы работы [4] измеряли теплопроводность покрытия из окиси алюминия не только упомянутым методом сдвига удельных характеристик мощности, но и методом, примененным в работе [22]. Во втором случае полученное значение теплопроводности из-за контактного сопротивления оказалось заниженным в два раза. Кроме того, если при бесконтактном методе измерения температуры в работе [7] для стали получено отношение теплопроводностей большого образца и покрытия, равное 7 , то в работе [22] для меди оно равно 360 .

Нестационарные методы

Основное преимущество нестационарных методов заключается в том, что они дают возможность измерить весь комплекс теплофизических свойств. Они требуют меньших затрат времени на проведение опыта, но, как правило, усложняют обработку экспериментальных данных. Эти методы основаны на том, что в условиях нестационарного теплового режима системы тел распределение температур в системе и их изменение во времени τ зависит от теплофизических свойств тел. В принципе можно представить множество систем тел, краевых (начальных и граничных) условий, а следовательно, и нестационарных методов измерения теплопроводности. Для каждого метода расчетная формула получается решением уравнения теплопроводности с соответствующими краевыми условиями. В качестве начальных условий, как правило, принимают, что в момент $\tau = 0$ распределение температур в системе тел равномерно.

В литературе описан ряд нестационарных методов, в которых рассматривается система двух тел — ограниченного (пленка) и полуограниченного (подложка) стержней, находящихся в идеальном тепловом контакте (рис. 7). Задача сводится к решению уравнения теплопроводности для этой системы тел с граничными условиями 1, 2 или 3-го рода на свободной поверхности ограниченного стержня. Решение такой задачи с граничными условиями 1-го рода приведено в работе [19], а метод измерений, основанный на этом решении, — в работах [14, 15]. Согласно работе [19], температурное поле системы можно описать уравнениями

$$\Theta_1 = \frac{T_1(X_1\tau)}{T_c} = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a_1\tau}} - h \sum_{n=1}^{\infty} h^{n-1} \left[\operatorname{erfc} \frac{2nR-x}{2\sqrt{a_1\tau}} - \operatorname{erfc} \frac{2nR+x}{2\sqrt{a_1\tau}} \right] \quad (11)$$

и

$$\Theta_2 = \frac{T_2(x, \tau)}{T_c} = \frac{2k_g}{1+k_g} \sum_{n=1}^{\infty} h^{n-1} \operatorname{erfc} \left[\frac{x-R+(2n-1) \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} R}{2 \sqrt{a_2 \tau}} \right], \quad (12)$$

где

T_c — температура, которую мгновенно принимает свободный конец ограниченного стержня в момент времени $\tau = 0$ (поддерживается постоянной);

$$k_g = \frac{\sqrt{\lambda_1 c_1 \gamma_1}}{\sqrt{\lambda_2 c_2 \gamma_2}} = \frac{k_1}{k_2} \quad \text{— отношение коэффициентов тепловой активности материалов ограниченного и неограниченного стержней;}$$

$$h = \frac{1-k_g}{1+k_g};$$

c , γ и a — удельная теплоемкость, плотность и температуропроводность стержней.

Анализ уравнения (12), выполненный в работе [14], показывает, что при $k_g = 0,80 \div 0,99$ можно ограничиться первым членом ряда, т. е.

$$\Theta_2 = \frac{2k_g}{1+k_g} \operatorname{erfc} \frac{x-R + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} R}{2 \sqrt{a_2 \tau}}. \quad (13)$$

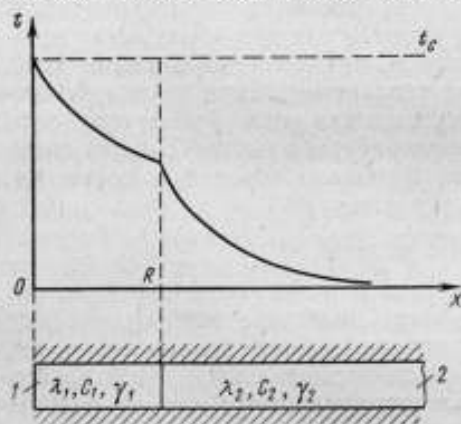


Рис. 7. Система из ограниченного и полуограниченного стержней.
1 — покрытие; 2 — подложка.

В работе [14] рассмотрены два варианта измерения теплофизических свойств — по двум и по одной температурно-временной точке. В качестве примера возьмем первый из них.

В момент времени $\tau = \tau'$ относительная температура в точке $x = R$ равна

$$\Theta|_{x=R} = \frac{2k_g}{1+k_g} \operatorname{erfc} \frac{R}{2 \sqrt{a_1 \tau}}, \quad (14)$$

а в фиксированной точке $x > R$ в момент времени $\tau = \tau''$ она равна

$$\Theta|_{x>R} = \Theta|_{x=R} = \frac{2k_g}{1+k_g} \operatorname{erfc} \frac{x-R + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} R}{2 \sqrt{a_2 \tau''}}. \quad (15)$$

Приравняв правые части уравнений (14) и (15), получим

$$a_1 = \frac{a_2 R^2}{\tau' (x-R)^2} (V \tau'' - V \tau')^2. \quad (16)$$

Подставив уравнение (16) в (14), получим выражение для теплопроводности ограниченного стержня

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2 R (V \tau'' - V \tau')^2}{(x-R) V \tau' \left[\frac{2}{\Theta} \operatorname{erfc} \frac{x-R}{2 \sqrt{a_2} (V \tau'' - V \tau')} - 1 \right]}.$$

Описанный метод был использован для измерения тепло- и температуропроводности довольно толстых покрытий ($\delta = 336 \div 646$ мкм), плохо про-

водящих тепло ($\lambda = 0,250 \div 0,302$ вт/м·град; $a = 1,65 \div 6,2 \cdot 10^{-7}$ м²/сек). Погрешность измерения теплопроводности составляла 8—12%. В качестве источника постоянной температуры применяли термостатированную движущуюся жидкость.

Метод не может быть применен для измерения теплопроводности тонких, хорошо проводящих тепло покрытий. Во-первых, это связано с очень быстрым прогревом слоя, хорошо проводящего тепло. Так, для слоя платины толщиной 200 мкм температура на границе пленка—подложка достигает 0,9 от значения температуры T_c уже через $3 \cdot 10^{-4}$ сек. Во-вторых, наличие температурного скачка на границе жидкость—твердое тело делает некорректными поставленные граничные условия для рассматриваемой системы тел, особенно для тонких слоев с большой теплопроводностью.

В работе [16] предложен метод измерения теплопроводности такой же системы тел, но с граничными условиями 2-го рода при постоянном во времени тепловом потоке на границе. Однако, как и предыдущий метод, он пригоден лишь для относительно толстых образцов с малой теплопроводностью, так как при этом не учитывается термическое сопротивление границы между тонким слоем и элементом, обеспечивающим заданные граничные условия, а также между поверхностью тонкого слоя и термоприемником. В работе приведены результаты измерения теплопроводности пластин толщиной 0,59—3,07 мм, лежащие в диапазоне 0,181—0,95 вт/м·град.

В работе А. М. Азизова [17] аналогичная задача решена при переменном во времени тепловом потоке (тепловой поток представляет собой либо линейную функцию времени, либо импульс).

Для одиночного прямоугольного импульса при достаточно большом значении критерия Фурье получены решения

$$\Theta_1(x, \tau) = \frac{2q_0 \sqrt{a_2 \tau}}{\lambda_2 \sqrt{\pi}} - \frac{xq_0 \sqrt{a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1}} k_e - \frac{Rq_0 \sqrt{a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} k_e}, \quad (17)$$

$$\Theta_2(x, \tau) = \frac{2q_0 \sqrt{a_2 \tau}}{\lambda_2 \sqrt{\pi}} - \frac{2q_0 R \sqrt{a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1}} + \frac{Rk_e q_0 \sqrt{a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1}} - \frac{q_0 x}{\lambda_2}, \quad (18)$$

где q_0 — максимальное значение импульса плотности теплового потока, поступающего в систему.

Автор предлагает измерять теплофизические свойства пленочных термодатчиков, используя показания самого термодатчика. Расчетные формулы получены следующим образом. Из уравнения (17)

$$\bar{\Theta}_1(\tau) = \frac{2q_0 \sqrt{a_2 \tau}}{\lambda_2 \sqrt{\pi}} - \frac{q_0 R \sqrt{a_2}}{2\lambda_2 \sqrt{a_1}} k_e - \frac{Rq_0 \sqrt{a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} k_e}, \quad (19)$$

где $\bar{\Theta}_1(\tau)$ — среднеобъемная температура пленки, регистрируемая термодатчиком.

Решая совместно уравнения (18) и (19), получим выражения для температуропроводности, тепловой активности и теплопроводности пленки

$$a_1 = \frac{1}{B \left(A - \frac{B}{2} \right)}, \quad k_e = \frac{Bk_2}{\sqrt{B \left(A - \frac{B}{2} \right)}}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}} \cdot \frac{1}{B}, \quad (20)$$

где

$$A = \frac{2\sqrt{\tau}}{R\sqrt{\pi}} - \frac{\lambda_1 \bar{\Theta}_1(\tau)}{q_0 R \sqrt{a_2}};$$

$$B = \left[\Theta_2(x, \tau) + \frac{q_0 x}{\lambda_2} - \bar{\Theta}_1(\tau) \right] \frac{2\lambda_2}{Rq_0 \sqrt{a_2}}.$$

Как видно, чтобы определить a_1 , k_1 и λ_1 , необходимо знать теплофизические свойства подложки (a_2 , k_2 , λ_2) и в процессе опыта измерить расстояние x , а также температуру $\bar{\Theta}_1(\tau)$ пленочного термодатчика и температуру в точке x подложки $\Theta_2(x, \tau)$ в один и тот же момент времени τ .

Для анализа возможности практического применения этого метода оценим погрешность определения λ_1 . Из уравнений (20) нетрудно получить

$$\delta\lambda_1 = \frac{x\sqrt{a_1}}{R\sqrt{a_2}\left(\frac{3}{2}k_e + \frac{1}{k_e} - 2\right)} \delta\left(\frac{q_0x}{\lambda_2}\right). \quad (21)$$

При выводе формулы (21) учитывалась лишь погрешность члена q_0x/λ_2 . Если она равна 10%, то чтобы измерить теплопроводность пленки λ_1 с погрешностью $\leq 10\%$, необходимо соблюдать неравенство

$$M = \frac{R\sqrt{a_2}\left(\frac{3}{2}k_e + \frac{1}{k_e} - 2\right)}{x\sqrt{a_1}} \geq 1. \quad (22)$$

Рассмотрим конкретный пленочный термодатчик [18] с параметрами: $R = 1 \cdot 10^{-7}$ м; $x = 2 \cdot 10^{-3}$ м; $k_e = 0,087$; $a_1 = 25 \cdot 10^{-6}$ м²/сек; $a_2 = 45 \cdot 10^{-8}$ м/сек. Подставив эти значения в выражение (22), получим в единицах СИ $M = 6,5 \cdot 10^{-5}$. Неравенство (22) не соблюдается, следовательно, теплопроводность пленки λ_1 не может быть определена предложенным методом. Из неравенства (22) можно определить R или x при указанных выше условиях

при $x = 2 \cdot 10^{-3}$ м

$$R \geq \frac{x\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}\left(\frac{3}{2}k_e + \frac{1}{k_e} - 2\right)} = 1,7 \text{ мм};$$

при $R = 1 \cdot 10^{-7}$ м,

$$x \leq \frac{R\sqrt{a_2}\left(\frac{3}{2}k_e + \frac{1}{k_e} - 2\right)}{\sqrt{a_1}} = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ мм}.$$

Последнее технически невозможно осуществить.

Таким образом, предложенный в работе [17] метод можно использовать для измерений лишь при очень больших толщинах слоя ($R \geq 1,7$ мм), так как чем тоньше слой, тем меньше должно быть расстояние x , а последнее ограничено современными экспериментальными возможностями. В этой же работе предложен и другой метод определения теплопроводности, в котором используется зависимость между $\bar{\Theta}_1(\tau)$ и λ_1 при $Fo > 200$. Понятно, что применение его будет зависеть от того, как сильно влияет λ_1 на $\bar{\Theta}_1(\tau)$. Как видно из выражения (19), от λ_1 зависит лишь второе слагаемое правой части уравнения, причем отношение его к остальным членам правой части равно

$$N = \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{Fo}}{k_e} - \frac{2}{k_e^2}}.$$

При $Fo = 200$ и $k_e = 0,087$ имеем $N = 0,01$, т. е. среднеобъемная температура пленки в этих условиях практически не зависит от ее теплопроводности. Следовательно, определить λ_2 по этому методу также практически невозможно.

В литературе нет описания методов для рассматриваемой системы тел при граничных условиях 3-го рода. Это объясняется тем, что для тонких

слоев при малом значении критерия Bi динамические процессы в тепловых системах определяются не теплопроводностью, а теплоемкостью c и коэффициентом теплоотдачи α . Рассмотрим известное решение нестационарной задачи теплопроводности для пластины с граничными условиями 3-го рода, когда температура среды $T_c = \text{const}$ [19]. При достаточно большом Fo можно ограничиться первым членом ряда

$$\frac{T_c - T(x, \tau)}{T_c - T_0} = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \cos \mu_1 \frac{x}{R} \exp\left(-\mu_1^2 \frac{\alpha \tau}{R^2}\right),$$

где T_0 — начальная температура пластины;
 $T(x, \tau)$ — температура в данной точке x в момент времени τ ;
 $2R$ — толщина пластины;

μ_1 — первый корень уравнения $\text{ctg } \mu = \frac{1}{Bi} \mu$.

При $Bi < 0,1$ имеем $\mu_1^2 = Bi$ с точностью до 3-го знака, так что темп охлаждения системы $m = \frac{\mu_1^2 \alpha}{R^2} = \frac{\alpha}{cyR}$ не зависит от теплопроводности.

Заметим, что для обеспечения $Bi > 0,1$ для пленки толщиной 200 мкм и теплопроводностью $\lambda = 10 \text{ вт/м} \cdot \text{град}$ необходим большой коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \frac{Bi \lambda}{R} \geq \frac{0,1 \cdot 10}{10^{-4}} = 10\,000 \text{ вт/м}^2 \cdot \text{град}.$$

Это возможно, лишь при очень интенсивном вынужденном конвективном охлаждении пленки жидкостью, которое, однако, может привести к коррозии и механическому разрушению пленки.

Кроме рассмотренных нестационарных методов, в литературе описаны методы мгновенного источника тепла и теплового компаратора.

В работе [20] измеряли теплопроводность покрытий и свободных пленок на основе полиэфирной смолы ПН-1 методом мгновенного источника тепла. Выбор метода определялся в основном тем, что продолжительность теплового воздействия на полимерное покрытие должна быть достаточно малой, чтобы не вызвать перераспределения растворителя и дополнительного затвердевания образцов в процессе исследования. Толщина покрытий лежит в диапазоне 200—1500 мкм. Изучалась кинетика изменения теплопроводности, значения последней не превышали $\lambda = 0,25 \text{ вт/м} \cdot \text{град}$. Этот метод применим лишь для малых значений λ , так как при этом не устраняются термические сопротивления границ раздела.

В работе [21] предложено использовать тепловой компаратор для измерения теплопроводности фольги и покрытий. Тепловой компаратор (рис. 8) состоит из двух металлических шариков, установленных в блоке из бальзового дерева. Один шарик, находясь на более низком уровне, касается поверхности, на которой находится блок. После предварительного нагрева блок приводится в контакт с исследуемым образцом. Дифференциальная термопара измеряет изменение разности температур между шариками во времени. Темп охлаждения шариков является функцией теплопровод-

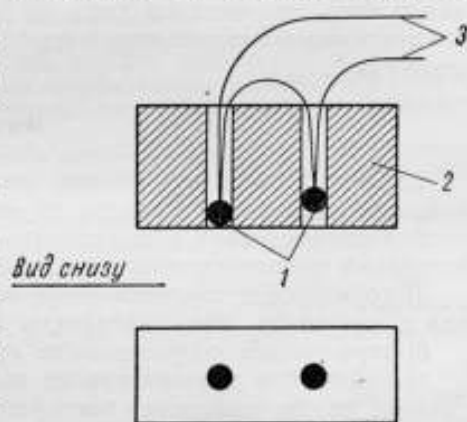


Рис. 8. Тепловой компаратор [21].

1 — металлические шарики; 2 — блок из бальзового дерева; 3 — дифференциальная термопара.

ности образца. После предварительной градуировки прибора на образцах с известной теплопроводностью можно быстро измерить теплопроводность исследуемого материала. Однако теоретически этот метод не разработан и остается неясным, почему темп охлаждения шариков считается функцией теплопроводности, а не температуропроводности, которая, по существу, и определяет нестационарные тепловые процессы. Кроме того, показания компаратора должны в значительной степени зависеть от контактного сопротивления, возникающего между металлическим шариком и образцом, что не позволяет применять этот метод для тонких слоев. Сам автор проводил измерения на образцах не тоньше одного дюйма.

В заключение остановимся на вопросе о теплопроводности тонких слоев при высоких температурах, когда существенный вклад в перенос энергии вносят фотонные процессы. В работах [5, 11] введено понятие эффективной теплопроводности $\lambda_{эф} = \lambda_k + \lambda_n$, обусловленной кондуктивным λ_k и лучистым λ_n переносом энергии. Таким образом, вклад излучения оценивается в предположении выполнимости закона Фурье, который справедлив лишь для кондуктивного теплообмена. Правильная оценка может быть произведена лишь из уравнения для совместного лучисто-кондуктивного теплообмена в слое при известных оптических свойствах вещества*.

Выводы

1. Теплопроводность тонких слоев веществ отличается от теплопроводности массивных образцов из этих же веществ.
2. При измерении теплопроводности основными являются следующие источники погрешностей:
 - а) термическое сопротивление на границе слоя с термодатчиком или с элементом, обеспечивающим заданные граничные условия;
 - б) термическое сопротивление границы раздела слой—подложка;
 - в) искажение температурного поля слоя термодатчиком при контактном методе измерения температуры;
 - г) измерение очень малых перепадов температур по толщине слоя;
 - д) фотонные процессы, оказывающие существенное влияние на перенос энергии через слой при высоких температурах.
3. Все известные методы не учитывают те или иные источники погрешностей, поэтому оцениваемые авторами значения их занижены, а результаты чаще всего носят качественный характер.
4. Большинство существующих методов предназначено для измерения слоев малой теплопроводности ($\lambda \leq 1 \text{ вт/м} \cdot \text{град}$) и большой толщины ($\delta \geq 200 \text{ мкм}$).
5. В настоящее время нет методов, которые можно было бы рекомендовать в качестве стандартных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бензен-Спирidonov В. А. Измерение теплопроводности тонких пластин и пленок. «Заводская лаборатория», 1966, т. XXXII, № 4.
2. Филиппов Л. П., Симонова Ю. Н. Измерение теплопроводности металлов при высоких температурах. II. Методика измерения теплопроводности. «Теплофизика высоких температур», 1964, т. 2, № 2.
3. Кременчугский Л. С., Лысенко В. С., Мальнев А. Ф., Ройцина О. В. Определение толщины, теплоемкости и теплопроводности тонких пленок малых размеров. «Инженерно-физический журнал», 1964, т. VII, № 2.

* Стр. 119

4. Шульман А. Р., Федоров В. Н., Шепсенов М. А. Теплопроводность окиси алюминия при высоких температурах. «Журнал технической физики», 1952, т. XXII, вып. 8.
5. Жоров Г. А., Ковалев А. Н., Сивакова Е. В. Теплопроводность и степень черноты покрытия из окиси алюминия при высоких температурах. «Теплофизика высоких температур», 1966, т. IV, № 5.
6. Jerald L. Bliton and Harold L. Rechter, «The American Ceramic Society Bulletin», november, 1961.
7. Powell R. W., «British journal of applied physics», 1954 v. 5, № 9.
8. Pengelly A. E., «British journal of applied physics», 1955 v. 6, № 1.
9. Surplise N. A. and Jones R. P., «British journal of applied physics», 1963, v. 14, № 10.
10. Зингерман Я. П. О теплопроводности оксидного катода. «Украинский физический журнал», 1956, т. 1, № 3.
11. Чудновский Ф. А. Исследование коэффициента теплопроводности оксидных покрытий катодов. «Инженерно-физический журнал», 1966, т. X, № 1.
12. Мойжес Б. Я., Петров И. Н. Измерение теплопроводности оксидного покрытия при рабочей температуре катода. «Радиотехника и электроника», 1966, т. XI, № 9.
13. Каргин В. А., Слоимский Г. Л., Липатов Ю. С. Распространение тепла в ориентированных полимерах. Доклады АН СССР, 1955; т. 104, № 1.
14. Новиченок Л. Н. Разработка методов определения теплофизических характеристик тонких изоляционных слоев и покрытий. Сб. «Тепло-и массообмен в капиллярно-пористых телах», АН СССР, Минск, «Наука и техника», 1965.
15. Волькенштейн В. С. Метод определения термических характеристик материалов. «Журнал технической физики», 1954, т. XXIV, вып. 2.
16. Вержинская А. Б. Исследование теплофизических характеристик материалов в форме пластин и покрытий методом источника постоянной мощности. «Инженерно-физический журнал», 1964, т. VII, № 4.
17. Азизов А. М. Теоретические основы методики определения теплофизических характеристик пленочных термодатчиков. «Теплофизика высоких температур», 1965, т. III, № 5.
18. Поляков Ю. А. Применение пленочных датчиков при изучении теплообмена в диссоциированном потоке газа. Сб. «Физическая газодинамика, теплообмен и термодинамика газов высоких температур». М., Изд. АН СССР, 1962.
19. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., Изд. «Высшая школа», 1967.
20. Сухарева Л. А., Воронков В. В., Зубков П. И. Исследование теплофизических характеристик полимерных покрытий. «Инженерно-физический журнал», 1965, т. IX, № 2.
21. Powell R. W. «Journal of Scientific instruments», 1957, v. 34, № 12.
22. Смирнов Е. В., Мучник Г. Ф., Шкляревский Е. Е. Определение коэффициента теплопроводности напыленных слоев металлов. «Теплофизика высоких температур», 1967, т. V, № 3.

Поступила в редакцию
8. II. 1968 г.

III. МЕТОДИКИ ИЗМЕРЕНИЙ. ПРИБОРЫ

УДК 536.62.089.6

Г. А. НОВИКОВ, Б. Н. ОЛЕЙНИК, С. В. ПАСЕНКО,
О. А. СЕРГЕЕВ, В. С. УСКОВ

ВНИИМ

МЕТОДИКА ПОВЕРКИ ГАЗОВЫХ КАЛОРИМЕТРОВ

В СССР постоянно увеличивается производство и потребление газообразного топлива. Так, в 1966 г. добыча газа составляла 160 млрд. м³, а к 1970 г. она возрастет до 240 млрд. м³ в год. При таких масштабах добычи и потребления газа даже один процент неучтенного газообразного топлива эквивалентен потере для государства около 10 млн. руб. ежегодно. На многих ТЭЦ и других предприятиях, где стоимость газообразного топлива составляет основную часть всех расходов, при оценке качества топлива и регулирования процесса его сжигания применяют газовые калориметры фирмы «Юнкалор» (ГДР). Количество теплоты, выделяющееся при сгорании газа и измеренное автоматическим калориметром, служит основой для расчета его стоимости, так как оплата поставщику производится по фактической калорийности топлива. Однако количество теплоты, измеренное поставщиком и потребителем, оказывается различным, причем эта разность часто превышает погрешность калориметра, определяемую фирмой «Юнкалор» в 3%. Причина такого расхождения заключается в отсутствии единства измерений теплоты сгорания газа.

Фирма «Юнкалор» рекомендует поверять автоматические газовые калориметры двумя методами — сжигая в калориметре чистые газы (например, водород или метан) с известной теплотой сгорания или используя в качестве образцового прибора такой же калориметр, но с отключенной автоматикой. Первый метод не может быть принят, так как он требует разработки методики получения, аттестации и применения образцовых газов. От второго метода также приходится отказаться, так как калориметр с отключенной автоматикой не отвечает требованиям, предъявляемым к образцовому прибору. У образцового прибора систематическая погрешность измерения должна быть значительно меньше случайной, а случайная погрешность должна быть примерно в три раза меньше случайной погрешности поверяемого прибора. Газовый калориметр с отключенной автоматикой не удовлетворяет первому требованию, так как выполненные с его помощью измерения содержат такие же неизвестные по величине систематические погрешности, как и у поверяемого калориметра. Условно обозначим эти погрешности Δ_x , Δ_y и Δ_z . Погрешность Δ_x возникает из-за неучитываемого теплообмена между оболочкой калориметра и окружающей средой. Погрешность Δ_y связана с излучением факела пламени и газовой горелки вдоль ее канала, неомываемого водой. Источником погрешности Δ_z является неучитываемая теплота реакций образования и растворения серной, азотной и угольной кислот, а также других веществ.

Наиболее существенной является систематическая погрешность Δ_x , так как калориметры фирмы «Юнкалор» не имеют защитной оболочки, которая исключала бы влияние изменения теплообмена, вызываемого значительными колебаниями температуры помещения в различное время года и суток. При этом в зависимости от условий погрешность Δ_x может быть различной не только по величине, но и по знаку.

Чтобы конкретизировать требования к случайной погрешности образцового калориметра, был проведен анализ погрешностей поверяемых автоматических газовых калориметров. Случайная погрешность измерения теплоты сгорания газа автоматическим газовым калориметром равна

$$\delta = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^6 \delta_i^2}$$

где δ_1 и δ_2 — погрешности измерения ртутно-стеклянными термометрами с ценой деления 0,5 град при определении температуры соответственно сжигаемого ($\pm 0,05\%$) и «дымовых» ($\pm 0,04\%$) газов;

δ_3 — погрешность измерения водяным манометром разности между давлением сжигаемого газа и атмосферным ($\pm 0,03\%$);

δ_4 — погрешность измерений газомером и водомером ($\pm 1,0\%$);

δ_5 — погрешность измерения разности температур холодной и нагретой воды ($\pm 1,0\%$);

δ_6 — погрешность корректора, приводящего результаты измерения к условиям 0° С и 760 мм рт. ст. ($\pm 1,0\%$).

Подставив в формулу значения δ_i для поверяемого прибора, получим δ , равное 1,7%. Следовательно, случайная погрешность образцового прибора не должна превышать 0,6%, если ставится задача использовать все возможности автоматических газовых калориметров фирмы «Юнкалор», и не должна быть выше 1,0%, если требуется обеспечить точность прибора, гарантируемую фирмой (3%). Кроме того, необходимо, чтобы метод поверки был прост и соответствовал метрологической практике поверки калориметров сжигания.

Всем перечисленным требованиям удовлетворяет метод поверки автоматических газовых калориметров с помощью бомбовых калориметров. В настоящей работе в качестве образцового прибора был использован бомбовый калориметр ВНИИМ типа В-08*, обычно применяемый для измерения теплоты сгорания твердого топлива. То, что калориметр В-08 имеет термостатированную оболочку и поверяется с помощью образцового вещества — бензойной кислоты [1], позволяет исключить все (поддающиеся и неподдающиеся учету) систематические погрешности. Тепловой эквивалент (фактическая теплоемкость) бомбового калориметра и теплота сгорания газа были определены в соответствии с ГОСТ [2].

С помощью бомбовых калориметров в котельном цехе Краснодарской ТЭЦ были поверены два автоматических газовых калориметра фирмы «Юнкалор» № 45/1029 и 45/0014 выпуска 1965 г. Калориметры включали параллельно в газопроводы газораспределительных станций ГРС-2 и ГРС-4. Согласно паспорту, оба прибора градуированы фирмой путем сжигания газов с теплотой сгорания соответственно 3465 и 3643 ккал/м³**.

* Стр. 62

** В статье использована внесистемная единица ккал, так как поверяемый калориметр дает показания именно в этих единицах.

Таблица 1

Масса бензойной кислоты, г	Подъем температуры калориметра, град	Поправка		Тепловой эквивалент дж/град	Отклонение от среднего, дж/град
		на теплообмен, град	на образование азотной кислоты, дж		
0,9939	1,838	0,0138	15	14 450	-6,2
0,9933	1,837	0,0136	12	14 421	+22,2
0,9950	1,835	0,0098	11	14 432	+11,2
0,9950	1,828	0,0092	11	14 472	-28,8
0,9940	1,835	0,0128	11	14 441	+2,2
				Среднее	+14
				14 443	(±0,1%)

Измерение теплового эквивалента образцового калориметра, а также сжигание газа в нем производили при температуре воды в оболочке на 2—3 град выше температуры окружающей среды. Результаты этих измерений представлены в табл. 1. Как видно из таблицы, погрешность измерения теплового эквивалента образцовым калориметром типа В-08 составляет $\pm 0,1\%$.

В отличие от прежних опытов при измерении теплоты сгорания газа в бомбу не вносили воду (4 г) и удаляли чашечку из нержавеющей стали. В результате этого тепловой эквивалент уменьшался на 8,4 дж/град.

Бомбу наполняли горючим газом из двух специальных газопроводов общей длиной около 100 м, подведенных к химической лаборатории ТЭЦ от линии, параллельной автоматическим калориметрам. Предварительно каждую линию газопровода продували в атмосферу в течение 1 ч, чтобы получить газ, аналогичный подаваемому к автоматическим калориметрам.

В начале и в конце заполнения бомбы газом измеряли теплоту его сгорания Q_n автоматическим газовым калориметром.

Заполнив бомбу газом при давлении, равном атмосферному, и добавив в нее кислород при давлении 8 атм*, сжигали газ в образцовом калориметре. При расчете вводили поправку на теплоту образования и растворения азотной кислоты (ионов SO_4 в смыве бомбы не оказалось), а также на приведение теплоты сгорания газа к значению при постоянном давлении. Затем рассчитывали теплоту сгорания газа Q_6 . Каждый калориметр проверяли в течение двух дней, ежедневно выполняя по два измерения. Данные табл. 2 показывают, что точность измерения теплоты сгорания газа образцовым бомбовым калориметром соответствует ГОСТ 10062—62, так как разность двух последовательных измерений не превышает 40 ккал/м³, или 0,4%. Это значение разности указывает на то, что состав газа, подаваемого на автоматические газовые калориметры, во время проверки оставался неизменным. Как видно из табл. 2, оба проверяемых газовых калориметра показывали завышенные значения теплоты сгорания газа.

Описанная методика может быть предложена для проверки автоматических газовых калориметров. Необходимую частоту проверок можно окончательно установить только после накопления промышленностью соответствующего опыта. С частотой проверок и условиями эксплуатации автоматических газовых калориметров связан вопрос об их точности изме-

* Это значение подобрано экспериментально. Превышение его может привести к взрыву газа в бомбе.

Таблица 2

Номер калориметра	Теплота сгорания газа, измере- мая калориметрами, ккал/м ³		Погрешность калориметра	
	автоматическим, Q_a	бомбовым, Q_b	$Q_a - Q_b$, ккал/м ³	$\frac{Q_a - Q_b}{Q_a} \cdot 100$, %
45/1029	9250	9120	130	1,3
	9200	9100	100	1,1
	9200	9130	70	0,7
	9200	9090	110	1,2
45/0014	9450	9440	10	0,1
	9500	9470	30	0,4
	9450	9430	20	0,2
	9450	9420	30	0,3

Примечание. Цена деления шкалы автоматического калориметра 50 ккал/м³.

рений, так как указанную погрешность в 1,7% можно получить только в случае, если условия теплообмена меняются не слишком резко и поверки производятся достаточно часто. На первом этапе внедрения методики целесообразно, по-видимому, оценивать погрешность измерения автоматическими калориметрами в 3%, как это рекомендует фирма «Юнкалор», а поверки производить не реже четырех раз в год (имеется в виду, что в промежутках между поверками приборы не ремонтировали, не перемещали и т. п.).

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 10440—63 — Кислота бензойная для калориметрических определений. М.—Л., Стандартгиз, 1964.
2. ГОСТ 10062—62 — Газы горючие, природные и покупные. Метод ВТИ определения теплоты сгорания сжиганием в калориметрической бомбе. М.—Л., Стандартгиз, 1962.

Поступила в редакцию
8/II 1968 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО $\alpha\lambda$ -КАЛОРИМЕТРА ЛИТМО

Динамический $\alpha\lambda$ -калориметр разработан проблемной лабораторией кафедры теплофизики ЛИТМО на основе широкотемпературных испытаний в режиме монотонного разогрева [1, 2, 3]. Он предназначен для измерения температурной зависимости температуропроводности α и теплопроводности λ твердых материалов с $\lambda = 0,2 \div 5 \text{ вт/м} \cdot \text{град}$ в интервале температур от -80 до $+400^\circ \text{C}$.

Прибор (рис. 1) состоит из двух калориметрических устройств 1 и 2 и пульта управления 3. Для измерения теплопроводности служит λ -калориметр 1, а температуропроводности α -калориметр 2. В комплект прибора входят блок питания 5, гальванометр 4 и позиционный регулятор температуры (на рисунке не показан).

Теплопроводность измеряют на образцах диаметром 15 мм и толщиной $h = 0,5 \div 5 \text{ мм}$ в зависимости от теплопроводности материала и вычисляют по формуле

$$\lambda = \frac{h}{P} (1 - \beta \bar{t}). \quad (1)$$

Величины P и \bar{t} находят из выражений

$$P = \frac{C_c}{C_c + 0,5C} \cdot \frac{k_a n_{\text{обв}} \Delta \tau S}{\Delta E C_c} \left[1 + \frac{\lambda_n (S_c - S)}{\lambda' S} \right] - P_k \quad (2)$$

и

$$\bar{t} = t_c + \frac{1}{2} k_t k_a n_{\text{обв}}. \quad (3)$$

В формулах (1—3) введены следующие обозначения:

- β — коэффициент линейного расширения, $1/\text{град}$;
- C_c — теплоемкость стержня при температуре t_c , дж/град ;
- C — ориентировочное значение теплоемкости образца при 20°C по справочным данным, дж/град ;
- k_a — чувствительность гальванометра, мв/дел ;
- k_t — крутизна градуировки термопары, град/мв ;
- $n_{\text{обв}}$ — перепад температуры на образце в делениях шкалы гальванометра;
- $\Delta E = 0,2 \text{ мв}$ — постоянное малое приращение э. д. с. термопары, обеспечиваемое прибором;
- $\Delta \tau$ — время, за которое изменяется э. д. с. на $0,2 \text{ мв}$ (измеряется в опыте), сек ;

S и S_c — площадь поперечного сечения образца и стержня;
 λ_p — теплопроводность воздуха;
 λ' — теплопроводность образца, определяемая по формулам (1) и (2) при $S_c = S$;
 P_k — величина, определяемая из предварительного градуировочного опыта, когда образец изготовлен из меди, $\text{м}^2 \text{град/вт}$.
 Значение P_k рассчитывают при этом по формуле

$$P_k = \frac{k_{\text{меди}} \Delta \tau S}{(C_c + 0,5C) \Delta E}$$

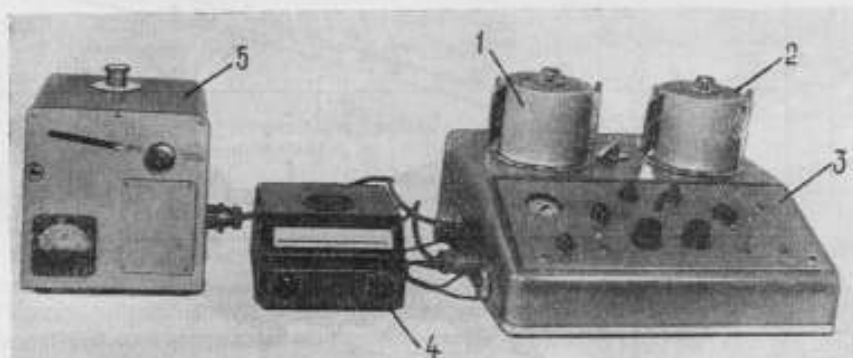


Рис. 1. Общий вид динамического α -калориметра.

1 и 2 — калориметрические устройства для измерения теплопроводности и температуропроводности соответственно; 3 — пульт управления; 4 — гальванометр; 5 — блок питания.

Температуропроводность измеряют на образцах диаметром 15 мм и толщиной 6—10 мм, определяя временные отставания τ_1 и τ_2 температуры центра образца от температуры его поверхностей. Расчет производят по формуле

$$a = \frac{h^2}{(\tau_2 + \tau_1) - \tau_0} (1 - \sigma_a),$$

где

$$\sigma_a = \frac{5}{6} \cdot \frac{h^2 \alpha}{R \lambda};$$

$$h = h_0 (1 + \beta t);$$

τ_0 — поправка, определяемая при градуировании прибора на медном образце;

R — радиус образца;

λ — его теплопроводность;

α — коэффициент теплоотдачи, определяемый расчетным путем;

h_0 — толщина образца при комнатной температуре.

Испытания прибора проводили на двух опытных образцах № 6501 и 6503. Они состояли из трех этапов: проверки соответствия деталей и узлов техническим условиям, климатических испытаний и определения погрешности измерения. Испытания показали полное соответствие деталей и узлов техническим условиям.

Динамический α -калориметр воспроизводит те же результаты после климатических испытаний в течение 48 ч при влажности 98% и в течение 4 ч при температурах -40 и $+60^\circ \text{C}$.

Исследуемый α -калориметр является первым широкотемпературным прибором для массовых измерений теплопроводности и температуропроводности

водности веществ. Испытания также проведены впервые, и их основная трудность заключается в определении погрешности измерений.

Для оценки погрешности $\alpha\lambda$ -калориметра измеряли температурную зависимость теплопроводности λ и температуропроводности α образцовых веществ — полиметилметакрилата, аттестованного ВНИИМ в интервале температур 20—80°С с погрешностью $\pm 3\%$ [4], и плавленного оптического кварца. В качестве стандартных были взяты значения теплопровод-

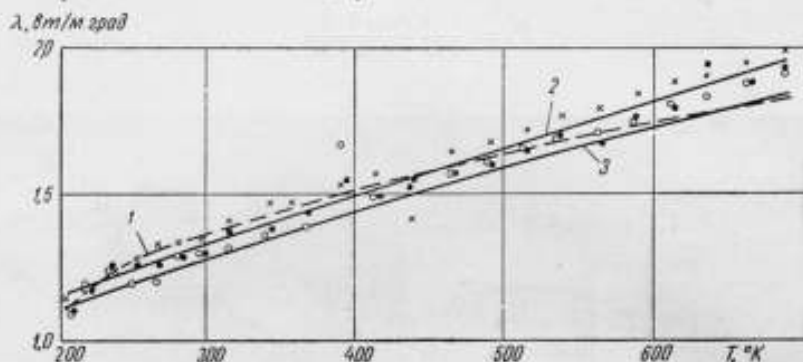


Рис. 2. Температурная зависимость теплопроводности плавленного оптического кварца.

1 — рекомендуемая кривая; 2 и 3 — результаты измерений на приборах № 6501 и 6503 соответственно.

ности и температуропроводности плавленного кварца, полученные на основании анализа надежности литературных данных*.

В интервале от -80 до $+400^\circ\text{C}$ α и λ измеряли при 23 значениях температуры, трижды для обоих приборов, так что результаты представляли собой кривые температурной зависимости α или λ , построенные по 69 точкам каждая.

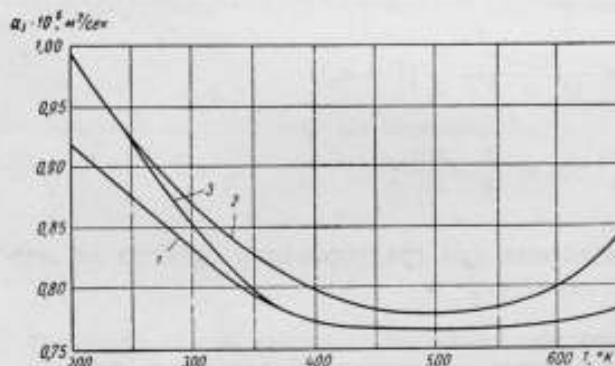


Рис. 3. Температурная зависимость температуропроводности плавленного оптического кварца.

1 — рекомендуемая кривая; 2 и 3 — результаты измерений на приборах № 6501 и 6503 соответственно.

На рис. 2 представлены результаты измерения теплопроводности кварца на приборах № 6501 (кривая 2) и 6503 (кривая 3). Кривые 2 и 3 получены методом наименьших квадратов и выражаются в исследуемом интервале температур эмпирическими зависимостями: $\lambda = 0,791 + 1,851 \cdot 10^{-3}T - 3,207 \cdot T^2$ и $\lambda = 0,750 + 1,896 \cdot 10^{-3}T - 5,247 \cdot 10^{-7}T^2$ для приборов № 6501 и 6503 соответственно (T — температура в $^\circ\text{K}$).

Среднеквадратическая погрешность измерения для прибора № 6501 составляла $\pm 4,5\%$, а для прибора № 6503 — $\pm 3,8\%$. (Среднеквадратические погрешности результатов соответственно были $\pm 0,5$ и $\pm 0,4\%$).

* Стр. 151.

На рис. 2 приведена рекомендуемая для плавленого кварца кривая 1 и экспериментальные точки трех измерений кривой 2. Как видно, наблюдаются систематические отклонения данных, полученных с помощью испытываемых приборов, от рекомендуемой кривой 1. Максимальное значение отклонений для кривой 2 равно 6,5%, а для кривой 3 — 7%. Отношение максимальной систематической погрешности (7%) к среднеквадратической погрешности результата (0,5%) равно 14, поэтому основными для испытываемых приборов являются систематические погрешности [5].

Результаты измерения температуропроводности плавленого оптического кварца (рис. 3) и теплопроводности полиметил-

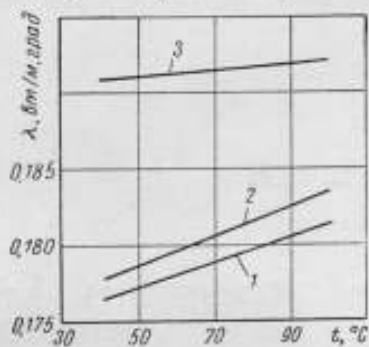


Рис. 4. Температурная зависимость теплопроводности полиметилметакрилата.

1 — результат аттестации полиметилметакрилата во ВНИИМ [4]; 2 и 3 — результаты измерения на приборах № 6501 и 6503 соответственно.

метакрилата (рис. 4) показали, что максимальная систематическая погрешность составляет 8% на каждом приборе.

Таким образом, погрешность измерения теплопроводности и температуропроводности динамическим α -калориметром равна $\pm 8\%$ во всем интервале температур.

Динамический α -калориметр рекомендован к серийному производству.

ЛИТЕРАТУРА

1. Платунов Е. С. Метод скоростного измерения температуропроводности теплоизоляционных и полупроводниковых материалов в широком диапазоне температур. Известия вузов СССР, «Приборостроение», 1961, № 1.
2. Платунов Е. С. Метод скоростных измерений теплопроводности и теплоемкости материалов в широком интервале температур. Известия вузов СССР, «Приборостроение», 1961, № 4.
3. Курепин В. В., Платунов Е. С. Прибор для скоростных широкотемпературных испытаний теплоизоляционных и полупроводниковых материалов. Известия вузов СССР, «Приборостроение», 1961, № 5.
4. Кириченко Ю. А., Олейник Б. Н., Чадович Т. З. Полиметилметакрилат — образцовое вещество для теплофизических испытаний. «Труды институтов Комитета», вып. 84 (144). М.—Л., изд. стандартов, 1966.
5. Долинский Е. Ф., Кремлевский П. П., Широков К. П. Составление и оценка точности стандартных справочных данных. «Измерительная техника», 1967, № 12.

Поступила в редакцию
1. III 1968 г.

КАЛОРИМЕТРЫ ДЛЯ СТАНДАРТНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ ТЕПЛОТЫ СГОРАНИЯ ВЕЩЕСТВ

Для определения теплоты сгорания различных топлив или при предварительных испытаниях вновь синтезированных веществ чаще всего используют простые, удобные и надежные в эксплуатации калориметры, погрешность которых не превышает 0,1%. Пониженные требования к точности этих приборов по сравнению с требованиями к прецизионным калориметрам, погрешность которых находится в пределах 0,01—0,03%, диктуются неоднородностью состава исследуемого продукта, невысокой чистотой вещества или сложностью методики его сжигания и химического анализа продуктов сгорания, а иногда и всеми этими факторами, вместе взятыми.

С целью стандартизации измерений теплоты сгорания продуктов с погрешностью 0,1% во ВНИИМ на основе ранее созданных прецизионных калориметров [1—2] разработано два варианта калориметра, условно обозначенные В-08 и В-09. Эти жидкостные калориметры классического типа рассчитаны на измерение количества теплоты, близкого к теплоте сгорания 1 г бензойной кислоты.

В обоих калориметрах выдержаны стандартные соотношения между внутренним объемом бомбы и массой сжигаемого образцового вещества. Тепловые эквиваленты калориметров типа В-08 и В-09 равны соответственно 15,0 и 13,5 кдж/град.

Внешний вид калориметра типа В-08 показан на рис. 1. Калориметр представляет собой прибор, в котором совмещены калориметрическая система и пульт управления. Последний размещен в основании калориметра. Калориметрическая система (рис. 2) состоит из оболочки 1, сосуда 2 и бомбы 3. Сосуд емкостью 3,4 дм³ имеет вытянутую в поперечном сечении форму и изготовлен из латуни толщиной 1 мм. Крышка сосуда, припаянная к его стенкам, имеет отверстия для термометра, оси мешалки и круглой съемной крышки. Нагреватель сосуда 4, сопротивление которого 60 ом, а потребляемая мощность 20 Вт, предназначен для предварительного подогрева воды от комнатной до начальной температуры опыта. Нагреватель состоит из двух раздвинутых по оси фторопластовых колец, жестко скрепленных друг с другом. Натянутая между ними манганиновая проволока образует цилиндр, который охватывает мешалку сосуда 5. Мешалка имеет две крыльчатки, лопасти которой отогнуты под углом 30°.

Она вмонтирована в крышку сосуда и не вынимается из него. Ось мешалки выведена наружу и на верхней ее части укреплено зубчатое колесо *б*. Мешалку вращает синхронный электродвигатель СД-54, установленный на крышке оболочки, через винтозубчатую передачу со скоростью 240 об/мин.

Для сжигания веществ предусмотрены две бомбы с внутренним объемом 0,3 дм³ каждая. Одна бомба уплотняется от руки поворотом крышки с головкой под ключ и служит для сжигания газообразных продуктов при небольших давлениях или твердых продуктов при пониженном давлении газа. Клапаны для впуска и выпуска газов находятся в верхней части бомбы. Вторая бомба самоуплотняющегося типа предназначена для сжигания твердых или жидких веществ в кислороде. Она менее массивна, чем первая, входной и выходной клапаны находятся в нижней части. Обе бомбы при установлении в сосуде строго фиксируют: их ножки вставляют в подставку, прикрепленную к дну сосуда. Бомбы изготовлены из нержавеющей стали марки 1Х18Н9Т, входной и выходной клапаны выполнены из стали марки 4Х13 и закалены.

Калориметрический сосуд защищен от воздействия окружающей среды оболочкой *1*. Его устанавливают на теплоизоляционную подставку на дне гнезда оболочки так, что между стенками сосуда и гнезда сохраняется равномерный зазор в 1 см. Оболочка заполняется дистиллированной водой, которая нагревается до заданной температуры нагревателем *15* (сопротивление 100 ом, мощность 480 вт) и перемешивается винтовой мешалкой. Последняя вращается вертикально установленным электродвигателем *7* со скоростью 800 об/мин. При перегреве воды в оболочке ее можно охладить, пропуская холодную воду через змеевик *14*. Оболочка закрывается винипластовой крышкой *12*, а гнездо ее — съемной винипластовой крышкой *11*. На съемной крышке установлен электродвигатель, вращающий мешалку сосуда, и термометр *13*, а на крышке оболочки — электродвигатель к мешалке оболочки, держатель термометра и панель с клеммами для проводов. В оболочке предусмотрены также штуцеры, позволяющие присоединять оболочку к термостату. Показания ртутного метастатического термометра с ценой деления 0,01 град снимают с помощью отсчетного устройства *8*, в тубус которого с одного конца вмонтирована лупа, а с другого — осветитель. В отверстие тубуса между лупой и осветителем вставляется термометр, его шкала рассматривается через лупу

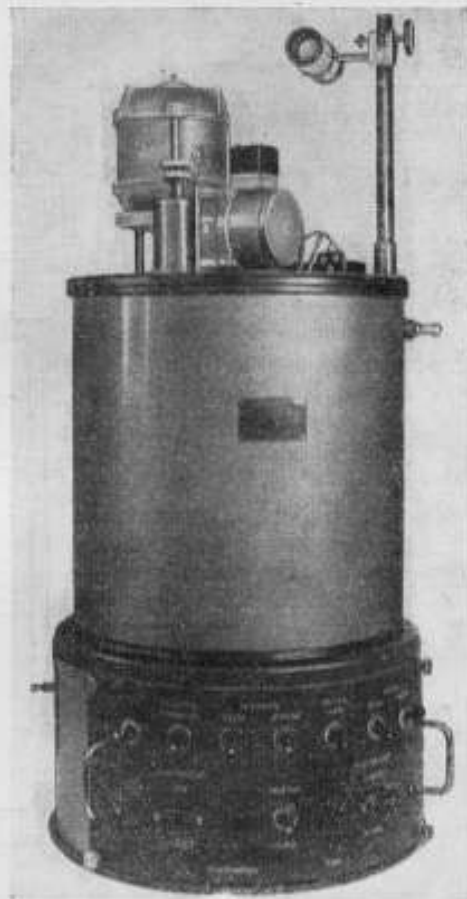


Рис. 1. Калориметр В-08.

на просвет. Осветитель состоит из лампы мощностью 1,8 *вт* и линзы, направляющей на термометр параллельный пучок света. Отсчетное устройство передвигается вдоль термометра по рейке, укрепленной на стойке 10. Вместе с ним передвигается вибратор 9, в качестве которого используется реле типа РП-2. При замыкании цепи питания реле его якорь постукивает по термометру и встряхивает его.

В пульте управления калориметра находится устройство для подачи сигналов времени (через 30 сек) и периодического включения вибратора.

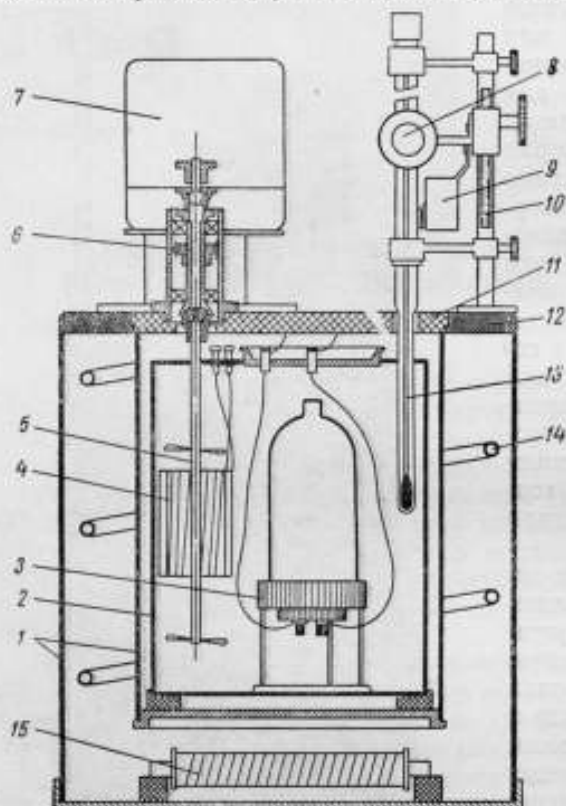


Рис. 2. Принципиальная схема калориметра В-08.

Устройство выполнено на основе синхронного электродвигателя СД-2. На его корпусе укреплен диск с контактами, к которым подведены концы цепи звонка и вибратора, а на ось надета медная пластинка, замыкающая контакты на диске. На передней панели пульта размещены тумблеры выключателей в цепи электродвигателей, осветителя, зажигания и нагревателей. Предусмотрено также включение цепи зажигания с помощью выносной кнопки.

Погрешность градуировки калориметров по бензойной кислоте оценивали по среднеквадратической ошибке результата. Температуру воды в сосуде измеряли метастатическим термометром. Опыты проводили при начальной температуре воды в сосуде 25,2° С и в оболочке 28° С.

Температура воды в сосуде повышалась за время опыта

приблизительно на 2 град, а в оболочке понижалась на 0,2 град за счет теплообмена с окружающей средой. Поправку на теплообмен калориметрического сосуда с окружающей средой рассчитывали по формуле Шукарева.

Для двух калориметров В-08 погрешность градуировки оказалась равной 0,05%.

В калориметре типа В-09 отсутствуют нагреватель, мешалка и холодильник в оболочке, а также вибратор к термометру. В остальном он повторяет конструкцию калориметра В-08.

Калориметр В-09 рекомендуется для массовых определений теплоты сгорания топливных продуктов, при которых необходимо предельно сократить время подготовки опыта, даже за счет некоторой потери точности измерений. Экономия времени при подготовке опыта обеспечивается следующим образом. Самоуплотняющуюся бомбу (с клапанами в нижней части) привинчивают к съемной крышке сосуда и вместе с ней помещают в сосуд, что значительно ускоряет сборку калориметра.

Кроме того, ось мешалки сосуда строго зафиксирована в подшипнике, смонтированном в крышку сосуда, и соединение ее с валом, передающим вращение от электродвигателя, производится одновременно с установкой съемной крышки гнезда на калориметр. Дополнительного времени на присоединение мешалки к валу и фиксацию ее не требуется.

Погрешность градуировки двух калориметров В-09 определена в 0,07%. Опыты производили при аналогичных условиях, но температуру оболочки калориметра перед опытами не приводили к одному значению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Микина В. Д., Олейник Б. Н. Калориметры ВНИИМ для определения теплоты сгорания органических веществ. «Труды институтов Комитета», вып. 84 (194). М.—Л., изд. стандартов, 1966.
2. Микина В. Д., Олейник Б. Н. Образцовая калориметрическая установка ВНИИМ. Сб. «Новые измерительные приборы и методы их поверки», вып. 16. М.—Л., Стандартгиз, 1963.

Поступила в редакцию
27/III 1968 г.

МАССИВНЫЕ КАЛОРИМЕТРЫ СЖИГАНИЯ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ МАЛЫХ ТЕПЛОВЫХ ЭФФЕКТОВ

В калориметрии сжигания в последнее десятилетие наблюдается тенденция к уменьшению теплоемкости калориметрической системы, вызванная необходимостью измерять малые тепловые эффекты сгорания веществ. Такая необходимость появляется в том случае, когда изучаемые вещества имеют малую удельную теплоту сгорания, либо (что чаще бывает) получены в небольшом количестве, дорого стоят и сжигаются малыми дозами (иногда по несколько миллиграммов). Тепловой эффект от сгорания вещества в таких случаях в десятки и сотни раз меньше того количества теплоты, которое обычно измеряется в калориметрии сжигания (20—30 кдж). Если эти эффекты измерять с помощью стандартных калориметров, то возрастет относительная погрешность измерения температуры, а следовательно, и погрешность определения теплового эффекта. Чтобы уменьшить ее, создают калориметры с малой теплоемкостью — обычные (массивные или жидкостные) и микрокалориметры типа Кальве, в которых выделившаяся теплота измеряется методом компенсации за счет эффекта Пельтье. У известных калориметров [1—5] теплоемкость в 5—200 раз меньше, чем у стандартных.

Жидкостные и массивные калориметры с малой теплоемкостью обычно называют микрокалориметрами, или полумикрокалориметрами, хотя такое название справедливо только для калориметров типа Кальве, чувствительность которых составляет микроджоули [3] (в настоящей статье они не рассматриваются).

С уменьшением теплоемкости калориметров возрастает влияние таких побочных тепловых процессов, как выделение теплоты на проволоке, служащей для зажигания, на чувствительном элементе термометра сопротивления, при перемешивании и т. д. Большая часть побочных тепловых эффектов свойственна жидкостным калориметрам, поэтому естественно, что при измерении малых тепловых эффектов предпочтение отдают массивным калориметрам. Интересно сравнить результаты измерений малых тепловых эффектов жидкостными и массивными калориметрами. Если погрешность градуировки жидкостных калориметров, рассчитанных на сжигание 200—250 [1] и 110 мг [5] бензойной кислоты, равна соответственно 0,06—0,08 и 0,08%, то у массивного калориметра [4], рассчитанного на сжигание приблизительно такой же навески бензойной кислоты (130 мг), она равна 0,025%. Массивный калориметр Мэйкла и О'Хари [2] градуируется с погрешностью 0,05% при сжигании 5 мг бензойной кислоты.

В существующих конструкциях массивных калориметров применяют бомбы цилиндрической формы, которые помещают в металлические блоки цилиндрической или шаровой формы. Теплоту исследуемого процесса, которая передается бомбе и металлическому блоку, измеряют по изменению температуры блока. Равномерное распределение теплоты в системе бомба—блок является необходимым условием калориметрических измерений. Оно зависит прежде всего от контактного теплового сопротивления между бомбой и блоком, которое можно свести к минимуму, притирая поверхности бомбы и блока друг к другу. Если бомба имеет цилиндрическую форму, то технологически трудно изготовить тщательно притертые друг к другу детали с минимальным зазором. В процессе работы и износа бомбы этот зазор увеличивается. Таким образом, одним из основных недостатков калориметров для измерения малых тепловых эффектов является неравномерность распределения теплоты в системе бомба—блок, связанная в конечном счете с применением бомб цилиндрической формы.

Во ВНИИМ разработано три варианта массивных калориметров, где указанный недостаток устранен. Калориметры различаются значениями тепловых эквивалентов (7,0; 2,3 и 1,1 кдж/град) и некоторыми конструктивными особенностями. Конструкция калориметров схематически представлена на рисунке. Наружная поверхность бомбы и внутренняя поверхность блока имеют коническую форму и притираются не с помощью отдельных притиров, а непосредственно друг к другу. Это обеспечивает их плотный контакт, который в процессе эксплуатации постоянно поддерживается за счет конической формы сопрягаемых поверхностей.

Обычно сразу после воспламенения сжигаемого вещества верхняя часть бомбы нагревается значительно больше, так как факел пламени направлен вверх. Чтобы устранить эту преимущественную направленность потока тепла вверх, бомба сделана составной. Для этого (см. рисунок) предусмотрен воздушный зазор между верхней частью корпуса бомбы 2 и вкладышем 1, ввинченным в коническую втулку 11. Материал, из которого выполнена втулка, подбирается так, чтобы обеспечить с материалом блока 5 притертые поверхности необходимого качества.

Рассмотрим один из калориметров с тепловым эквивалентом 2,3 кдж/град. Он градуируется по бензойной кислоте массой 0,2 г. Шаровидная форма блока 5 обеспечивает симметричность теплового поля, а минимальное отношение поверхности к объему уменьшает его теплообмен с окружающей средой. Блок выполнен из меди, его диаметр 110 мм, масса около 3 кг. Внутренний объем калориметрической бомбы, соответствующий стандартным условиям сжигания, составляет 63 см³. Бомба имеет клапаны 8 и 15 игольчатого типа со сменными наконечниками. Из-за малых размеров бомбы, в частности, из-за малого диаметра основания, выходной клапан 15 помещен в верхней ее части. Питание к одному электроду цепи зажигания подводится через корпус бомбы, а ко второму — через изолированный токоподвод 7.

В тело блока вмонтирован нагреватель для предварительного разогрева калориметрической системы до начальной температуры опыта. Чтобы обеспечить равномерный разогрев блока, нагреватель общим сопротивлением 9 ом выполнен в виде трех отдельных секций, вставленных в отверстия блока. Каждая секция изготовлена из нихромовой проволоки, заключенной в стеклянный чулок и намотанной на фарфоровую трубку.

Температуру калориметрической системы измеряют платиновым термометром сопротивления ($R_0 = 24 \text{ ом}$), вставленным в отверстие 4 блока. Чувствительный элемент термометра (платиновая проволока диаметром 0,05 мм, предварительно свитая в тонкую спираль) уложен бифилярно

на кварцевом геликоидальном каркасе. Каркас с чувствительным элементом вставлен в кварцевый герметичный защитный чехол. Для лучшего теплового контакта термометра сопротивления и нагревателя с блоком, отверстия, в которые они вставлены, заполнены маслом. Испарение масла предотвращает пробка, плотно надетая на термометр и притертая к блоку. Блок установлен в камере 10 на трех изоляционных опорах 9, заканчивающихся остриями. Камера герметично закрывается крышкой 14 с резиновой прокладкой 12. Внутренний диаметр камеры на 10 мм больше диа-

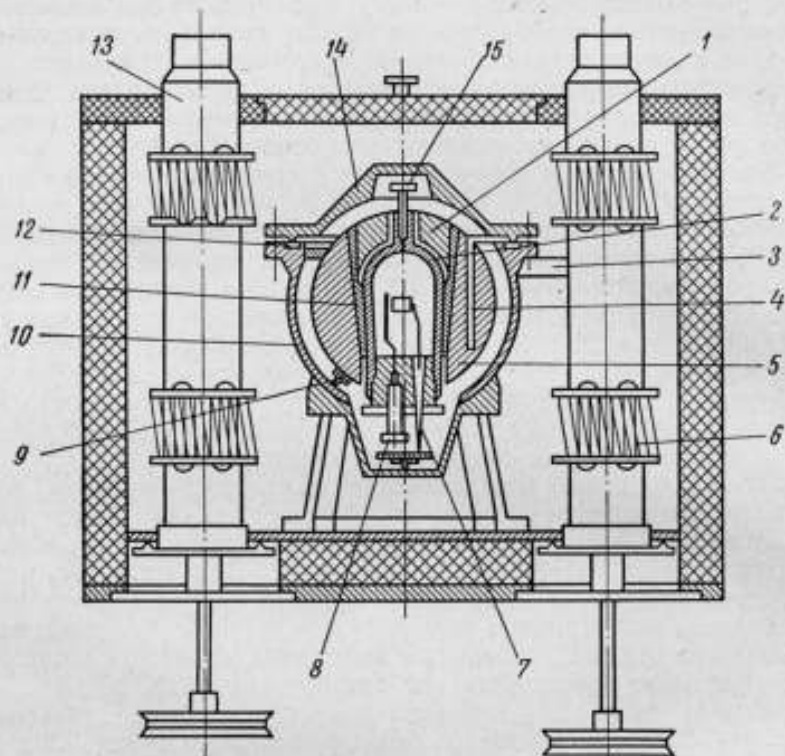


Рис. 1. Схема массивного калориметра сжигания для измерения малых тепловых эффектов.

метра блока. Для уменьшения теплового излучения внешняя поверхность массивного блока и внутренняя поверхность камеры покрыты хромом и тщательно отполированы.

Подводящие провода от нагревателя, термометра сопротивления и цепи зажигания выведены из камеры через герметичную трубку 3. Для стабилизации теплообмена калориметрической системы с окружающей средой калориметр защищен оболочкой, температура которой поддерживается на заданном уровне с точностью $\pm 0,001$ град [6]. Нагреватель оболочки 6 с сопротивлением 120 ом изготовлен из нихромовой проволоки и намотан на два каркаса, которые охватывают мешалки 13. Нагреватель рассчитан так, чтобы 25 л воды, находящейся в оболочке, за 20 мин нагреть от комнатной до температуры, при которой термостатируется оболочка, т. е. до $26,2^{\circ}\text{C}$.

Результаты определения теплового эквивалента калориметра, полученные путем сжигания бензойной кислоты марки К-1, аттестованной во ВНИИМ, приведены в таблице.

№ опыта	Масса, бензойной кислоты, г	Изменение температуры калориметра в опыте, град	Константа охлаждения калориметра, $10^5 \cdot \text{сек}^{-1}$	Поправка на теплообмен, град	Тепловой эквивалент калориметра, дж/град
1	0,20020	2,3318	8,06	0,0753	2272,03
2	0,20012	2,3311	8,10	0,0765	2271,58
3	0,20012	2,3319	8,06	0,0749	2270,86
4	0,20003	2,3293	7,96	0,0747	2272,35
5	0,20002	2,3291	8,10	0,0736	2272,44
					Среднее 2271,85

Продолжительность главного периода калориметрического опыта составляла 28, начального — 10 и конечного — 15 мин.

Среднеквадратическая погрешность отдельного измерения с помощью калориметра, рассчитанная по формуле $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (\Delta W_i)^2}{n-1}}$, равна $\pm 0,03\%$ (W — тепловой эквивалент калориметра).

Два других варианта массивных калориметров принципиально не отличаются от указанного выше, за исключением некоторых конструктивных элементов. Так, в бомбе наибольшего калориметра (тепловой эквивалент 7,0 кдж/град) входной и выходной клапаны расположены в нижней части, а в двух других, где площадь дна бомбы мала, выходной клапан расположен в верхней части. Нагреватель блока наименьшего калориметра (тепловой эквивалент 1,1 кдж/град) намотан непосредственно на поверхность блока по центру, а не на стержни, вставленные в отверстия в блоке, как это сделано в других калориметрах. Температуру измеряют с помощью термометрического моста, чувствительность которого равна $1 \cdot 10^{-4}$ град. Термометры во всех калориметрах при 0°C имеют номинальное сопротивление 24 ом. Погрешность градуировки калориметров с тепловыми эквивалентами 7,0 и 1,1 кдж/град составляет соответственно 0,03 и 0,05%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Roth W., Braunschweig R., Ginsberg H. und Lasser R. Zeitschrift für Elektrochemie № 17—18, 30, 1924, 417—420.
2. Mackle, O'Hare Symposium on Thermodyn. and Thermochem. Lund, Sweden, July, Sess. 1. 1963, 18—23.
3. Кальве Э., Прат А. Микрокалориметрия, М., ИИЛ, 1963.
4. Quitzsch, Schaffernicht, Geiseler L. Zeitschrift für physikalische chemie 223, 1963, Band. Heft 3/4.
5. Мирошниченко Е. А., Лейко В. П., Лебедев Ю. А. Полумикрокалориметр. ЖФХ, 1964, т. XXXVIII, № 4.
6. Микина В. Д., Олейник Б. Н. Калориметры ВНИИМ для определения теплоты сгорания органических веществ. «Труды институтов Комитета», вып. 84 (144), М.—Л., изд. стандартов, 1966.

Поступила в редакцию
27/III 1968 г.

УСТАНОВКА ДЛЯ ПОВЕРКИ И ГРАДУИРОВКИ ПЛОСКИХ ТЕПЛОМЕРОВ

Во ВНИИМ разработана установка типа УТП-1, позволяющая создавать и измерять плотность теплового потока в диапазоне от 0 до 1000 вт/м^2 с погрешностью $\pm 1\%$. Ее принципиальная схема показана на рис. 1. Тепловой поток создается основным нагревателем H_1 и с помощью дополнительных нагревателей H_2 и H_3 направляется через теплоотдающую поверхность медной платы 3.

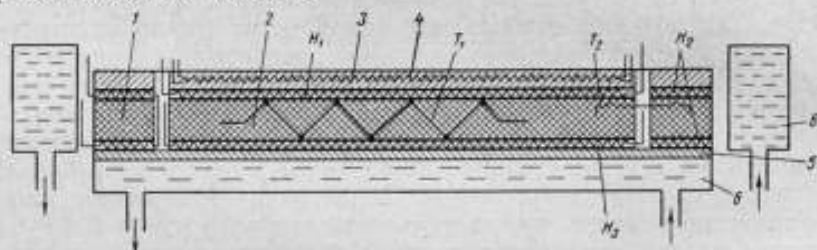


Рис. 1. Принципиальная схема установки УТП-1.

Дополнительные нагреватели монтируют на медной панели 5. Об отсутствии тепловых потерь в осевом и радиальном направлениях свидетельствуют нулевые разности температур соответственно на теплоизоляционных фторопластовых пластинках 2 и 1. Нулевую разность температур устанавливают с помощью дифференциальных термобатарей T_1 и T_2 , каждая из которых имеет 38 спаев, равномерно распределенных на всей поверхности пластинок 1, 2. Спаи крепятся клеем ФГ-9 к отдельным пластинкам из серебряной фольги, плотно прилегающим к фторопластовым пластинкам.

Контроль температуры рабочей поверхности установки (поверхность платы 3) осуществляют платиновым термометром сопротивления 4, изготовленным из проволоки диаметром 0,1 мм. Медная плата 3 имеет диаметр 300 мм и толщину 3 мм.

Блок теплового потока окружен водяной рубашкой 6, которая создает вокруг него постоянное температурное поле. Необходимая температура воды в рубашке достигается с помощью термостата ТС-15.

На рис. 2 приведена электрическая схема установки. Питание осуществляется от сети переменного тока 220 в. Напряжение от сети через стабилизатор ТСН-170 подается на первичную обмотку трансформатора Тр.

С вторичных обмоток трансформатора ток, предварительно выпрямленный селеновыми выпрямителями B_1 , B_2 и B_3 , подается на нагреватели H_1 (основной), H_2 и H_3 (дополнительные). Сопротивления R_1 , R_2 и R_3 служат для регулировки тока через нагреватели; A_1 и A_2 — амперметры типа ЛМ-70. Силу тока, протекающего через основной нагреватель H_1 , и напряжение на нем измеряют амперметром A и вольтметром V . Сопротивление термометра θ (см. рис. 1) измеряют с помощью термометрического моста УМТ-2, а э. д. с. термопары T_1 и T_2 — низкоомным гальванометром Γ типа ГПЗ-2 в.

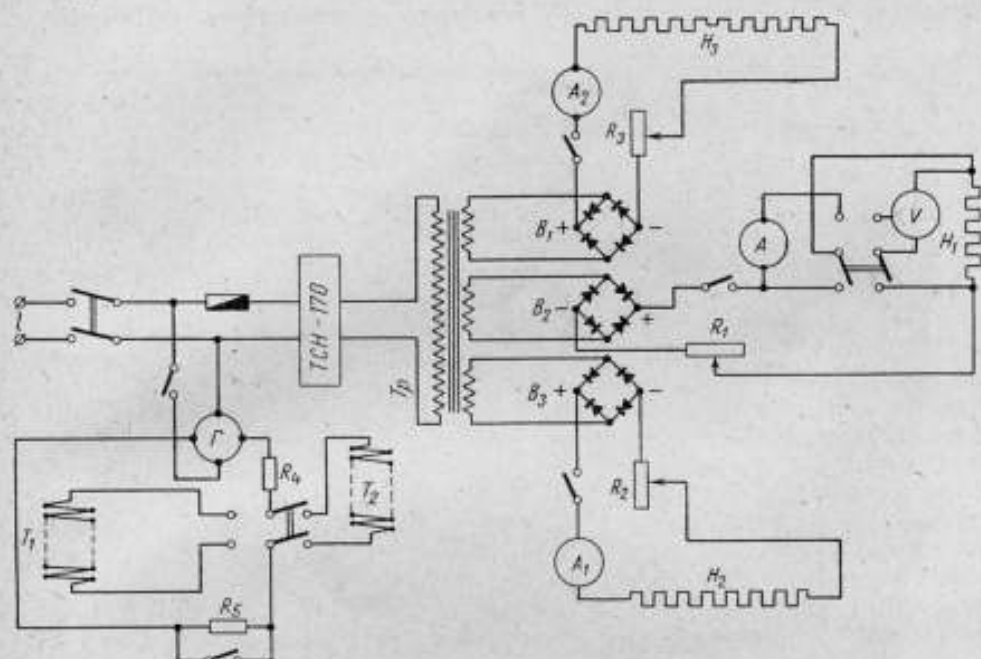


Рис. 2. Электрическая схема установки УТП-1.

Погрешность создания плотности теплового потока определяется погрешностью измерения теплового потока и потерями тепла за счет неточной компенсации.

Погрешность измерения теплового потока зависит от погрешностей измерения тока и напряжения основного нагревателя, а также от площади теплоотдающей поверхности платы θ . Она равна $3,5 \text{ вт/м}^2$ для середины шкалы УТП-1, что соответствует плотности теплового потока 500 вт/м^2 .

Погрешность, возникающая за счет неточной компенсации боковых потерь, зависит от потерь при теплопроводности и излучении в воздушном промежутке между основным блоком теплового потока и охранной системой. Эти потери не превышают $0,2 \text{ вт/м}^2$. Осевые потери теплового потока за счет неточной компенсации вычислены по закону Фурье для плоского слоя фторопластового изолятора (см. рис. 1) и составляют $0,5 \text{ вт/м}^2$.

Таким образом, относительная погрешность измерения плотности теплового потока (для значения 500 вт/м^2) составляет $\frac{\Delta q}{q} = (3,5 + 0,2 + 0,5) 500 \approx 1\%$.

Следовательно, суммарная погрешность определения не превышает 1% , что позволяет градуировать тепломеры, обладающие погрешностями 2% и более.

На установке УТП-1 были проведены государственные испытания тепломера ОРГРЭС (Москва) типа ИТП-2. Этот тепломер, в отличие от большинства работающих по принципу дополнительной стенки (типа пояса Шмидта), основан на компенсации плотности теплового потока от исследуемой поверхности. Он состоит из датчика и измерительного прибора. Для измерения теплового потока датчик, подключенный к прибору, накладывают на испытуемую поверхность. Прибор отградуирован в единицах плотности теплового потока.

Испытанию подвергали три произвольно выбранных тепломера ИТП-2. Установка УТП-1 с тепломером ОРГРЭС представлена на рис. 3. Для про-



Рис. 3. Установка УТП-1.

ведения испытания датчик 4 тепломера накладывают на теплоотдающую поверхность 2 установки и поджимают пружиной 3. Конструктивно датчик устроен так, что при наложении на теплоотдающую поверхность поверочной установки он практически не искажает ее температурное поле*. После некоторой выдержки (15—20 мин) определяют тепловой поток, созданный УТП-1 и зафиксированный измерительным прибором 1 тепломера.

Как показали испытания, во всем диапазоне шкалы тепломера от 0 до 600 вт/м^2 максимальные отклонения наблюдались в основном при малой плотности теплового потока ($20-70 \text{ вт/м}^2$) и не превышали $\pm 9\%$.

* И. Я. Залкинд, А. В. Ананьин, И. М. Корнер. Маломинерционный тепломер ОРГРЭС. «Теплоэнергетика», 1960, № 7.

ВЫБОР МАТЕРИАЛА АМПУЛ ПРИ АНАЛИЗЕ ТЕРМОХИМИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВЫХ ВЕЩЕСТВ КРИОСКОПИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

При анализе органических веществ криоскопическим методом в качестве материала ампулы обычно применяют серебро или медь, обладающие высокой теплопроводностью. Однако для анализа бензойной, р-хлорбензойной, р-фторбензойной и других органических кислот, которые используют в качестве образцовых веществ, применение серебряных или медных ампул не представляется возможным из-за их низкой коррозионной стойкости к этим кислотам. Так как в литературе [7—10] отсутствуют данные о коррозионной стойкости металлов к расплавам органических кислот, в настоящей работе проведено исследование коррозионной стойкости платины, тантала, титана и нержавеющей стали марки 1X18H9T к расплавам адипиновой, бензойной, парахлорбензойной, щавелевой и янтарной кислот. Изучение механизма коррозии не входило в задачу исследования.

Для коррозионных испытаний применяли образцы металлов в виде пластин размером $2,0 \times 1,0 \times 0,1$ см. Платина, титан и тантал представляли собой чистые металлы. Сталь марки 1X18H9T имела следующий состав: хрома 17,19; никеля 10,66; углерода 0,11; марганца 1,13; кремния 0,62; фосфора 0,036; серы 0,012; титана 0,60 и меди 0,22% вес.

Выбор металлов объясняется их устойчивостью к различным неорганическим агрессивным средам. Платина химически устойчива ко всем минеральным кислотам, за исключением царской водки. Титан [11] стоек во многих средах, в частности, в неорганических кислотах, растворах, содержащих хлориды, во влажном хлоре, в восстановительных средах. Благодаря своей высокой коррозионной стойкости и механической прочности он находит все большее применение в химическом машиностроении. Тантал — твердый, ковкий и тягучий металл, на него не действуют кислоты, за исключением плавиковой [12]. Нержавеющая сталь марки 1X18H9T устойчива к азотной и серной кислотам, но растворима в соляной кислоте.

Перед погружением в расплав поверхность образцов металлов обезжиривали, окисную пленку не удаляли. Все испытания проводили в статических условиях в открытом сосуде в контакте с атмосферой воздуха в расплавах соответствующих кислот.

Образцы полностью погружали в спокойный расплав на глубину 2 см от поверхности. Уровень расплава поддерживали постоянным в течение

опыта. Объем жидкости, приходящейся на 1 см^2 образца, составлял 20 мл. Образцы подвешивали в вертикальном положении на нитях из стеклянного волокна. Температуру расплава поддерживали на 1—2 град выше температуры плавления соответствующих кислот. По окончании испытаний образцы промывали спиртом и высушивали. Коррозию исследованных материалов оценивали весовым методом — по изменению массы образцов до и после опыта; визуальным просмотром поверхности образцов под микроскопом при 40-кратном увеличении; качественным анализом отработанных расплавов и продуктов коррозии, остающихся на поверхности образцов, на железо, титан, тантал и платину [12].

Аналізу подвергали золу, оставшуюся после сжигания органической составляющей.

Результаты коррозионных испытаний представлены на рис. 1—3. Коррозионная

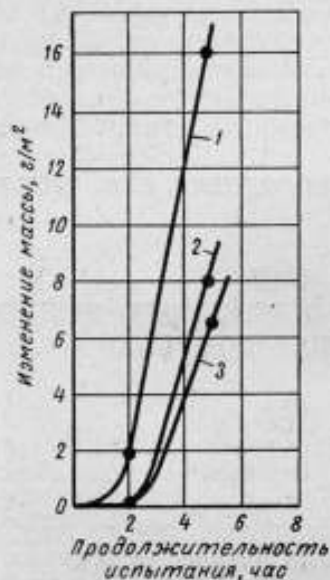


Рис. 1. Коррозионная стойкость стали марки IX18H9T.

1 — янтарная; 2 — щавелевая и 3 — парахлорбензойная кислоты.



Рис. 2. Коррозионная стойкость тантала в щавелевой кислоте.

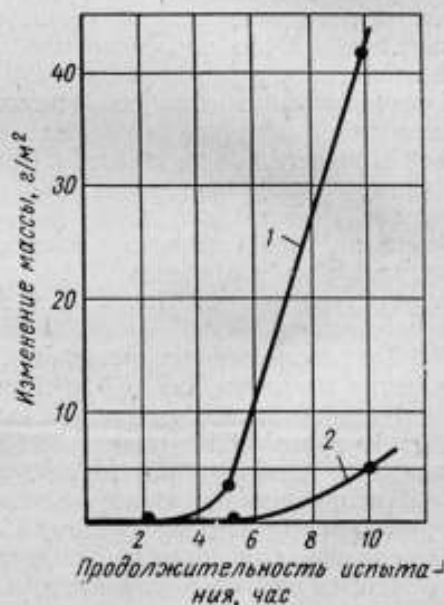


Рис. 3. Коррозионная стойкость титана.

1 — щавелевая; 2 — парахлорбензойная кислоты.

стойкость металлов в расплавах органических кислот зависит от природы кислоты и металла, а также от времени выдержки металла в расплаве.

В условиях двухчасовых опытов коррозия платины, титана и тантала не обнаружена (качественные реакции — отрицательные); сталь в янтарной кислоте корродирует с заметной скоростью ($1,0 \text{ г/м}^2 \text{ час}$) при положительной реакции на железо.

При пятичасовой выдержке платина и тантал не корродируют (качественные реакции — отрицательные), титан начинает корродировать в ща-

велевой кислоте ($0,8 \text{ г/м}^2 \text{ час}$), сталь — заметно в щавелевой ($1,6 \text{ г/м}^2 \text{ час}$) и парахлорбензойной кислотах ($1,1 \text{ г/м}^2 \text{ час}$) и значительно — в янтарной кислоте ($3,2 \text{ г/м}^2 \text{ час}$); в указанных кислотах реакция на железо положительна.

Десятичасовые опыты с титаном и танталом показали, что коррозия титана в щавелевой ($0,5 \text{ г/м}^2 \text{ час}$) и парахлорбензойной ($4,2 \text{ г/м}^2 \text{ час}$) кислотах резко возрастает (рис. 3); качественная реакция на титан — положительна. Тантал в этих условиях практически остался коррозионно-устойчивым, наблюдалось некоторое изменение его массы ($0,02 \text{ г/м}^2 \text{ час}$) в щавелевой кислоте, подтвержденное положительной качественной реакцией.

Таким образом в равных условиях наибольшей коррозионной устойчивостью к расплавам кислот обладают платина и тантал. Титан достаточно стоек при кратковременном контакте с агрессивными средами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов М. М. Термометрия и калориметрия. Изд. МГУ, 1954.
2. Smith L., Bjellerup L., Krook S., Westermarck H., Acta chem. Scand., 7, 65, 1953.
3. Вайсберг А. Физические методы органической химии. М., Госхимиздат, 1951.
4. Röck H. Ausgewählte moderne Trennverfahren zur Reinigung organischer Stoffe. Leipzig, 1956.
5. Farcas A. Ed. Physical Chemistry of Hydrocarbons. 1950.
6. Maier B. I. Glasgow A. R., Rossini F. D., I. Res. Nat. Bur. Standartes, 26, № 6, 591 (1941).
7. Абкович С., Бурне Д. Титан в промышленности. М., изд. оборонной промышленности, 1957.
8. Филанд М. А., Семенова Е. И. Свойства редких элементов. Справочник. М., Госнаучтехиздат, 1953.
9. Макквиллэн А. Д., Макквиллэн М. К. Титан. М., Metallurgizdat, 1958.
10. Эспе В. Технология электровакуумных материалов. Сб. «Металлы и материалы с металлической проводимостью». М., изд. оборонной промышленности, 1962.
11. Корнилов И. И., Виноградов Ю. М. О применении титана в химическом машиностроении и принципах его легирования. «Защита металлов», 1966, № 1.
12. Тредвелл Ф. П. Курс аналитической химии, т. 1. М.—Л., Госхимиздат, 1946.

Поступила в редакцию
27/III 1968 г.

ПРИМЕНЕНИЕ СГЛАЖИВАНИЯ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАТОРА

Для измерения скорости медленно протекающих процессов, в частности тепловых [1], используют различные дискретные дифференциаторы [2]. В работе [3] была оценена максимальная погрешность дискретного дифференциатора первого типа (ДД1), вычисляющего разность мгновенных значений входного сигнала через одинаковые промежутки времени. Исходя из этой оценки в работе [4] обоснован выбор оптимального интервала дискретности и оценены точностные возможности ДД1 при наличии случайных помех. Показано, что при высокочастотных помехах точность ДД1 может оказаться недостаточной.

Рассмотрим дискретный дифференциатор второго типа (ДД2), в котором операция дифференцирования заменяется нахождением разности между усредненными значениями входного сигнала на двух соседних одинаковых временных интервалах. ДД2, использующие сглаживание входного сигнала, более устойчивы к помехам, чем ДД1, хотя они и сложнее.

Сигнал $x(t)$ на входе ДД2 состоит из полезного сигнала $f(t)$ и сигнала помехи $m(t)$

$$x(t) = f(t) + m(t).$$

Сигнал $y(t)$ на выходе получается в дискретные моменты времени $t_i = iT$ ($2T$ — цикл измерения) и равен

$$y(t_i) = \frac{1}{T^2} \left[\int_{t_i-T}^{t_i} x(\tau) d\tau - \int_{t_i-2T}^{t_i-T} x(\tau) d\tau \right] = g(t_i) + n(t_i),$$

где

$$g(t_i) = \frac{1}{T^2} \left[\int_{t_i-T}^{t_i} f(\tau) d\tau - \int_{t_i-2T}^{t_i-T} f(\tau) d\tau \right]$$

— полезная составляющая сигнала;

$$n(t_i) = \frac{1}{T^2} \left[\int_{t_i-T}^{t_i} m(\tau) d\tau - \int_{t_i-2T}^{t_i-T} m(\tau) d\tau \right]$$

— помеха.

При определении скорости $\dot{f}(t_i - T)$ в середине цикла методическая погрешность измерения равна

$$\delta_m(t_i - T) = g(t_i) - \dot{f}(t_i - T).$$

Введем вспомогательную функцию $u(t) = \int_0^{t-T} f(\tau) d\tau$, так что $\dot{u}(t) = f(t - T)$, $\ddot{u}(t) = \dot{f}(t - T)$. Тогда методическую погрешность можно представить в виде разности между вторым разностным отношением $u(t)$ и второй производной $u(t)$

$$\delta_m(t_i - T) = \frac{u(t_i + T) - 2u(t_i) + u(t_i - T)}{T^2} - \ddot{u}(t_i),$$

оценка которой известна [5]

$$|\delta_m(t_i - T)| \leq \max_{[t_i - T, t_i + T]} |\ddot{u}(t)| \frac{T^2}{12} = \max_{[t_i - 2T, t_i]} |\ddot{f}(t)| \frac{T^2}{12}. \quad (1)$$

Для нахождения $\dot{f}(t)$ в моменты времени $t_i - T < t < t_i$ целесообразно использовать линейную интерполяцию, оценка погрешности которой [5] будет

$$|\delta_{\text{инт}}(t)| \leq \max_{[t_i - T, t_i]} |\ddot{f}(t)| \frac{T^2}{8}.$$

Помеху на выходе представим в виде

$$n(t) = \frac{q(t) - q(t - T)}{T}, \quad (2)$$

где

$$q(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t m(\tau) d\tau.$$

На основании изложенного выше можно сделать вывод, что ДД2 представляет собой сочетание фильтра, преобразующего исходную помеху $m(t)$ в $q(t)$, с ДД1, на вход которого поступает уже сглаженная помеха $q(t)$. Найдем вероятностные характеристики $q(t)$, предполагая помеху на входе $m(t)$ стационарной случайной функцией с математическим ожиданием m и корреляционной функцией $R_m(t)$. Математическое ожидание $q(t)$ также равно m , а корреляционная функция

$$\begin{aligned} R_q(t, s) &= M \{ [q(t) - m] [q(s) - m] \} = \\ &= M \left\{ \frac{1}{T} \int_{t-T}^t [m(\tau) - m] d\tau \frac{1}{T} \int_{s-T}^s [m(\sigma) - m] d\sigma \right\} = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{t-T}^t \int_{s-T}^s R_m(\tau - \sigma) d\tau d\sigma = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R_m(\tau - \sigma + t - s) d\tau d\sigma. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $R_q(t, s) = R_q(t - s)$, т. е. сглаженная помеха $q(t)$ также стационарна. Произведя замену переменной $u = \tau - \sigma$ и изменив

порядок интегрирования, упростим выражение для корреляционной функции

$$R_q(t) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R_m(\tau - \sigma - t) d\tau d\sigma =$$

$$= \frac{1}{T^2} \int_0^T d\tau \int_{\tau-T}^{\tau} R_m(u-t) du = \frac{1}{T^2} \int_{-T}^T (T - |u|) R_m(u-t) du.$$

Проиллюстрируем влияние сглаживания на спектр помехи в случае, когда $R_m(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|}$.

Из предыдущей формулы получим

$$R_q(t) = \frac{\sigma^2}{T^2} \int_{-T}^T (T - |u|) e^{-\alpha|u-t|} du.$$

Чтобы вычислить $R_q(t)$ при $t > T$, разобьем последний интеграл на два легко вычисляющихся интеграла

$$R_q(t) = \frac{\sigma^2}{T^2} \int_{-T}^0 (T+u) e^{\alpha(u-t)} du + \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T (T-u) e^{\alpha(u-t)} du,$$

после чего получим

$$R_q(t) = \frac{4\sigma^2 e^{-\alpha t}}{\alpha^2 T^2} \operatorname{sh}^2\left(\frac{\alpha T}{2}\right).$$

Для вычисления $R_q(t)$ при $0 < t < T$ разобьем интеграл на три интеграла

$$R_q(t) = \frac{\sigma^2}{T^2} \int_{-T}^0 (T+u) e^{\alpha(u-t)} du +$$

$$+ \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^t (T-u) e^{\alpha(u-t)} du + \frac{\sigma^2}{T^2} \int_t^T (T-u) e^{-\alpha(u-t)} du,$$

вычисляя которые получим

$$R_q(t) = \frac{2\sigma^2}{\alpha^2 T^2} [\alpha(T-t) - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha T} \operatorname{ch}(\alpha t)].$$

Так как $R_q(t)$ — четная функция, окончательно запишем

$$R_q(t) = \begin{cases} \frac{2\sigma^2}{\alpha^2 T^2} [\alpha(T-|t|) - e^{-\alpha|t|} + e^{-\alpha T} \operatorname{ch}(\alpha t)] & \text{при } |t| \leq T, \\ \frac{4\sigma^2}{\alpha^2 T^2} e^{-\alpha|t|} \operatorname{sh}^2\left(\frac{\alpha T}{2}\right) & \text{при } |t| \geq T, \end{cases} \quad (3)$$

причем дисперсия помехи после сглаживания равна

$$\sigma_q^2 = R_q(0) = \frac{2\sigma^2}{\alpha^2 T^2} (\alpha T + e^{-\alpha T} - 1). \quad (4)$$

Зная корреляционные функции помех $m(t)$ и $q(t)$, легко найти их спектральные плотности [6]

$$f_m(\omega) = \frac{\sigma^2 \alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2},$$

$$f_q(\omega) = \frac{\sigma^2 \alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2} \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2.$$

Выясним влияние параметров α и T на ширину спектра исходной $m(t)$ и сглаженной $q(t)$ помех. Шириной спектра на уровне ϵ будем считать наибольшую частоту $\omega(\epsilon)$, при которой

$$\frac{f[\omega(\epsilon)]}{\max f(\omega)} = \epsilon.$$

Тогда $\omega_m(\epsilon) = \alpha \sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}$, а так как $\frac{\alpha^2}{\omega^2 + \alpha^2} \sin^2 \frac{\omega T}{2} \leq 1$, то $\omega_q(\epsilon) \leq \frac{2}{T \sqrt{\epsilon}}$. Таким образом, при больших значениях α спектр $m(t)$ широкий, а при больших значениях T (независимо от α) спектр $q(t)$ узкий. В работе [3] показано, что ДД1 чувствителен к высокочастотным помехам и нечувствителен к низкочастотным. Следовательно, при $\alpha T \geq \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon}}$ спектр $q(t)$ будет уже спектра $m(t)$, и ДД2 более помехоустойчив, чем ДД1.

Применив известную формулу для дисперсии приращения [6]

$$\sigma_n^2 = \frac{2[\sigma_q^2 - R_q(T)]}{T^2},$$

из формул (2)–(4) получим выражение для дисперсии помехи на выходе ДД2

$$\sigma_n^2 = \frac{4\sigma^2}{\alpha^2 T^4} \left\{ \alpha T - (1 - e^{-\alpha T}) \left[1 + \frac{1}{2}(1 - e^{-\alpha T}) \right] \right\}. \quad (5)$$

Отметим, что в работе [2] соответствующая формула приведена с ошибкой. Как и в работе [3], для оценки максимальной случайной погрешности применим правило трех сигма, т. е.

$$|\delta_{сл}| \leq 3\sigma_n. \quad (6)$$

Суммарная погрешность ДД2 состоит из методической и случайной составляющих

$$\delta_{сум} = \delta_m + \delta_{сл}.$$

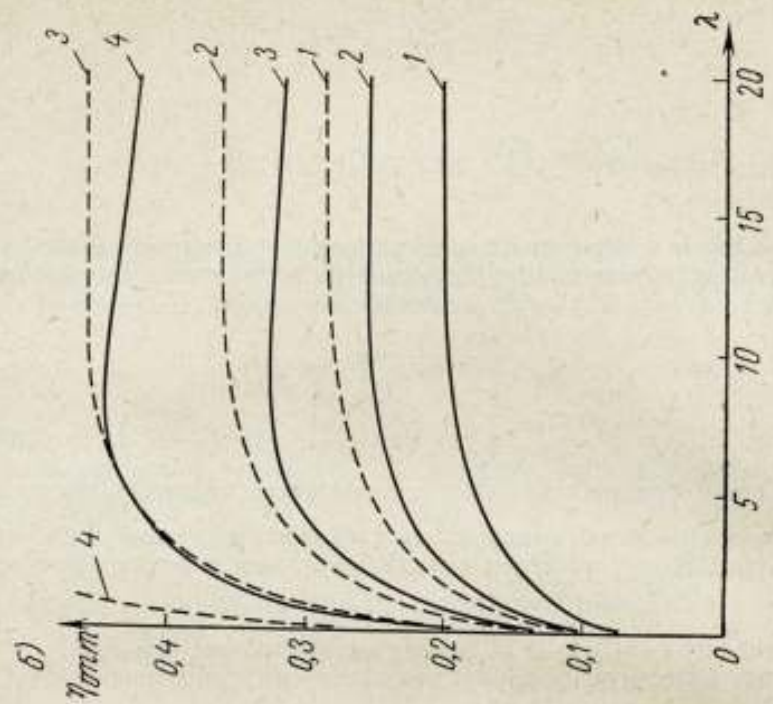
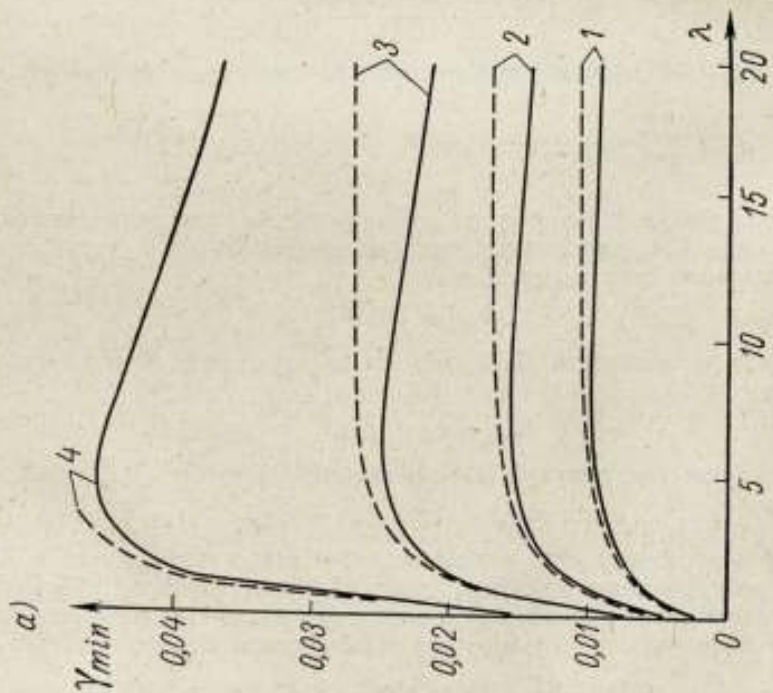
Оценку ее максимума получим из выражений (1) и (6)

$$\max |\delta_{сум}| \leq \max |\delta_m| + 3\sigma_n.$$

Используем эту оценку для выяснения точностных возможностей ДД2 при дифференцировании медленно изменяющихся сигналов. При этом полезный сигнал можно считать функцией с ограниченным спектром и для оценок его производных пользоваться неравенством Бернштейна [7]

$$|f^{(n)}(t)| \leq A \omega_{\max}^n,$$

где $A = \max |f(t)|$ при всех значениях t , а ω_{\max} — максимальная частота в спектре полезного сигнала. Точность ДД2 будем характеризовать без-



Зависимость минимальной погрешности γ_{\min} (а) дискретного измерения скорости и оптимального интервала дискретности γ_{opt} (б) от отношения ширины спектров помехи и полезного сигнала λ для ДД2 (сплошная линия) и ДД1 (пунктирная линия) при $\beta = 0,0005$ (1); 0,001 (2); 0,002 (3) и 0,005 (4).

размерной величиной $\gamma = \frac{\max \delta_{\text{сум}}}{A \omega_{\text{max}}}$, которая в случае выполнения равенства $\max |\dot{f}(t)| = A \omega_{\text{max}}$ совпадает с относительной суммарной погрешностью $\gamma_{\text{сум}} = \frac{\max \delta_{\text{сум}}}{\max |\dot{f}(t)|}$.

Это равенство достигается, например при $f(t) = A \sin \omega_{\text{max}} t$. Величина $\gamma_{\text{сум}}$ характеризует погрешность ДД2 для индивидуальной функции $f(t)$, причем возможно, что $\gamma_{\text{сум}} > \gamma$. Величину γ , в отличие от $\gamma_{\text{сум}}$, можно рассматривать как характеристику погрешности для целого класса функций с ограниченным спектром, таких, что $\max |\dot{f}(t)| = A$.

Введем безразмерные величины

$$\eta = \omega_{\text{max}} T, \quad \beta = \frac{\sigma}{A}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{\omega_{\text{max}}},$$

где η — величина, пропорциональная отношению максимальной частоты полезного сигнала к частоте измерения;

β — отношение шум/сигнал, характеризующее относительную погрешность измерения полезного сигнала;

λ — отношение ширины спектров помехи и полезного сигнала.

Тогда из выражений (1) и (5) получим

$$\gamma \leq \frac{\eta^2}{12} + \frac{6\beta}{\lambda\eta^2} \sqrt{\lambda\eta + e^{-\lambda\eta} - 1 - \frac{1}{2}(1 - e^{-\lambda\eta})^2}.$$

Очевидно, что существует такое значение η_{opt} , при котором правая часть этого неравенства принимает минимальное значение γ_{min} . Как видно из рисунка, при малых значениях λ , т. е. при относительно низкочастотных помехах, ДД1 и ДД2 обеспечивают практически одинаковую точность, однако при больших λ (при высокочастотных помехах) ДД2 значительно точнее, чем ДД1. Это преимущество ДД2 наиболее очевидно при больших значениях β , т. е. при более сильных помехах. Таким образом, пользуясь этими графиками, по известным характеристикам полезного сигнала и помехи можно выбрать тип дискретного дифференциатора и решить задачу его расчета [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Левидов В. А. Принципы построения автоматических электроизмерительных приборов для исследования кинетики медленно протекающих тепловых процессов. «Инженерно-физический журнал», 1962, № 8.
2. Дилигенский С. Н. Методы реализации оптимальных фильтров с конечной памятью. «Автоматика и телемеханика», 1961, т. 22, № 11.
3. Анолик М. В., Левидов В. А. Об оценке погрешности дискретного измерения скоростей с учетом случайной помехи на входе дискретного дифференциатора. «Измерительная техника», 1966, № 1.
4. Левидов В. А., Анолик М. В. О выборе интервала дискретности дискретно-дифференцирующего измерительного устройства при наличии случайных помех. «Измерительная техника», 1967, № 3.
5. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., Физматгиз, 1959.
6. Виленин С. Я. Статистические методы исследования стационарных процессов и систем автоматического регулирования. М., изд. «Советское радио», 1967.
7. Ахизер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., Физматгиз, 1965.

Поступила в редакцию
27/IV 1968 г.

IV. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ТЕПЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

УДК 536.5.53.088

Р. Г. ДУМОВА, О. А. СЕРГЕЕВ

ВНИИМ

О ЗНАЧЕНИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ЭТАЛОННЫМ ТЕРМОПРИЕМНИКОМ

В интервале 0—1063° С Международная практическая температурная шкала (МПТШ) воспроизводится с помощью интерполяционного уравнения

$$y = A + Bt + Ct^2, \quad (1)$$

где y — непосредственно измеряемая величина (электрическое сопротивление платинового термометра или термоэлектродвижущая сила платино-платинородиевой термопары);

t — температура, рассчитываемая из уравнения (1);

A, B, C — постоянные, определяемые измерением температуры в трех реперных точках, температура которых t_i ($i = 1, 2, 3$) известна.

В результате решения системы трех уравнений вида

$$y_i = A + Bt_i + Ct_i^2, \quad (2)$$

получаем выражения для постоянных A, B и C

$$A = \frac{t_3 t_1 (t_2 - t_2) y_1 - t_1 t_3 (t_2 - t_1) y_2 + t_1 t_2 (t_2 - t_1) y_3}{(t_3 - t_2) (t_2 - t_1) (t_2 - t_1)}, \quad (3)$$

$$B = \frac{(t_3^2 - t_1^2) y_2 - (t_3^2 - t_2^2) y_1 - (t_2^2 - t_1^2) y_3}{(t_3 - t_2) (t_2 - t_1) (t_2 - t_1)}, \quad (4)$$

$$C = \frac{(t_3 - t_2) y_1 - (t_3 - t_1) y_2 + (t_2 - t_1) y_3}{(t_3 - t_2) (t_2 - t_1) (t_2 - t_1)}. \quad (5)$$

Выражения (3)—(5) можно рассматривать как представленную в ином виде систему уравнений (2). Приведенные выше сведения — это все, что предоставляет в распоряжение исследователей ГОСТ 8550—61 по вопросу об измерениях температуры, выраженной в градусах Международной практической температурной шкалы.

Целью настоящей работы было определение случайной погрешности Δt измерения температуры эталонным термодатчиком в любой точке температурного интервала, и в частности, в реперных точках t_i .

Так как уравнение (1) можно представить в виде

$$t = f(y, A, B, C),$$

то погрешность измерения температуры в любой точке t температурного интервала равна

$$\Delta t = \frac{1}{2Ct+B} \sqrt{(\Delta A)^2 + t^2(\Delta B)^2 + t^4(\Delta C)^2 + (\Delta y)^2}, \quad (6)$$

где Δy , ΔA , ΔB и ΔC — погрешности измерения соответствующих величин.

Для реперных точек t_i из выражения (6) получим три уравнения вида

$$\Delta t_i = \frac{1}{2Ct_i+B} \sqrt{(\Delta A)^2 + t_i^2(\Delta B)^2 + t_i^4(\Delta C)^2 + (\Delta y_i)^2}. \quad (7)$$

Чтобы определить погрешности Δt и Δt_i , необходимо знать величины Δy , Δy_1 , Δy_2 , Δy_3 , B , C , ΔA , ΔB и ΔC . Погрешности Δy_i определяют из опыта путем градуирования термодатчика в реперных точках, а постоянные B и C — из уравнений (4) и (5). Погрешности ΔA , ΔB и ΔC , а также Δy в температурных интервалах между реперными точками неизвестны.

Таким образом, перед исследователями возникает непреодолимая задача определить из уравнений (6) и (7) восемь неизвестных (Δt , Δt_1 , Δt_2 , Δt_3 , ΔA , ΔB , ΔC , Δy). Для решения задачи необходимо ввести дополнительные условия, позволяющие определить ΔA , ΔB , ΔC и Δy . Наиболее естественные дополнительные условия предлагает метрологическая практика, согласно которой

$$\Delta t_i = \frac{1}{Ct+B} \Delta y_i. \quad (8)$$

Как видно из сравнения выражения (8) с (6),

$$\Delta A = \Delta B = \Delta C = 0. \quad (9)$$

Отсюда вытекает дополнительное условие: значения постоянных A , B и C эталонного термодатчика являются точными, аналогично значениям температуры реперных точек. Это условие позволяет рассчитать Δt_1 , Δt_2 и Δt_3 , но не дает возможности определить погрешность Δt в интервалах между реперными точками. Поэтому целесообразно ввести следующее условие: погрешность Δt для температурного интервала между реперными точками определяется линейной интерполяцией Δt_1 , Δt_2 , Δt_3 . Как и первое, это условие соответствует установившейся метрологической практике и приводит к результату, удовлетворяющему, в частности, следующим требованиям:

$$\text{при } t = t_i \quad \Delta t = \Delta t_i. \quad (10)$$

Основанием для введения второго условия является то, что уравнение (1) при условии (9) является точным, т. е. полностью соответствует принципам, положенным в основу МПТШ. Следовательно, если $\Delta t_1 \leq \Delta t_2$, то $\Delta t_1 \leq \Delta t \leq \Delta t_2$. Если же $\Delta t_1 \geq \Delta t_2$, то $\Delta t_1 \geq \Delta t \geq \Delta t_2$. Аналогично в интервале между t_2 и t_3

$$\Delta t_2 \leq \Delta t \leq \Delta t_3 \text{ при } \Delta t_3 \geq \Delta t_2;$$

$$\Delta t_2 \geq \Delta t \geq \Delta t_3 \text{ при } \Delta t_3 \leq \Delta t_2.$$

Так как для решения задачи необходимо вводить дополнительные условия, то от характера последних зависит результат оценки искомых величин. Этим объясняется расхождение результатов данной работы и работ [1] и [2]. В таблице приведены случайные погрешности платинового термометра сопротивления, градуированного в реперных точках $t_1 = 0^\circ \text{C}$,

$t_2 = 100^\circ \text{C}$ и $t_3 = 419,505^\circ \text{C}$. Исходными для расчета были приняты следующие значения величин: при $t_1 y_1 = 10,00000 \text{ ом}$, $\Delta y_1 = \pm 3,5 \times 10^{-4} \text{ ом}$; при $t_2 y_2 = 10,39194 \text{ ом}$, $\Delta y_2 = \pm 7,0 \cdot 10^{-4} \text{ ом}$; при $t_3 y_3 = 25,65680 \text{ ом}$, $\Delta y_3 = \pm 7,0 \cdot 10^{-4} \text{ ом}$.

Методика расчета	Случайная погрешность Δt (град.) при следующих значениях температуры, $^\circ\text{C}$							
	t_1	50	t_2	200	300	400	t_3	500
[1]	$3,5 \cdot 10^{-4}$	$0,53 \cdot 10^{-2}$	$1,07 \cdot 10^{-2}$	$2,50 \cdot 10^{-2}$	$4,40 \cdot 10^{-2}$	$6,95 \cdot 10^{-2}$	$7,54 \cdot 10^{-2}$	$32,55 \cdot 10^{-2}$
[2]	$3,5 \cdot 10^{-4}$	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$7,0 \cdot 10^{-4}$	$10,0 \cdot 10^{-4}$	$9,0 \cdot 10^{-4}$	$6,0 \cdot 10^{-4}$	$7,0 \cdot 10^{-4}$	$15,0 \cdot 10^{-4}$
Данная работа	$3,5 \cdot 10^{-4}$	$5,2 \cdot 10^{-4}$	$7,0 \cdot 10^{-4}$	$7,0 \cdot 10^{-4}$	$7,0 \cdot 10^{-4}$	$7,0 \cdot 10^{-4}$	$7,0 \cdot 10^{-4}$	$7,0 \cdot 10^{-4}$

Как видно из таблицы, оценки по работе [1] отличаются от других оценок на два порядка. В работе [1] погрешность Δt определена из уравнений (6) (при условии $\Delta y = 0$), где ΔA , ΔB и ΔC рассчитаны из выражений (3)—(5), а Δt_1 , Δt_2 и Δt_3 выбраны как «... наилучшая достигнутая воспроизводимость...» показаний термодатчика в реперных точках. Последнюю, как уже говорилось, получают только при условии (9). Таким образом, в работе [1] в предположении, что $\Delta A = \Delta B = \Delta C = 0$, получены не равные нулю значения ΔA , ΔB и ΔC . Это первое противоречие, имеющееся в этой работе. Второе состоит в том, что формулы (6) и (7) справедливы только в случае, если все величины, входящие в правую часть уравнения (1), измерены независимо друг от друга. В действительности, величины A , B и C в соответствии с уравнениями (3)—(5) не могут быть измерены независимо от y_i и t_i .

Автор работы [2] предполагает, что $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = 0$. На этом основании, зная лишь вероятные погрешности термодатчика в реперных точках Δy_i , из формулы, аналогичной выражению (6), рассчитывают Δt и Δt_i . В реперных точках, вопреки сделанному предположению, погрешности Δt_i оказываются отличными от нуля и равными значениям, полученным из уравнения (8).

Таким образом, в отличие от работ [1] и [2], в настоящей статье случайная погрешность измерения температуры эталонным термодатчиком в трех реперных точках рассчитана по формуле (8), а в промежуточных точках шкалы — линейной интерполяцией полученных значений.

Такой подход, по аналогии, можно применить к низкотемпературной области, где МПТШ воспроизводится по четырем реперным точкам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сычев В. В., Горбунова Н. И. О точности измерения температуры образцовым платиновым термометром сопротивления. «Теплофизика высоких температур», 1965, № 4.
2. Пилипчук Б. И. Ошибки эталонирования платинового термометра сопротивления. Труды ВНИИМ, вып. 4 (64), М.—Л., Стандартгиз, 1948.

Поступила в редакцию
15/V 1968 г.

О СТАБИЛЬНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ ТЕРМОМЕТРОВ
СОПРОТИВЛЕНИЯ

ГОСТ 6651—59 и ведомственные ТУ на технические термометры сопротивления устанавливают для вновь изготовленных термометров допустимые отклонения сопротивления R_0 и отношения $\frac{R_{100}}{R_0} = N$ от номинальных значений, приведенных в градуировочных таблицах. Погрешность измерения температуры, обусловленная этими отклонениями, определяется по ГОСТ формулой вида

$$\Delta t = a + bt, \quad (1)$$

где a и b — постоянные величины, зависящие от класса термометра;
 t — измеряемая температура.

В статье определена предельная погрешность измерения, учитывающая законы распределения отклонений R_0 и N как для вновь изготовленных, так и для поверяемых термометров. Найденные значения сравниваются с рассчитанными по формуле (1).

Результаты градуировки 1300 вновь изготовленных и принятых ОТК платиновых термометров сопротивления 2-го класса показали, что закон распределения отклонений R_0 и N близок к нормальному (рис. 1 и 2), а математические ожидания величин равны: $m_{R_0} = 46,01$ ом, $m_N = 1,391$; среднеквадратические отклонения $\sigma_{R_0} = 0,013$ ом и $\sigma_N = 0,46 \cdot 10^{-3}$. Установлено, что величины R_0 и N этих термометров независимы. Предельная погрешность платиновых термометров 2-го класса при температуре 100°C и расчете по формулам, приведенным в работе [1], равна $\pm 0,23$ град, а при расчете по формуле (1) равна $\pm 0,75$ град. Вероятность появления последнего значения с учетом нормального закона распределения погрешности меньше 0,000001.

По существующим нормам, технические термометры сопротивления должны проверяться не реже чем один раз в два года. Для статистической оценки стабильности основных характеристик, а также погрешностей термометров были использованы результаты поверки 1000 платиновых и 600 медных термометров сопротивления 2-го класса, поступивших во ВНИИМ в 1966 г. У платиновых термометров закон распределения отклонений R_0 и N от номинальных значений был близок к нормальному, однако числовые характеристики распределения отличались от таковых у вновь изготовленных термометров (см. таблицу).

При поверке термометры, у которых отклонения R_0 и N от номинальных превышали допустимые, браковали. В результате из 1000 платиновых

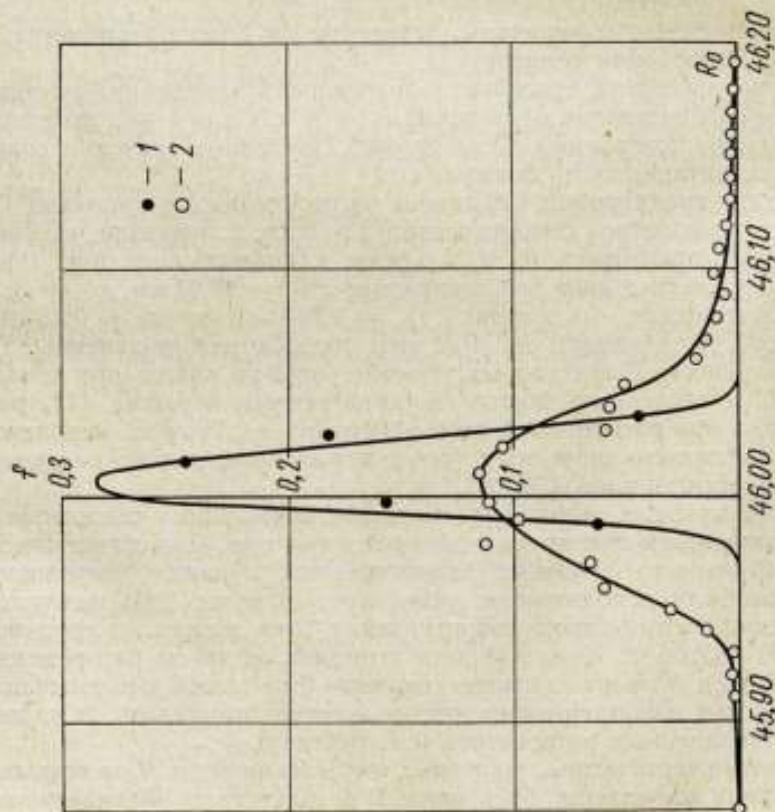


Рис. 1. Плотность распределения f сопротивления R_0 платиновых термометров сопротивления 2-го класса.

1 — выпущенных заводом; 2 — поступивших на поверку.

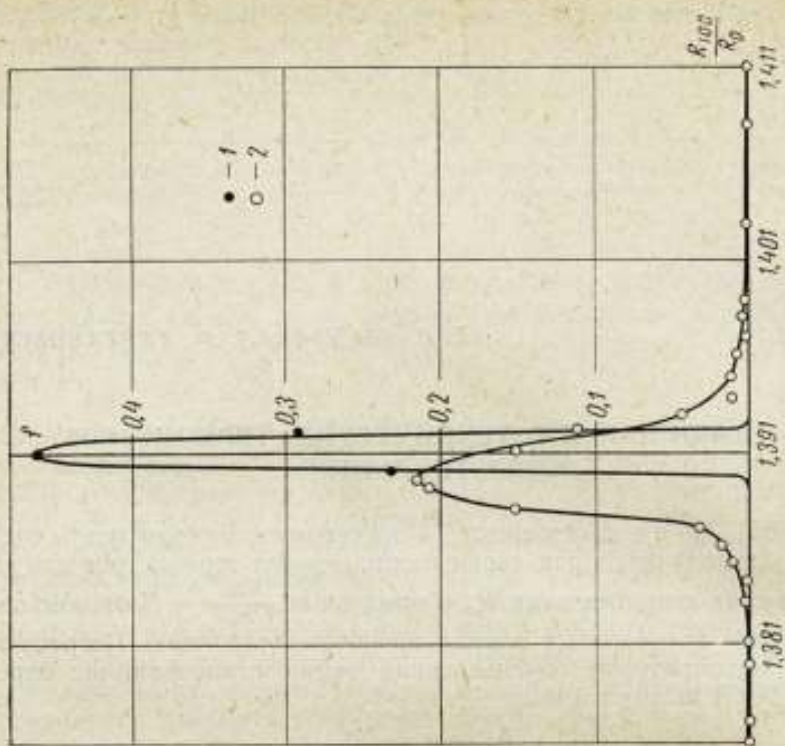


Рис. 2. Плотность распределения f отношения N платиновых термометров сопротивления 2-го класса.

1 — выпущенных заводом; 2 — поступивших на поверку.

Характеристики распределения	Результаты поверки термометров		Данные ГОСТ для термометров	
	платиновых	медных	платиновых	медных
m_{R_0} , Ом	46,01	53,02	46,00	53,00
m_N	1,390	1,425	1,391	1,426
σ_{R_0} , Ом	0,054	0,080	—	—
σ_N	0,002	0,002	—	—

термометров около 5% было забраковано по величине R_0 и 50% — по N , а из 600 медных — соответственно 15 и 55%.

Необходимо, чтобы и в процессе эксплуатации отклонение градуировки термометра не превышало значений, рассчитанных по формуле (1). Можно показать, что у части термометров, забракованных при поверке, предельная погрешность измерения температуры за счет указанных отклонений не превышает этих значений. Следовательно, принцип отбраковки термометров в отдельности по R_0 и N приводит к повышенному проценту брака. Приведем расчет предельной погрешности на основе указанных выше экспериментальных данных.

При обработке статистических данных было замечено, что величины R_0 и N к моменту поверки становятся взаимозависимыми (рис. 3). Эту зависимость можно описать уравнением регрессии

$$R_0 = m_{R_0} + r_{R_0, N} \frac{\sigma_{R_0}}{\sigma_N} (N - m_N), \quad (2)$$

где $r_{R_0, N}$ — коэффициент корреляции.

Для платиновых термометров сопротивления R_0 равно 46,01 — $10 \times (N - 1,390)$, а для медных 53,02 — $9(N - 1,425)$.

Уравнение, связывающее сопротивление термометра и температуру, имеет вид

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t), \quad (3)$$

где $\alpha = \frac{N-1}{100}$ — температурный коэффициент сопротивления.

Как показано ранее [1], учет квадратического члена для платиновых термометров при расчете погрешности за счет отклонений R_0 и N не вносит заметного вклада в величину дисперсии R_t . С учетом выражения (2) уравнение (3) можно рассматривать как произведение двух взаимозависимых случайных величин R_0 и $(1 + \alpha t)$. На основании теорем о числовых харак-

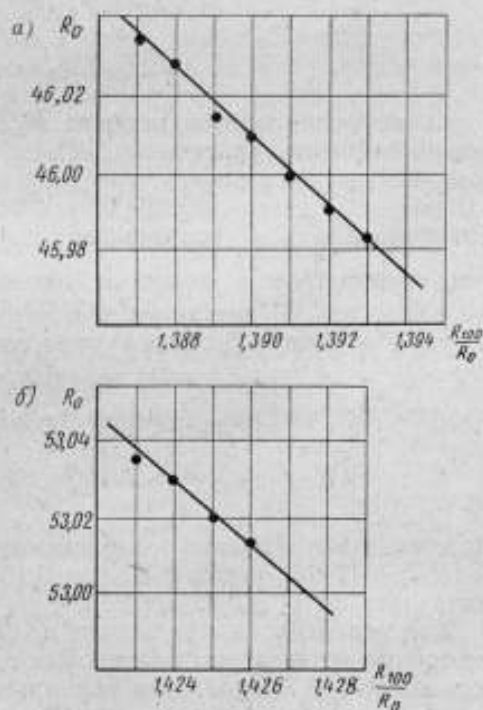


Рис. 3. Зависимость между R_0 и N в исследованных термометрах сопротивления:

а — платиновых; б — медных.

теристиках [2] выражение для дисперсии произведения зависимых случайных величин можно записать

$$D [R_t] = D [R_0] D [1 + \alpha t] + D [R_0] m_{(1+\alpha t)}^2 + D [1 + \alpha t] m_{R_0}^2 - \\ - K_{R_0, (1+\alpha t)}^2 - 2K_{R_0, (1+\alpha t)} m_{R_0} m_{(1+\alpha t)} + K_{R_0, (1+\alpha t)}^2,$$

где $D [R_0]$ и $D [1 + \alpha t]$ — соответственно дисперсии R_0 и $(1 + \alpha t)$;

m_{R_0} и $m_{(1+\alpha t)}$ — их математические ожидания;

K — корреляционные моменты соответствующих величин.

Величины, входящие в формулу (4), связаны с величинами, полученными при статической обработке данных поверки, соотношениями [2]

$$m_{(1+\alpha t)} = 1 + \frac{t}{100} (N - 1);$$

$$D [1 + \alpha t] = \frac{t^2}{10^4} D [N];$$

$$K_{R_0, (1+\alpha t)} = \frac{t}{100} K_{R_0, N}.$$

Связь корреляционного момента K_{xy} с коэффициентом корреляции r_{xy} можно выразить уравнением [2]

$$K_{R_0, (1+\alpha t)} = r_{R_0, (1+\alpha t)} \sigma_{R_0} \sigma_{(1+\alpha t)}.$$

Значение $K_{R_0, (1+\alpha t)}^2$ определено по числовым данным поверки партии термометров с помощью линейной аппроксимации зависимостей R_0^2 и $(1 + \alpha t)^2$. В результате к моменту поверки для платиновых термометров 2-го класса были получены следующие данные:

$$m_{R_0} = 46,01 \text{ ом}; D [R_0] = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ ом}^2;$$

$$m_N = 1,390; D [N] = 4,4 \cdot 10^{-6};$$

$$K_{R_0, (1+\alpha t)} = -7 \cdot 10^{-5}; K_{R_0, (1+\alpha t)}^2 = -6,4 \cdot 10^{-2}.$$

Подставим эти значения в выражение (4), тогда для температуры 100°C $D [R_t] = 17 \cdot 10^{-3} \text{ ом}^2$ и $\sigma [R_t] = 0,13 \text{ ом}$, что в пересчете на температуру составляет $\Delta t = \pm 0,72 \text{ град}$.

Как указывалось, при расчете по формуле (1) предельная погрешность измерения температуры платиновых термометров для температуры 100°C составляет $\pm 0,75 \text{ град}$. При нормальном законе распределения и среднеквадратической погрешности $\pm 0,72 \text{ град}$ только около 32% всех термометров будут иметь погрешность более $\pm 0,75 \text{ град}$, в то время как при поверке по R_0 и N было забраковано 50% термометров.

Следует заметить, что вычисленное значение среднеквадратической погрешности характеризует отклонение показаний термометров от математического ожидания произведения R_0 и $(1 + \alpha t)$, которое можно записать уравнением [2]

$$m_{R_t} = m_{R_0} m_{(1+\alpha t)} + K_{R_0, (1+\alpha t)}.$$

С учетом реальных значений m_{R_0} и $m_{(1+\alpha t)}$ при температуре 100°C $m_{R_t} = 63,95 \text{ ом}$, в то время как в градуировочных таблицах $m_{R_t} = 63,99 \text{ ом}$. Сдвиг математического ожидания на $0,04 \text{ ом}$ соответствует $\pm 0,22 \text{ град}$. Следовательно, для определения количества термометров,

обладающих погрешностью не более $\pm 0,75$ град от градуировочных значений, необходимо найти вероятность погрешности для реального распределения в интервале $-0,53 \text{ град} < \Delta t < + 0,97 \text{ град}$. Установлено, что погрешность, превышающую предельную по ГОСТ, имеют 34% платиновых термометров. Разница между результатом расчета (с учетом сдвига математического ожидания) и первой оценкой незначительна и поэтому можно ограничиться первой оценкой.

В результате такого расчета погрешности для 600 поверенных медных термометров сопротивления при $m_{R_0} = 53,04 \text{ ом}$; $D [R_0] = 6,2 \times 10^{-3} \text{ ом}^2$; $m_{(1+\alpha t)} = 1,425 \text{ ом}$; $D [1 + \alpha t] = 4,8 \cdot 10^{-6} \text{ ом}^2$; $K_{R_0, (1+\alpha t)} = -4 \cdot 10^{-5}$; $K_{R_0^2, (1+\alpha t)} = -2 \cdot 10^{-3}$ и $t = 100^\circ \text{ C}$ получено $D [R_t] = 29 \cdot 10^{-3} \text{ ом}^2$ и $\sigma [R_t] = 0,17 \text{ ом}$, что в пересчете на температуру составляет $\Delta t = \pm 0,75 \text{ град}$.

Предельная погрешность для медных термометров 2-го класса по ГОСТ 6651—59 для температуры 100° C равна $\pm 0,65 \text{ град}$. Таким образом, погрешностью, большей $\pm 0,65 \text{ град}$, обладали лишь 35% термометров, тогда как при проверке было забраковано около 60%.

Полученные результаты показывают необходимость совершенствования методики проверки термометров сопротивления. По-видимому, в стандартах на технические термометры сопротивления целесообразно сформулировать требования к стабильности градуировочных характеристик $R_t = f(t)$. Тогда при проверке будут исходить не из требования сохранения величин R_0 и N в пределах допускаемых отклонений, а из условия, что отклонение градуировки поверяемого термометра от градуировочных таблиц за все время работы не должно превышать установленных значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашкинази И. М., Иванова А. Г., Тартаковский Д. Ф. К расчету отклонений градуировки термометров сопротивления от градуировочных таблиц. «Измерительная техника», 1967, № 12.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., Гостехиздат, 1962.

Поступила в редакцию
1/III 1968 г.

РАСЧЕТ ПЕРЕГРЕВА ПОВЕРХНОСТНЫХ ТЕРМОМЕТРОВ СОПРОТИВЛЕНИЯ

При выборе наибольшей величины измерительного тока, протекающего через чувствительный элемент термометра сопротивления, необходимо учитывать допустимую погрешность от перегрева термометра. Выражение для оценки перегрева термометров погружения приведено в работе [1].

В настоящей статье получены формулы для перегрева плоских поверхностных термометров сопротивления. Кроме того, была поставлена задача — определить, как изменяется во времени погрешность от нагрева измерительным током, и вычислить параметры, характеризующие время установления стационарных условий в зависимости от выделяемой в термометре мощности.

К плоским поверхностным термометрам сопротивления можно отнести, например, такие, в которых чувствительный элемент наклеивается на изоляционную пластину, а также пленочные термометры, чувствительный элемент которых напыляется на пластину или непосредственно на исследуемый объект. При измерении температуры поверхности термометрами, выполненными в виде пластин, длина и ширина которых намного больше толщины, систему объект—термометр можно рассматривать как две бесконечные пластины, находящиеся в тепловом контакте. Соотношение между выделяемой в чувствительном элементе мощностью и перегревом можно найти, решая систему уравнений для двух бесконечных пластин, в одной из которых имеется постоянный источник тепла.

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} + \frac{w}{c_1 \gamma_1}; \quad 0 \leq x \leq L_1, \quad \frac{\partial t_2}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}; \quad -L_2 \leq x \leq 0,$$

где a — коэффициент температуропроводности;

w — выделяемая мощность;

c — теплоемкость;

γ — удельный вес;

t_1 и t_2 — температура термометра и исследуемого объекта;

L_1 и L_2 — толщина термометра и объекта.

Если исследуемая стенка нагревается со стороны, противоположной термометру сопротивления, граничные условия можно записать так:

$$\frac{\partial t_1(L_1, \tau)}{\partial x} + \frac{\alpha_1}{\lambda_1} [t_1(L_1, \tau)] = 0, \quad \frac{\partial t_2(-L_2, \tau)}{\partial x} - \frac{\alpha_2}{\lambda_2} [t_2(-L_2, \tau) - \theta_2(\tau)] = 0,$$

где θ_2 — температура окружающей среды.

При идеальном тепловом контакте между объектом и термометром

$$t_1(0, \tau) = t_2(0, \tau),$$

$$\frac{\partial t_1(0, \tau)}{\partial x} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{\partial t_2(0, \tau)}{\partial x}.$$

Для упрощения решения примем следующие начальные условия:

$$t_1(x, 0) = t_2(x, 0) = \theta_2(0) = 0.$$

Применяя к системе уравнений и граничным условиям преобразование Лапласа, получим решение системы в виде

$$\theta_1(s, x) = A \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_1}} x + B \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_1}} x + \frac{\omega}{c_1 \gamma_1 s^2},$$

$$\theta_2(s, x) = C \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a_2}} x + D \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a_2}} x,$$

где θ_1 и θ_2 — изображение t_1 и t_2 соответственно;

$$A = \frac{(Bi_2 \operatorname{sh} \beta_1 + \beta_1 \operatorname{ch} \beta_1) Bi_2 \theta_2(s) - \kappa Bi_1 (Bi_2 \operatorname{sh} \beta_2 + \beta_2 \operatorname{ch} \beta_2) + (Bi_1 \operatorname{sh} \beta_1 + \beta_1 \operatorname{ch} \beta_1) (Bi_2 \operatorname{ch} \beta_2 + \beta_2 \operatorname{sh} \beta_2) \frac{\omega}{c_1 \gamma_1 s^2}}{(Bi_2 \operatorname{ch} \beta_2 + \beta_2 \operatorname{sh} \beta_2) (Bi_1 \operatorname{sh} \beta_1 + \beta_1 \operatorname{ch} \beta_1) + \kappa (Bi_1 \operatorname{ch} \beta_1 + \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1) (Bi_2 \operatorname{sh} \beta_2 + \beta_2 \operatorname{ch} \beta_2)};$$

$$B = \frac{-(Bi_1 \operatorname{ch} \beta_1 + \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1) Bi_2 \theta_2(s) + (Bi_2 \operatorname{ch} \beta_2 + \beta_2 \operatorname{sh} \beta_2) \times \times (Bi_1 \operatorname{sh} \beta_1 + \beta_1 \operatorname{ch} \beta_1 - Bi_1) \frac{\omega}{c_1 \gamma_1 s^2}}{(Bi_2 \operatorname{ch} \beta_2 + \beta_2 \operatorname{sh} \beta_2) (Bi_1 \operatorname{sh} \beta_1 + \beta_1 \operatorname{ch} \beta_1) + \kappa (Bi_1 \operatorname{ch} \beta_1 + \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1) (Bi_2 \operatorname{sh} \beta_2 + \beta_2 \operatorname{ch} \beta_2)};$$

$$C = \frac{(Bi_1 \operatorname{sh} \beta_2 + \beta_2 \operatorname{ch} \beta_2) Bi_2 \theta_2(s) + (Bi_2 \operatorname{sh} \beta_2 + \beta_2 \operatorname{ch} \beta_2) \times \times (Bi_1 \operatorname{ch} \beta_1 + \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 - Bi_1) \kappa \frac{\omega}{c_1 \gamma_1 s^2}}{(Bi_2 \operatorname{ch} \beta_2 + \beta_2 \operatorname{sh} \beta_2) (Bi_1 \operatorname{sh} \beta_1 + \beta_1 \operatorname{ch} \beta_1) + \kappa (Bi_1 \operatorname{ch} \beta_1 + \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1) (Bi_2 \operatorname{sh} \beta_2 + \beta_2 \operatorname{ch} \beta_2)};$$

$$D = \kappa \frac{-(Bi_1 \operatorname{ch} \beta_1 + \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1) Bi_2 \theta_2(s) + (Bi_2 \operatorname{ch} \beta_2 + \beta_2 \operatorname{sh} \beta_2) \times \times (Bi_1 \operatorname{ch} \beta_1 + \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 - Bi_1) \frac{\omega}{c_1 \gamma_1 s^2}}{(Bi_2 \operatorname{ch} \beta_2 + \beta_2 \operatorname{sh} \beta_2) (Bi_1 \operatorname{sh} \beta_1 + \beta_1 \operatorname{ch} \beta_1) + \kappa (Bi_1 \operatorname{ch} \beta_1 + \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1) (Bi_2 \operatorname{sh} \beta_2 + \beta_2 \operatorname{ch} \beta_2)};$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{s}{a_1}} L_1; \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{s}{a_2}} L_2; \quad \kappa = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \sqrt{\frac{a_2}{a_1}};$$

$$Bi_1 = \frac{\alpha_1 L_1}{\lambda_1}; \quad Bi_2 = \frac{\alpha_2 L_2}{\lambda_2}.$$

Чтобы оценить перегрев, вызванный выделяемой мощностью ω , необходимо найти разность температур в произвольном сечении термометра при данном значении ω и при $\omega = 0$. Используя первое приближение разложения $\operatorname{sh} \beta = \beta + \frac{\beta^3}{6}$ и $\operatorname{ch} \beta = 1 + \frac{\beta^2}{2}$, и учитывая члены порядка не выше β^2 , получим выражение для разности температур

$$\Delta \theta = \theta_{1\omega} - \theta_{1\omega=0} = \frac{\omega}{c_1 \gamma_1} \cdot \frac{L_1^2}{a_1} \cdot \frac{M}{s(N + P_2)}.$$

Перейдя к прежним обозначениям, запишем

$$\Delta t = t_{1w}(x, \tau) - t_{1w=0}(x, \tau) = \frac{w}{c_1 \gamma_1} \cdot \frac{L_1^2}{a_1} \cdot \frac{M}{N} \left(1 - e^{-\frac{N}{P} \tau}\right), \quad (1)$$

где

$$\frac{N}{P} = \frac{Bi_1 (Bi_2 + 1) + \omega \kappa Bi_2 (Bi_1 + 1)}{\frac{L_1^2}{a_1} \left[(Bi_2 + 1) \left(\frac{Bi_1}{2} + 1\right) + \omega \kappa (Bi_1 + 1) \left(\frac{Bi_2}{2} + 1\right) \right] + \frac{L_2^2}{a_2} \left[\frac{Bi_2}{6} + \frac{1}{2} \right] + \omega \kappa (Bi_1 + 1) \left(\frac{Bi_2}{2} + 1\right)}. \quad (1a)$$

Как видно из выражений (1) и (1a), погрешность от перегрева измерительным током изменяется во времени экспоненциально с показателем N/P и определяется размерами, теплофизическими свойствами системы и условиями ее теплообмена с окружающей средой.

Оценим перегрев для $\tau \rightarrow \infty$, тогда выражение (1) можно записать

$$\Delta t = \frac{w}{c_1 \gamma_1} \cdot \frac{L_1^2}{a_1} \cdot \frac{M}{N}, \quad (2)$$

где

$$\frac{M}{N} = \frac{\kappa \omega (1 + Bi_2) \left(1 + \frac{Bi_1}{2}\right) + Bi_2 \left(1 + \frac{Bi_1}{2}\right) \rho - [Bi_2 (1 + Bi_1) + \kappa \omega (1 + Bi_2) Bi_1] \frac{\rho^2}{2}}{Bi_2 (1 + Bi_1) + \kappa \omega Bi_1 (1 + Bi_2)};$$

$$\rho = \frac{x}{L_1}; \quad \omega = \frac{L_2}{L_1} \cdot \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}.$$

Из выражения (2) следует, что при заданных условиях теплообмена на поверхности перегрев прямо пропорционален выделяемой мощности и отношению L^2/a . Как показано в работе [2], L^2/a определяет инерционность бесконечной пластины толщиной L с коэффициентом температуропроводности a . Из уравнения (2), задаваясь допустимым перегревом Δt , можно определить допустимую потребляемую мощность термометра при заданных условиях теплообмена и теплофизических свойствах системы.

Если соотношение между мощностью и теплоемкостью системы позволяет допустить, что перегрев термометра не вызывает изменений в температурном поле объекта, то оценка перегрева значительно упрощается. В этом случае достаточно определить температурное поле одной пластины с постоянным источником тепла. Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{w}{c \gamma}.$$

При следующих граничных и начальных условиях:

$$\frac{\partial t(L_1, \tau)}{\partial x} + \frac{\alpha}{\lambda} [t(L_1, \tau)] = 0; \quad t(0, \tau) = t(\tau); \quad t(x, 0) = 0$$

решение задачи в принятых изображениях будет

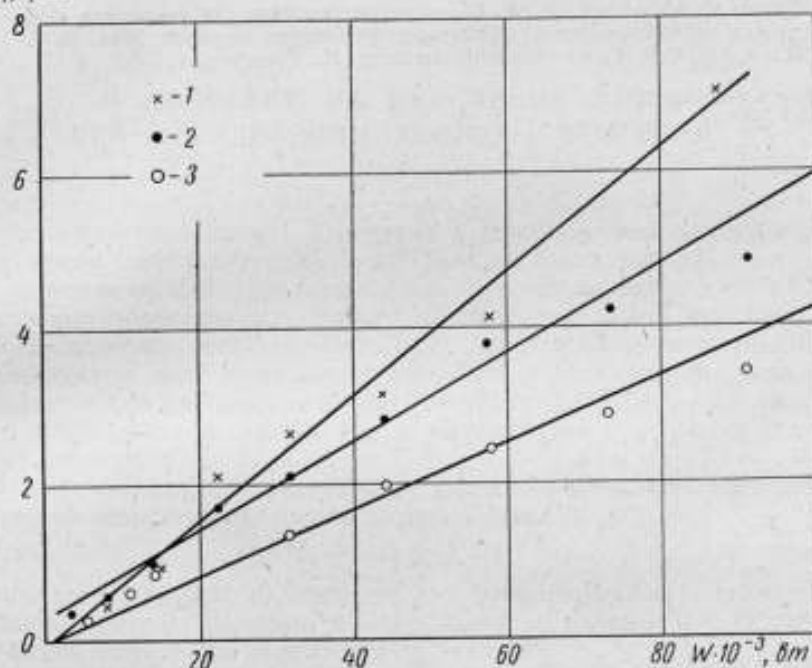
$$\theta(x, s) = \left[\theta(s) - \frac{w}{c \gamma s^2} \right] \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} x - \frac{\left[\theta(s) - \frac{w}{c \gamma s^2} \right] (Bi \operatorname{ch} \beta + \beta \operatorname{ch} \beta) + Bi \frac{w}{c \gamma s^2}}{Bi \operatorname{sh} \beta + \beta \operatorname{ch} \beta} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} x + \frac{w}{c \gamma s^2}.$$

Как и в предыдущей задаче, используя приближение, находим, что при $\tau \rightarrow \infty$ перегрев определяется формулой

$$\Delta t = \frac{\omega}{c\gamma} \cdot \frac{L^2}{a} \cdot \frac{\left(\frac{Bi}{2} + 1\right) \rho - (Bi_1 + 1) \frac{\rho^2}{2}}{Bi + 1}, \quad (3)$$

При $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \ll Bi_2 \left(\omega = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{L_2}{L_1}\right)$ уравнение (2) переходит в (3). Следовательно, для термометров из теплоизоляционного материала при измерениях на тонких металлических стенках, находящихся в условиях

$\Delta t, \text{град}$



Зависимость перегрева термометров от выделяемой мощности.

1, 2 и 3 — соответственно пластины из нержавеющей стали, меди и дюралюминия.

интенсивного теплообмена, перегрев достаточно определять по формуле (3). При измерениях же на объектах большой толщины или с малыми коэффициентами теплопроводности и теплообмена нужно пользоваться выражением (2).

Из выражений для двухслойной системы (2) и пластины (3) видно, что, как и для термометров погружения (1), перегрев Δt пропорционален термической инерции термометра. Зависимость между перегревом и термической инерцией можно использовать как один из возможных методов определения тепловой инерции поверхностных термометров, особенно, когда они закреплены на исследуемом объекте.

Величину перегрева можно определить экспериментально, т. е. непосредственно в условиях применения термометра. В настоящей работе это сделано с целью проверки расчетной формулы (2). Эксперимент проводили с плоскими термометрами на слюде и стеклоткани. Термометр наклеивали поочередно на пластины из меди, нержавеющей стали и дюралюминия толщиной 2 мм. Толщина термометра составляла 0,11 мм. Пластины с термо-

метром подвешивали в спокойном воздухе. Результаты измерений перегрева приведены на рисунке. Расхождение полученных данных с результатами вычислений по формуле (2) не превышает 20%. Следует отметить, что задача решена в условиях идеального теплового контакта между стенкой и термометром. Как и в практике, термометр наклеивали на поверхность стенки, что создавало дополнительное термическое сопротивление между ними и привело к несколько завышенным значениям перегрева по сравнению с расчетом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тартаковский Д. Ф. О некоторых особенностях коррекции динамических характеристик термометров. «Инженерно-физический журнал», 1964, № 1.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., Гостехиздат, 1952.

Поступила в редакцию
1/III 1968 г.

О ПОПРАВКЕ НА ОКИСЛЕНИЕ АЗОТА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛОТЫ СГОРАНИЯ

Наименьшая погрешность измерения в калориметрии сжигания в настоящее время составляет $\pm 0,01 \div 0,02\%$. При таких точных измерениях особое значение приобретает правильное определение поправок на побочные тепловые процессы, в частности на окисление азота при сжигании в бомбе исследуемых веществ. Появление окислов азота может быть вызвано наличием как азота, содержащегося в техническом кислороде, используемом для наполнения бомбы (согласно ГОСТ 5583—58, содержание его допускается до 1,5%), так и оставшегося в бомбе после продувания ее кислородом.

При горении веществ развивается достаточно высокая температура, при которой возможно окисление азота по реакции



В результате резкого охлаждения при прекращении горения происходит «замораживание» реакции, и окись азота не разлагается. Образовавшаяся окись азота легко окисляется до двуокиси

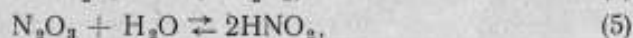


которая, в свою очередь, реагируя с водой, имеющейся в бомбе, превращается в азотную кислоту



Выделяющаяся в результате реакции (3) окись азота NO снова окисляется кислородом до двуокиси. Таким образом, процесс образования азотной кислоты продолжается до тех пор, пока концентрация окиси азота не станет ничтожно малой.

Наряду с основными химическими процессами, в калориметрической бомбе может происходить образование азотистой кислоты



которая, будучи неустойчивой в присутствии азотной кислоты, разлагается на двуокись азота, окись азота и воду



Следовательно, после сжигания вещества в калориметрической бомбе в газовой фазе могут присутствовать двуокись азота, окись азота и азо-

тистый ангидрид, которые по реакциям (2)—(5) переходят затем в азотную и азотистую кислоты.

В настоящее время тепловой эффект процесса окисления азота в калориметрической бомбе учитывают, определяя количество азотной кислоты после калориметрического опыта [7] путем титрования бомбовой жидкости 0,1 н. раствором щелочи с использованием в качестве индикатора метилоранжа. Результаты титрования бомбовой жидкости, полученные за длительный период работы, после сжигания бензойной кислоты в калориметрической бомбе отличались друг от друга больше, чем это следовало ожидать от погрешности метода титрования. Анализ литературных данных по образованию азотной кислоты [1—7, 11] не дал исчерпывающего объяснения такому расхождению результатов титрования, поскольку имеющиеся сведения относятся к условиям образования азотной кислоты, далеким от условий процесса, проходящего в калориметрической бомбе. Для выяснения причин этого расхождения была изучена зависимость количества образующейся азотной кислоты от продолжительности выдержки продуктов сгорания в бомбе после сжигания в ней вещества, исходной концентрации азота, размера пламени и давления кислорода в калориметрической бомбе. Сжигали бензойную кислоту, аттестованную во ВНИИМ (чистота 99,995 моль %). Опыты проводили в одной и той же бомбе, входной и выходной клапаны которой расположены в нижней части. В бомбу объемом 300 см^3 помещали 1 см^3 дистиллированной воды. Кислород, которым наполняли бомбу, очищали от горючих и механических примесей, пропуская его через печь и очистительную систему. Давление кислорода в бомбе, измеряемое манометром 0,25 класса точности с ценой деления $0,196 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$ ($0,2 \text{ кгс/см}^2$), было равно $29,42 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$ (30 кгс/см^2). Во время сжигания вещества бомба была погружена в воду комнатной температуры. После смыва внутренних частей бомбы раствор азотной кислоты разбавляли до 100 см^3 ; титрование производили 0,1 н. раствором NaOH с использованием метилоранжа в качестве индикатора. При расчетах теплоту образования азотной кислоты принимали равной $57,8 \text{ кДж/моль}$ ($13,8 \text{ ккал/моль}$).

Зависимость количества образующейся азотной кислоты от времени выдержки продуктов сгорания в бомбе

Как показали результаты опытов, проведенных с пятью баллонами кислорода (рис. 1 и табл. 1), в течение первого часа кислотность бомбовой жидкости резко увеличивается, что объясняется реакцией образовавшихся окислов с водой. При этом наряду с азотной образуется и азотистая кислота. Повышение концентрации азотной кислоты приводит к разложению азотистой кислоты, в результате чего в течение второго часа кислотность бомбовой жидкости уменьшается. Наконец, последующее увеличение кислотности, наблюдаемое после двух часов выдержки, связано с тем, что окислы азота, вновь выделившиеся при разложении азотистой кислоты, вступают в реакцию с водой. Термодинамическое равновесие в калориметрической бомбе практически наступает спустя 24 ч. Такое объяснение подтверждается результатами качественной реакции с реактивом Грисса на ион NO_2^- в бомбовой жидкости. Обнаружено, что в промежутке от 15 мин до 1 ч азотистая кислота присутствует в бомбовой жидкости. Слабые следы азотистой кислоты были обнаружены Хафманом [10] при сжигании гипуровой кислоты. К сожалению, он не указывает время выдержки продуктов сгорания в бомбе.

Таблица 1

Зависимость количества образующейся азотной кислоты от времени выдержки продуктов сгорания в бомбе

Время выдержки, τ	№ баллона				
	1	2	3	4	5
Кислотность раствора, e-жк					
0,05	4,46	3,03			
0,25	4,89	3,59			
0,50	6,47	4,76			
0,75	6,86	5,29			
1,00	7,75	5,68	10,16	2,11	4,65
1,25	6,78	5,94			
1,50	—	4,95			
1,75	—	4,71			
2,00	—	5,24	6,57	1,60	3,25
4,00			7,89	1,79	4,00
8,00			9,14	1,94	4,22
16,0			9,70	2,06	4,51
24,00			9,00	2,08	4,60
32,00			10,10	2,08	4,65
36,00	7,32	6,19			
72,00	8,08	6,38	10,32	2,10	4,83

Примечание. Приведены средние значения трех определений при строго воспроизводимых условиях; максимальное отклонение от среднего составляет 5%.

Образование азотной кислоты из двуокиси азота протекает значительно дольше калориметрического опыта (15 мин), т. е. к концу главного его периода в бомбе присутствует как азотная кислота в жидкой фазе, так и непрореагировавшая к этому времени двуокись азота в газовой фазе. Неполное поглощение окислов азота наблюдается при промышленном производстве азотной кислоты. Так, даже в современных установках, где процесс проводится под давлением, содержание окислов азота в отходящих газах составляет 0,1—0,2% об. [11], что объясняется замедлением реакции образования азотной кислоты при уменьшении концентрации окислов азота. Особенно сильно это проявляется при малых концентрациях окислов азота (0,2%). Максимальное количество окислов азота, определенное пересчетом количества образовавшейся азотной кислоты, к 36 ч после сжигания в бомбе составило 0,02%. Следовательно, поправка q на окисление азота должна состоять из теплового эффекта q_k образования азотной кислоты к моменту окончания главного периода калориметрического опыта и теплового эффекта q_0 образования окислов азота, которые не прореагировали к этому времени с парами воды и находятся в газовой фазе

$$q = q_k - q_0 \quad (7)$$

Для определения q_k необходимо знать количество азотной кислоты, образовавшейся к концу главного периода (на оси абсцисс рис. 1а отмечен штрихом). С этой целью проводят холостой опыт: сжигают бензойную

кислоту и спустя 15 мин вскрывают бомбу. Смыв бомбы титруют. Тепловой эффект q_k рассчитывают, исходя из количества образовавшейся азотной кислоты и теплоты ее образования при 25° С для 0,10 н. раствора (13,8 ккал/моль).

Для определения q_0 продукты сгорания выдерживают в бомбе в течение 36 ч, чтобы гарантировать наступление термодинамического равновесия, а затем проводят анализ газа и калориметрической жидкости. Из общего

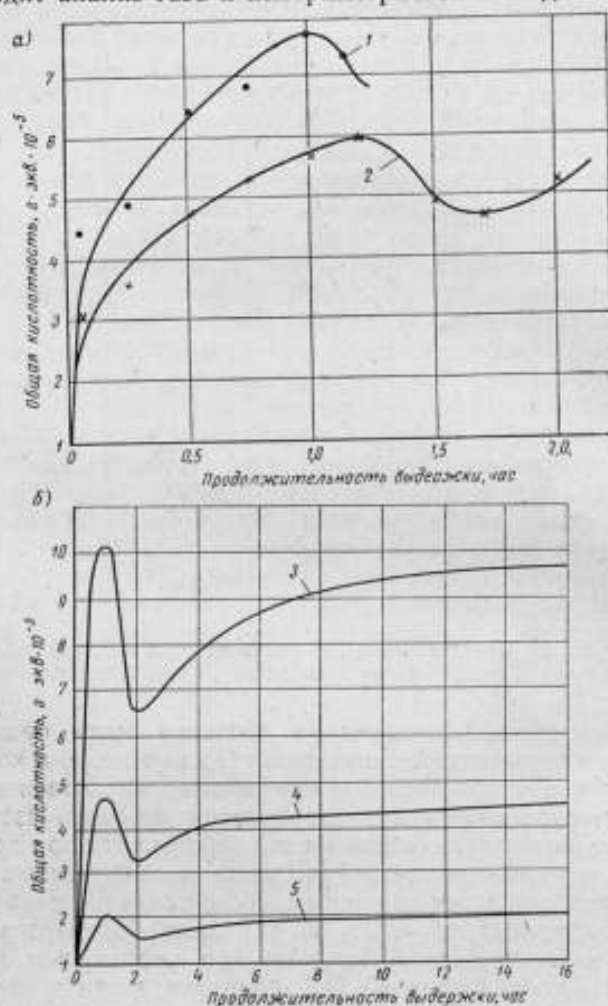


Рис. 1. Изменение общей кислотности бомбовой жидкости в зависимости от времени выдержки
1-5 — номера баллонов.

количества образовавшейся азотной кислоты вычитают количество, полученное по истечении 15 мин. Эта разность, пересчитанная на двуокись азота, в сумме с двуокисью азота, определенной газовым анализом, дает общее количество двуокиси азота, находившейся в газовой фазе в момент окончания главного периода калориметрического опыта. Найденное количество NO_2 умножают на значение теплоты образования двуокиси азота при 25° С $29,42 \cdot 10^6 \text{ н/м}^2$ (30 ккал/см^2), равное $33,8 \text{ кдж/моль}$ ($8,08 \text{ ккал/моль}$).

По экспериментальным данным (табл. 1) рассчитывают тепловой эффект окисления азота. Количество азотной кислоты к концу главного периода

было равным $4,89 \cdot 10^{-5}$ г·экв, через 36 ч оно уже составляло $7,32 \times 10^{-5}$ г·экв, т. е. увеличилось на $2,43 \cdot 10^{-5}$ г·экв, а количество двуокиси азота соответственно уменьшилось на $2,43 \cdot 10^{-5}$ г·экв. Количество двуокиси азота, находившейся к этому времени в газовой фазе, было найдено методом поглощения активной двуокиси марганца. Оно оказалось равным $4,3 \cdot 10^{-5}$ г·экв и вместе с двуокисью азота в газовой фазе, обнаруженной через 36 ч, составило $6,73 \cdot 10^{-5}$ г·экв. Таким образом, к концу главного периода калориметрического опыта в бомбе было $4,89 \cdot 10^{-5}$ г·экв азотной кислоты и $6,73 \cdot 10^{-5}$ г·экв двуокиси азота при соответствующих тепловых эффектах $q_k = 2,84$ дж (0,68 кал) и $q_o = 2,3$ дж (0,5 кал). Суммарный тепловой эффект равен 0,54 дж, что по отношению к теплоте сгорания бензойной кислоты составляет 0,002%.

Определение теплового эффекта способом, принятым в калориметрии [7], приводит к значению 4,5 дж, когда титрование выполнено спустя час с момента зажигания. Расхождение между этим значением и истинным значением поправки (0,5 дж) составляет по абсолютной величине 3,9 дж, или 0,02% от теплоты сгорания бензойной кислоты. Величина этого расхождения может зависеть от продолжительности главного периода, концентрации азота в баллоне кислорода, выдержки бомбы после сжигания до титрования и др.

Зависимость количества образующейся азотной кислоты от исходной концентрации азота в кислороде

Исходную концентрацию азота в калориметрической бомбе определяют как концентрацией его в кислороде, которая колеблется для различных баллонов в довольно широких пределах, так и количеством азота, оставшимся в бомбе после продувания ее кислородом. Последнее зависит от времени продувания. Была исследована зависимость количества образовавшейся азотной кислоты в бомбе от продолжительности продувания бомбы кислородом для трех баллонов. Зависимость для одного из баллонов представлена на рис. 2 и в табл. 2. Продувание бомбы производилось при давлении кислорода, равном $1,96-2,94 \cdot 10^5$ н/м² ($2 \div 3$ кгс/см²).

Таблица 2

Зависимость количества образующейся азотной кислоты от времени продувания калориметрической бомбы		
Время продувания, мин	Кислотность раствора в бомбе (при трех измерениях), г·экв·10 ⁻⁵	Средняя кислотность, г·экв·10 ⁻⁵
0	5,04; 5,44; 5,12	5,20
1	2,76; 2,71; 2,71	2,73
5	1,77; 1,79; 1,79	1,78
10	1,79; 1,79; 1,79	1,79
15	1,79; 1,79; 1,79	1,79

Примечание. Титрование производили спустя 48 ч после зажигания. Бомбу выдерживали в воде при 25° С. Масса бензойной кислоты — 1 г.

Полученные данные показали, что для продувания бомбы достаточно 5 мин, так как дальнейшее увеличение времени не влияет на количество

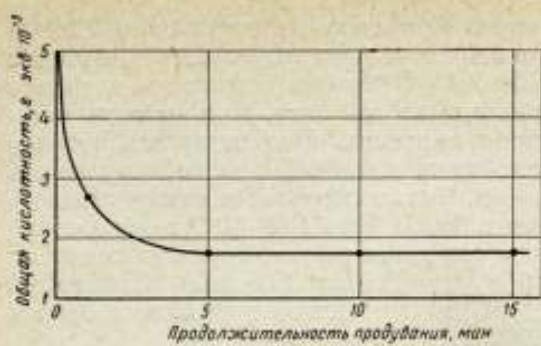


Рис. 2. Влияние времени продувания бомбы кислородом на общую кислотность бомбовой жидкости.

Рис. 3. Влияние давления на общую кислотность бомбовой жидкости.

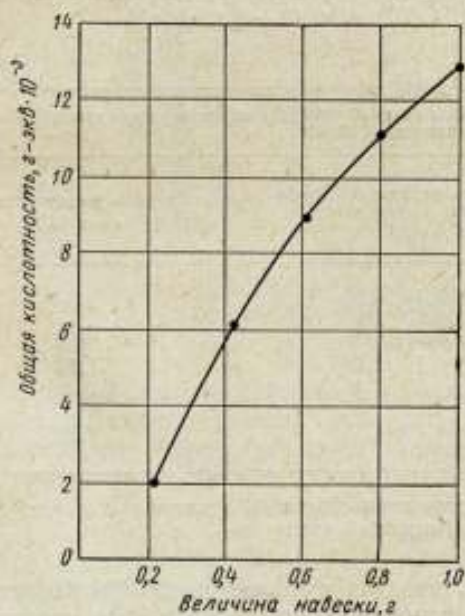
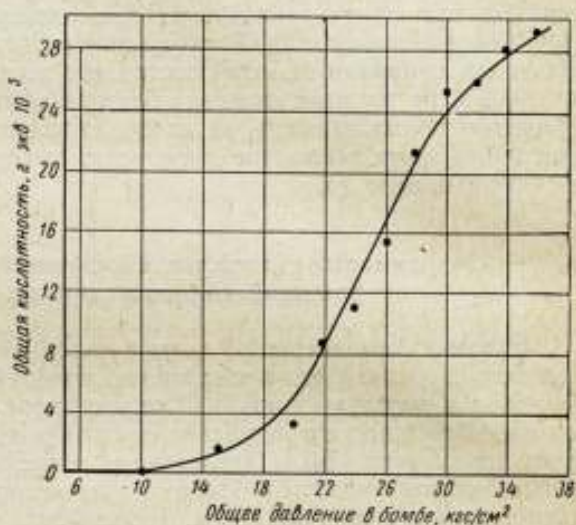


Рис. 4. Изменение общей кислотности бомбовой жидкости в зависимости от массы сжигаемого вещества.

образующейся азотной кислоты, которое, по-видимому, является постоянным для определенной конструкции бомбы и скорости продувания.

Зависимость количества образующейся азотной кислоты от давления кислорода в бомбе и массы сжигаемого вещества.

При исследовании области давлений от 9,80 до $35,30 \cdot 10^5$ н/м² (10 до 36 кгс/см²) и выдержке бомбы до титрования в течение 36 ч были получены следующие результаты. Из рис. 3 видно, что при повышении общего давления кислорода количество образующейся азотной кислоты увеличивается. При наибольшей концентрации азота отклонение давления на $0,98 \cdot 10^5$ н/м² (1 кгс/см²) от заданного приводит к изменению поправки q на 1 дж.

Давление кислорода н/м ² ·10 ⁵ (кгс/см ²) (с точностью ±0,1)	4,90	9,80	14,71	19,61	21,58	23,54	25,50	27,46	29,42	31,38	33,34	35,30
Кислотность раствора в бомбе, г·экв·10 ⁻³	0	0	1,58	3,16	8,92	11,7	15,4	21,1	25,2	25,8	27,7	28,8

Эксперименты по сжиганию навесок бензойной кислоты различной массы (рис. 4) показали, что количество образующейся азотной кислоты возрастает с увеличением массы бензойной кислоты.

Полученные зависимости количества образующейся азотной кислоты от давления кислорода и массы сжигаемого вещества легко объяснить, если учесть, что окисление азота происходит только при высокой температуре, т. е. только в зоне горения вещества. Поэтому количество образующихся окислов азота должно возрастать с увеличением зоны горения и ее температуры. Действительно, из рис. 3 видно, что концентрация окислов растет с повышением давления кислорода, когда увеличивается скорость горения, а следовательно, и температура зоны [8]. Это увеличение происходит до тех пор, пока не наступает такое состояние, когда весь азот, находящийся в зоне горения, окисляется и дальнейшее повышение давления не может привести к увеличению количества азотной кислоты. Предположение о том, что окисление азота происходит только в зоне горения, подтверждается также опытами по сжиганию навесок вещества различной массы, образующих факелы различных размеров. Полученная нелинейная зависимость (рис. 4) является следствием того, что окисление азота происходит на поверхности пламени, пропорциональной квадрату радиуса факела. Поэтому, если зона горения значительно меньше объема бомбы, то при сжигании одинаковых навесок бензойной кислоты в бомбах различного объема образуется одинаковое количество азотной кислоты, что и наблюдалось в наших экспериментах. Полученные результаты не согласуются с данными работы [9], авторы которой, к сожалению, не указали, отличались ли бомбы только по объему или также по конструкции.

Обнаружено, что конструктивные элементы бомбы, определяющие соотношение между размером зоны горения и объемом бомбы, влияют на количество образующихся окислов азота. Так, при сжигании бензойной кислоты в строго одинаковых условиях, но при разной высоте тигля в бомбе азотной кислоты образуется больше при низком положении чашечки, когда, по-видимому, высота горения не превышает расстояния между тиглем и верхней поверхностью бомбы. В остальных случаях, когда она больше этого расстояния, сказывается охлаждающее действие поверхности бомбы на размер зоны горения, а значит, и на количество образующихся окислов азота.

Заклучение

Изучение процесса окисления азота в калориметрической бомбе позволило установить, что к концу опыта, когда вскрывают бомбу, реакция взаимодействия двуокиси азота с водой не заканчивается и поэтому в составе конечных продуктов содержится не только азотная кислота, но и двуокись азота. К концу главного периода количество каждого компонента зависит от исходной концентрации азота в кислороде, размера пламени при сгорании вещества и времени продувания бомбы кислородом. Количество образующейся азотной кислоты зависит от времени выдержки продуктов сгорания в бомбе. В настоящее время в калориметрической практике учитывают только процесс образования азотной кислоты. На основании проведенных исследований предлагается методика определения поправки на окисление азота с учетом неполного перехода окислов азота в азотную кислоту. В связи с уточнением структуры поправки методика ее определения должна быть изменена. Для вычисления поправки необходимо найти количество азотной кислоты, образовавшейся к концу главного периода калориметрического опыта, а затем определить количество двуокиси азота, находившейся в газовой фазе в бомбе к этому же моменту.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chambers F. S., Sherwood T. K., *Industr. Engng. Chem.*, 1937, 29, 1415.
2. Denbigh K. G., Prince A. J., *J. Chem. Soc.*, 1947, 790.
3. Candle P. G., Denbigh K. G., *Trans. Farada Soc.*, 1953, 49, 39.
4. Peters M. S., Ross C. P., Klein S. J. E., *J. Amer. Inst. Chem. Engrs.* 1955, 1, 105.
5. Wendel H. M., Pigford R. L., *J. Amer. Inst. Chem. Engrs.*, 1958, 4, 249.
6. Dekker W. A., Suseck R., Kramers H., *Chem. Engng. Science*, 1959, 11, 66.
7. Premier Rapport de la Commission Permanente de Thermochemie. Union Internationale de Chimie. Paris, 1934.
8. Будников М. А., Левкович Н. А., Быстров И. В., Сиротинский В. Ф., Шехтер Б. И. Взрывчатые вещества и пороха. М., Оборонгиз, 1955.
9. Mott R. A., Parker C. *Fuel*, т. 38, № 2, 1959.
10. Huffman H. M. *J. Am. Chem. Soc.*, 1938, 60, 1171.
11. Ullmanns. *Encyklopädie der Technischen Chemie* 3 Auflage B. 15, 1964.

Поступила в редакцию
1/III 1968 г.

РАСЧЕТ АКСИАЛЬНЫХ ПОТЕРЬ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТВЕРДЫХ МАТЕРИАЛОВ

В настоящее время для определения теплопроводности твердых материалов широко применяют методы аксиального теплового потока, основанные на предположении об одномерности температурного поля. В действительности, из-за несовершенства изоляции происходят потери тепла с боковой поверхности образца. Однако эти потери либо рассматривают как радиальные [1, 2, 3], либо вообще не учитывают [4, 5, 6]. Для уменьшения радиальных потерь тепла пользуются различными методами тепловой защиты образца [7, 8, 9]; при этом наибольший эффект достигается с помощью охранных цилиндров, на которых создается такое же распределение температур по длине, как и на образце. В этом случае радиальные потери практически полностью отсутствуют [10, 11]. Однако наряду с радиальными существуют аксиальные потери тепла по изоляции, которые не устраняются даже применением охранных цилиндров. Погрешность, вызванная этими потерями, может быть довольно существенной. В работах метрологического характера учет аксиальных потоков тепла по изоляции является необходимым.

В настоящей работе проведен анализ относительной погрешности измерения теплопроводности, обусловленной этими потерями, при использовании широко распространенного метода двух образцов (рис. 1).

Для оценки относительной погрешности измерения теплопроводности рассматривалась система образец—изоляция (рис. 2). В силу симметрии системы относительно плоскости нагревателя достаточно проанализировать только половину системы. Плоский источник радиуса R_1 с равномерным распределением плотности теплового потока расположен на одном из оснований цилиндрического образца того же радиуса. Образец (теплопроводностью λ_1) окружен тепловой изоляцией (теплопроводностью λ_2), наружный радиус которой R_2 . На противоположном основании образца и изоляции с помощью холодильника поддерживается постоянная температура T . Не нарушая общности, можно принять $T = 0$. Распределение температур по наружной и внутренней поверхностям изоляции одинаково. Для расчета погрешности определения теплопроводности, возникающей из-за боковых потерь тепла, необходимо знать распределение температур в системе образец—изоляция.

Качественная картина температурного поля и тепловых потоков представлена на рис. 3.

Исследуемое температурное поле можно описать системой дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где t и θ — соответственно температура образца и изоляции. Граничные условия для данной модели формулируются следующим образом:

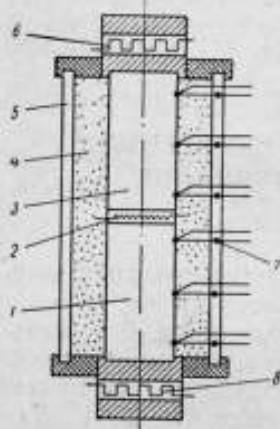


Рис. 1. Схема метода аксиального теплового потока:

1, 3 — испытуемые образцы цилиндрической формы; 2 — плоский нагреватель; 4 — изоляция; 5 — охранный цилиндр; 6, 8 — холодильники; 7 — контрольные дифференциальные термометры.

Системы уравнений (1) с граничными условиями (2) решены в данной работе методом конечных интегральных преобразований. Искомые температуры представлены в виде рядов

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} M_k(r) f_k(z) \quad \text{и} \quad \theta = \sum_{k=1}^{\infty} N_k(r) \varphi_k(z), \quad (3)$$

где $M_k(r)$ и $N_k(r)$ — функции, зависящие только от координаты r ; $f_k(z)$ и $\varphi_k(z)$ — собственные функции.

Выражения для $M_k(r)$ и $N_k(r)$ можно найти из условий ортонормировки

$$M_k(r) = \int_0^H t f_k(z) dz; \quad (3a)$$

$$N_k(r) = \int_0^H \theta \varphi_k(z) dz. \quad (3b)$$

Функции $f_k(z)$ и $\varphi_k(z)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d^2 f_k(z)}{dz^2} = -\mu_k^2 f_k(z); \quad \frac{d^2 \varphi_k(z)}{dz^2} = -\nu_k^2 \varphi_k(z) \quad (4)$$

и граничным условиям [12]

$$f_k|_{z=0} = 0; \quad \varphi_k|_{z=0} = 0; \quad (4a)$$

$$\frac{df_k}{dz} \Big|_{z=H} = 0; \quad \frac{d\varphi_k}{dz} \Big|_{z=H} = 0. \quad (4b)$$

Из уравнения (4) находим

$$f_k(z) = A_k \sin(\mu_k z), \quad (5)$$

где μ_k — собственные числа.

Удовлетворяя условию (4b), получим

$$\mu_k \cos \mu_k H = 0. \quad (6)$$

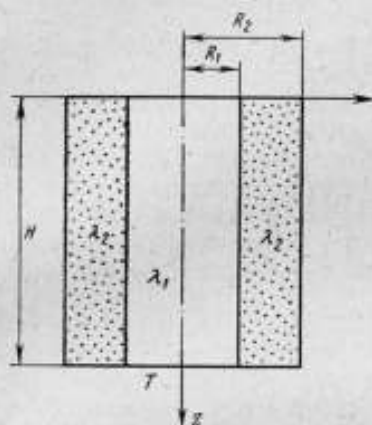


Рис. 2. Расчетная модель для оценки относительной погрешности измерения теплопроводности.

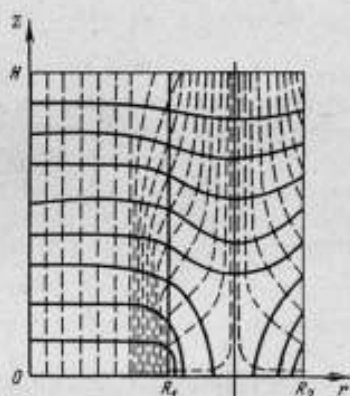


Рис. 3. Температурное поле системы. Сплошными линиями изображены изотермы, пунктирными — линии тока.

Решение $\mu_k = 0$ не имеет физического смысла, следовательно,

$$\mu_k = \frac{\pi}{2H} (2k - 1),$$

т. е.

$$f_k(z) = A_k \sin \left[\frac{\pi}{2H} (2k - 1) z \right]. \quad (7)$$

Значение произвольной постоянной A_k находим из условий ортонормировки

$$A_k = \sqrt{\frac{2}{H}},$$

следовательно,

$$f_k(z) = \sqrt{\frac{2}{H}} \sin \left[\frac{\pi}{2H} (2k - 1) z \right].$$

Аналогично получаем

$$\varphi_k(z) = \sqrt{\frac{2}{H}} \sin \left[\frac{\pi}{2H} (2k - 1) z \right] \equiv f_k(z).$$

Умножая уравнения (1) на соответствующие собственные функции и dz и интегрируя затем в интервале от 0 до H , приходим к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dM_k}{dr} \right) + \frac{\partial t}{\partial z} f_k(z) \Big|_0^H - t \frac{df_k(z)}{dz} \Big|_0^H + \int_0^H t \frac{d^2 f_k(z)}{dz^2} dz = 0, \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dN_k}{dr} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial z} f_k(z) \Big|_0^H - \Theta \frac{df_k(z)}{dz} \Big|_0^H + \int_0^H \Theta \frac{d^2 f_k(z)}{dz^2} dz = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

При этом последние три слагаемые в каждом уравнении получены интегрированием по частям.

Из уравнения (4) следует, что

$$\int_0^H t \frac{d^2 f_k(z)}{dz^2} dz = -\mu_k^2 \int_0^H t f_k(z) dz,$$

или на основании соотношения (3а)

$$\int_0^H t \frac{d^2 f_k(z)}{dz^2} dz = -\mu_k^2 M_k. \quad (9a)$$

Аналогично

$$\int_0^H \Theta \frac{d^2 \varphi_k(z)}{dz^2} dz = -\mu_k^2 N_k. \quad (9b)$$

Для определения величин

$$\frac{\partial t}{\partial z} f_k(z) \Big|_0^H; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} f_k(z) \Big|_0^H; \\ t \frac{df_k(z)}{dz} \Big|_0^H \quad \text{и} \quad \Theta \frac{df_k(z)}{dz} \Big|_0^H$$

используем граничные условия (2 а, б, в, г), а также соотношения (4а, б) для $f_k(z)$ и $\varphi_k(z)$.

После упрощений получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dM_k}{dr} \right) - \mu_k^2 M_k = + \sqrt{\frac{2}{H}} (-1)^k - \frac{W}{\lambda_1} \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dN_k}{dr} \right) - \mu_k^2 N_k = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_k}{dr} \Big|_{r=0} = 0 \\ M_k \Big|_{r=R_1} = N_k \Big|_{r=R_1} \\ \frac{dM_k}{dr} \Big|_{r=R_1} = \varepsilon \frac{dN_k}{dr} \Big|_{r=R_1}, \quad \left(\varepsilon = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \\ N_k \Big|_{r=R_1} = N_k \Big|_{r=R_2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Решение системы уравнений (10, 11) получено в виде

$$t = \frac{W}{\lambda_1} z \left[1 + \varepsilon \frac{8H}{\pi^2 z} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A \frac{J_0(\mu_k r)}{(2k-1)^2} \sin(\mu_k z) \right] \quad (12)$$

и

$$\Theta = \frac{8HW}{\pi^2 \lambda_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B \{ I_0(\mu_k r) [K_0(\mu_k R_2) - K_0(\mu_k R_1)] + K_0(\mu_k r) \times \\ \times [I_0(\mu_k R_1) - I_0(\mu_k R_2)] \} \sin(\mu_k z), \quad (13)$$

где

$$A = \varepsilon I_0(\mu_k R_1) - I_1(\mu_k R_1) \times \\ \times \frac{K_0(\mu_k R_2) I_0(\mu_k R_1) - K_0(\mu_k R_1) I_0(\mu_k R_2)}{I_1(\mu_k R_1) [K_0(\mu_k R_2) - K_0(\mu_k R_1)] + K_1(\mu_k R_1) [I_0(\mu_k R_2) - I_0(\mu_k R_1)]}; \\ B = \frac{I_1(\mu_k R_1)}{\varepsilon [I_0(\mu_k R_1) I_1(\mu_k R_1) [K_0(\mu_k R_2) - K_0(\mu_k R_1)] - I_0(\mu_k R_1) K_1(\mu_k R_1) [I_0(\mu_k R_1) - \\ - I_0(\mu_k R_2)]] - I_1(\mu_k R_1) [K_0(\mu_k R_2) I_0(\mu_k R_1) - K_0(\mu_k R_1) I_0(\mu_k R_2)]};$$

I_0, I_1 — модифицированные функции Бесселя 1-го рода нулевого и первого порядка;

K_0, K_1 — модифицированные функции Бесселя 2-го рода нулевого и первого порядка.

Уравнение (12) описывает температурное поле образца. Второе слагаемое в скобках характеризует отклонение температуры от линейного распределения, вызванное аксиальными потерями тепла по изоляции.

Действительное значение теплопроводности λ при использовании методов аксиального теплового потока следует определять по формуле

$$\lambda = \lambda^* (1 - \psi),$$

где λ^* — кажущееся значение теплопроводности, рассчитанное по данным опыта;

ψ — поправка, учитывающая аксиальные потери тепла по изоляции.

Для определения величины ψ обратимся к уравнению (12). В эксперименте измеряют два значения температуры — в точках ($z = z_1; r = R_1$) и ($z = z_2; r = R_1$), т. е. на поверхности образца. Разность температур в этих точках равна

$$\Delta t = \frac{W}{\lambda_1} (z_1 - z_2) \left\{ 1 + \varepsilon \frac{8H}{\pi^2 (z_1 - z_2)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A \frac{I_0(\mu_k R_1)}{(2k-1)^2} \times \right. \\ \left. \times \left[\sin \frac{\pi}{2H} (2k-1) z_1 - \sin \frac{\pi}{2H} (2k-1) z_2 \right] \right\}. \quad (14)$$

Отсюда

$$\psi = \varepsilon \frac{8H}{\pi^2 \Delta z} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} A \frac{I_0(\mu_k R_1)}{(2k-1)^2} \left\{ \sin \left[\frac{\pi}{2H} (2k-1) z_1 \right] - \right. \\ \left. - \sin \left[\frac{\pi}{2H} (2k-1) z_2 \right] \right\}, \quad (15)$$

или, переходя к относительным размерам,

$$\psi = \varepsilon \frac{8\bar{H}}{\pi^2 \Delta \bar{z}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} A \frac{I_0 \left[\frac{\pi}{2} (2k-1) \frac{1}{\bar{H}} \right]}{(2k-1)^2} \times \\ \times \left\{ \sin \left[\frac{\pi}{2} (2k-1) \frac{\bar{z}_1}{\bar{H}} \right] - \sin \left[\frac{\pi}{2} (2k-1) \frac{\bar{z}_2}{\bar{H}} \right] \right\},$$

где

$$\bar{H} = \frac{H}{R_1}; \quad \Delta\bar{z} = \frac{\Delta z}{R_1}; \quad \bar{R}_2 = \frac{R_2}{R_1}; \quad \bar{z}_1 = \frac{z_1}{R_1}; \quad \bar{z}_2 = \frac{z_2}{R_1}.$$

Геометрические параметры \bar{z}_1 и \bar{z}_2 взаимно связаны, так как обычно термопары расположены симметрично относительно оснований испытуемого образца, т. е.

$$\bar{z}_1 = \frac{1}{2}(\bar{H} + \Delta\bar{z});$$

$$\bar{z}_2 = \frac{1}{2}(\bar{H} - \Delta\bar{z}).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sin \left[\frac{\pi}{2} (2k-1) \frac{\bar{z}_1}{\bar{H}} \right] - \sin \left[\frac{\pi}{2} (2k-1) \frac{\bar{z}_2}{\bar{H}} \right] &= 2 \cos \left[(2k-1) \frac{\pi}{4} \right] \times \\ &\times \sin \left[(2k-1) \frac{\pi}{4} \frac{\Delta\bar{z}}{\bar{H}} \right]. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (15) примет вид

$$\begin{aligned} \psi = \varepsilon \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\bar{H}}{\Delta\bar{z}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} A \frac{J_0 \left[\frac{\pi}{2} (2k-1) \frac{1}{\bar{H}} \right]}{(2k-1)^2} \times \\ \times \cos \left[(2k-1) \frac{\pi}{4} \right] \sin \left[(2k-1) \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\Delta\bar{z}}{\bar{H}} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Поправка ψ является сложной функцией четырех параметров: \bar{R}_2 , \bar{H} , $\Delta\bar{z}$ и ε . Для вычисления ψ была составлена программа на алгоритмическом языке АКИ для ЭВМ «Минск-2». Параметр $\Delta\bar{z} = \varphi \bar{H}$ принимал три значения ($\varphi = 1,0; 0,8; 0,6$), а \bar{H} — значения от 3 до 20. Зависимость ψ от φ и \bar{H} оказалась слабой в указанном диапазоне значений φ и \bar{H} , поэтому ниже приводятся результаты только для $\varphi = 1$ и для $\bar{H} = 3,0$. В таблице представлены значения ψ при фиксированных значениях \bar{R}_2 и ε .

Из таблицы следует, что ψ зависит от \bar{R}_2 и ε и может достигать 15%.

Зависимость $\psi \cdot 10^3$ (в %) от ε и $\frac{R_2}{R_1}$

$\varepsilon \backslash \bar{R}_2$	1,1	1,2	1,5	2,0	2,5
10^{-3}	0,012	0,024	0,059	0,116	0,17
10^{-2}	0,12	0,2	0,59	1,14	1,80
10^{-1}	1,21	2,35	5,55	10,4	14,70

Для более грубой оценки можно рекомендовать приближенную формулу

$$\psi = \varepsilon (\bar{R}_2 - 1).$$

Например, при измерении теплопроводности плавленного кварца ($\lambda_1 = 1 \text{ вт/м}\cdot\text{град}$) и использовании в качестве изоляции вакуумированного порошка алунда ($\lambda_2 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ вт/м}\cdot\text{град}$) величина $\varepsilon \approx 1 \cdot 10^{-2}$. Если радиус изоляции R_2 вдвое больше радиуса образца R_1 , то $\bar{R}_2 - 1 = 1$ и в этом случае поправка на аксиальные потери составляет $\sim 1\%$ от измеряемой величины. Если же вакуум отсутствует, то для этой же изоляции $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{-2}$ и поправка достигает 5%.

Приведенный пример наглядно иллюстрирует значение аксиальных потерь от изоляции и подчеркивает важность их учета при метрологических исследованиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lees C. H., Proc. Roy. Soc. A., 1908, 80, 143.
2. De Haas W. J., Bremmer H., Communications from the Physical Laboratory of the University of Leiden, 1937, 214d, 37.
3. Bock H., Wagenbreth H., Technik, 1963, 8, 1.
4. Gocns E., Grüneisen E., Ann. d. Phys., 1932, 406, 164.
5. Meissner W., Ann. d. Phys., 1915, 44, 1001.
6. Mannchen W., Z. f. Phys., 1920, 2, 373.
7. Donaldson J. W., Metal, Ind. New-York, 1925, 27, 216.
8. Томашев Н. Д., Фридман Я. Б., Труды Всесоюзного научно-исследовательского института авиационных материалов, 1934, вып. 8.
9. Bode K. H., Fritz W., Z. für angew. Physik, 1958, 10, № 10.
10. Laubitz M. J., Canad. J. of Phys., 1960, 38, 7.
11. Marvin Moss, Rev. of Scien. Inst., 1955, 26, 3.
12. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., изд. АН СССР, 1948.

Поступила в редакцию
22/II 1968 г.

О ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОГО РАЗОГРЕВА

Погрешность измерения теплопроводности, возникающая из-за отсутствия учета температурной зависимости теплофизических свойств, подробно рассмотрена в работах О. А. Краева [1, 2] и Е. С. Платунова [3]. Результаты этих работ, полученные решением нелинейного уравнения теплопроводности в виде бесконечного степенного ряда и методом малого параметра, не совпадают. В настоящей работе задача решена методом теории возмущений, отличным от примененных в указанных работах.

При измерении теплопроводности a пластины методом линейного разогрева в большинстве работ расчетной является формула

$$\vartheta = \frac{b}{2a}(x^2 - l^2), \quad (1)$$

полученная в результате решения уравнения

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{b}{a}$$

совместно с граничными условиями

$$\vartheta_{x=l} = 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (3)$$

Здесь ϑ — температура точки x пластины, отсчитываемая от значения температуры ее поверхности;

$2l$ — толщина пластины.

Начало координат $x = 0$ расположено на плоскости симметрии.

Известно, что удельная теплоемкость c , теплопроводность λ и плотность γ веществ зависят от температуры, причем для небольших температурных интервалов эту зависимость можно представить так:

$$c = c_0(1 + \alpha\vartheta);$$

$$\lambda = \lambda_0(1 + \rho\vartheta);$$

$$\gamma = \gamma_0(1 + \beta\vartheta),$$

где индекс 0 указывает на то, что соответствующие величины рассматриваются при температуре поверхности пластины t_0 ($\vartheta = 0$).

Наличие температурной зависимости c , λ и γ приводит к тому, что скорость b изменения температуры во времени зависит от координат. Если на поверхностях пластины скорость изменения температуры b_0 поддерживается строго линейной, то в первом приближении можно принять, что в любой точке пластины

$$b = b_0 (1 + k\theta).$$

То же самое наблюдается при измерении температуропроводности a цилиндра, для которого без учета температурной зависимости c , λ , γ расчетной является формула

$$\theta = \frac{b}{4a} (r^2 - R^2),$$

полученная при решении уравнения

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} = \frac{b}{a},$$

где R — радиус цилиндра;
 r — текущая координата.

Температурное поле пластины

Определение температурного поля пластины в условиях линейного разогрева ее поверхностей сводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{d}{dx} \left[\lambda_0 (1 + \rho\theta) \frac{d\theta}{dx} \right] = c_0 (1 + \alpha\theta) \gamma_0 (1 + \beta\theta) b_0 (1 + k\theta). \quad (4)$$

Разложив искомое решение $\theta(x, \alpha, \rho, \beta, k)$ в ряд Тейлора по малым параметрам α, ρ, β, k вблизи точек $\alpha = 0, \rho = 0, \beta = 0$ и $k = 0$, можно показать [4], что

$$\begin{aligned} \theta(x, \alpha, \rho, \beta, k) = & \theta(x, 0, 0, 0, 0) + [\theta(x, \alpha, 0, 0, 0) - \theta(x, 0, 0, 0, 0)] + \\ & + [\theta(x, 0, \rho, 0, 0) - \theta(x, 0, 0, 0, 0)] + [\theta(x, 0, 0, \beta, 0) - \theta(x, 0, 0, 0, 0)] + \\ & + [\theta(x, 0, 0, 0, k) - \theta(x, 0, 0, 0, 0)] + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Величина $\theta(x, 0, 0, 0, 0)$ представляет собой решение задачи при $\alpha = 0, \rho = 0, \beta = 0, k = 0$, т. е. определяется из формулы (1).

Выражения $\theta(x, \alpha, 0, 0, 0)$, $\theta(x, 0, \rho, 0, 0)$, $\theta(x, 0, 0, \beta, 0)$ и $\theta(x, 0, 0, 0, k)$ являются решениями уравнений

$$\lambda' \frac{d^2\theta}{dx^2} = c_0 \gamma' b' (1 + \alpha\theta); \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\lambda_0 (1 + \rho\theta) \frac{d\theta}{dx} \right] = c' \gamma' b'; \quad (7)$$

$$\lambda' \frac{d^2\theta}{dx^2} = c' \gamma_0 b' (1 + \beta\theta); \quad (8)$$

$$\lambda' \frac{d^2\theta}{dx^2} = c' \gamma' b_0 (1 + k\theta) \quad (9)$$

при граничных условиях (2) и (3). Уравнения (6)—(9) получены последовательной постановкой в выражение (5) значений $\rho = 0, \beta = 0, k = 0$; $\alpha = 0, \beta = 0, k = 0$; $\alpha = 0, \rho = 0, k = 0$ и $\alpha = 0, \rho = 0, \beta = 0$.

В уравнениях (6)—(9) обозначения λ' , c' , γ' и b' применяются в тех случаях, когда предполагается независимость величин от температуры θ , т. е. когда их можно отнести к любому значению θ . В частности, они могут быть отнесены к температуре поверхности $\theta = 0$, т. е. можно записать

$$a' = a_0 = \frac{\lambda'}{c'\gamma'} = \frac{\lambda'}{c_0\gamma'} = \frac{\lambda'}{c'\gamma_0} = \frac{\lambda_0}{c'\gamma'} = \frac{\lambda_0}{c_0\gamma_0}. \quad (10)$$

Уравнения (6) и (8) аналогичны уравнению (9), которое является неоднородным. Учитывая равенство (10), выражение (9) можно представить в виде

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - k \frac{b_0}{a_0} \theta = \frac{b_0}{a_0}.$$

Его общее решение имеет вид

$$\theta(x, 0, 0, 0, k) = C_1 \operatorname{ch} x \sqrt{\frac{kb_0}{a_0}} + C_2 \operatorname{sh} x \sqrt{\frac{kb_0}{a_0}} - \frac{1}{k},$$

где из граничных условий (2) и (3)

$$C_1 = \frac{1}{k \operatorname{ch} l \sqrt{\frac{kb_0}{a_0}}}, \quad C_2 = 0.$$

Таким образом

$$\theta(x, 0, 0, 0, k) = \frac{\operatorname{ch} x \sqrt{\frac{kb_0}{a_0}}}{k \operatorname{ch} l \sqrt{\frac{kb_0}{a_0}}} - \frac{1}{k}.$$

Разлагая $\theta(x, 0, 0, 0, k)$ в ряд по малому параметру и пренебрегая членами второго порядка малости, имеем

$$\theta(x, 0, 0, 0, k) = \frac{b_0}{2a_0} (x^2 - l^2) + \frac{kb_0^2}{4a_0^2} \left(\frac{x^4}{6} - x^2 l^2 + \frac{5}{6} l^4 \right),$$

или

$$[\theta(x, 0, 0, 0, k) - \theta(x, 0, 0, 0, 0)] = \frac{kb_0^2}{4a_0^2} \left(\frac{x^4}{6} - x^2 l^2 + \frac{5}{6} l^4 \right). \quad (11)$$

Аналогично из уравнений (6) и (8) и граничных условий (2) и (3) с учетом выражения (10) получаем

$$[\theta(x, \alpha, 0, 0, 0) - \theta(x, 0, 0, 0, 0)] = \frac{\alpha b_0^2}{4a_0^2} \left(\frac{x^4}{6} - x^2 l^2 + \frac{5}{6} l^4 \right), \quad (12)$$

$$[\theta(x, 0, 0, \beta, 0) - \theta(x, 0, 0, 0, 0)] = \frac{\beta b_0^2}{4a_0^2} \left(\frac{x^4}{6} - x^2 l^2 + \frac{5}{6} l^4 \right). \quad (13)$$

Уравнение (7) с учетом (10) можно привести к виду

$$z \frac{d^2 z}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 - \frac{b_0}{a_0} \rho = 0,$$

где $z = 1 + \rho\theta$. Его решение [5] имеет вид

$$z^2 = \frac{b_0}{a_0} \rho x^2 + F_1 x + F_2.$$

т. е.

$$\vartheta(x, 0, \rho, 0, 0) = \frac{\pm \sqrt{\frac{b_0}{a_0} \rho x^2 + F_1 x + F_2} - 1}{\rho}.$$

Постоянные F_1 и F_2 , найденные из граничных условий, равны

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 1 - \frac{b_0}{a_0} \rho l^2,$$

поэтому

$$\vartheta(x, 0, \rho, 0, 0) = \frac{\sqrt{1 + \frac{b_0}{a_0} \rho (x^2 - l^2)} - 1}{\rho}.$$

Отрицательное значение корня противоречит физическому смыслу задачи. Действительно, при выбранном расположении оси координат всегда $\vartheta < 0$ (при линейном разогреве поверхностей пластины температура центральных областей всегда ниже температуры поверхностей). При $\rho < 0$ в случае отрицательного корня $\vartheta > 0$, что практически невозможно.

Разлагая $\vartheta(x, 0, \rho, 0, 0)$ в ряд по малому параметру ρ и пренебрегая членами второго порядка малости, имеем

$$\vartheta(x, 0, \rho, 0, 0) - \vartheta(x, 0, 0, 0, 0) = -\frac{\rho b_0^2}{8a_0^2} (x^2 - l^2)^2. \quad (14)$$

Подставив уравнения (1) и (11)–(14) в (5), получим решение уравнения (4) с точностью до величин второго порядка малости

$$\begin{aligned} \vartheta(x, \alpha, \rho, \beta, k) &= \frac{b_0}{2a_0} (x^2 - l^2) + \frac{b_0^2}{4a_0^2} (\alpha + \beta + k) \times \\ &\times \left(\frac{x^4}{6} - x^2 l^2 + \frac{5}{6} l^4 \right) - \frac{\rho b_0^2}{8a_0^2} (x^2 - l^2)^2. \end{aligned}$$

При $x = 0$

$$\vartheta(x, \alpha, \beta, k) = \vartheta_{\max} = -\frac{b_0 l^2}{2a_0} + \frac{b_0^2 l^4}{4a_0^2} \left[\frac{5}{6} (\alpha + \beta + k) - \frac{\rho}{2} \right],$$

откуда

$$4a_0^2 \vartheta_{\max} + 2b_0 l^2 a_0 - b_0^2 l^4 \left[\frac{5}{6} (\alpha + \beta + k) - \frac{\rho}{2} \right] = 0.$$

Решение полученного квадратического уравнения относительно a_0 дает

$$a_0 = -\frac{b_0 l^2}{4\vartheta_{\max}} \left\{ 1 + \sqrt{1 + 4\vartheta_{\max} \left[\frac{5}{6} (\alpha + \beta + k) - \frac{\rho}{2} \right]} \right\}.$$

Ограничиваясь при разложении корня двумя членами, получаем

$$a_0 = -\frac{b_0 l^2}{2\vartheta_{\max}} [1 + \Delta],$$

где

$$\Delta = \vartheta_{\max} \left[\frac{5}{6} (\alpha + \beta + k) - \frac{\rho}{2} \right]. \quad (15)$$

Выражение (15) для поправки Δ на температурную зависимость теплофизических свойств веществ совпадает с результатом, полученным Е. С. Платуновым [3].

Температурное поле цилиндра

Аналогично тому, как это было сделано выше, определена поправка Δ для случая бесконечного цилиндра. Уравнение теплопроводности и граничные условия имеют вид

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left[r \lambda_{\theta} (1 + \rho \theta) \frac{d\theta}{dr} \right] = C_0 (1 + \alpha \theta) \gamma_0 (1 + \beta \theta) b_0 (1 + k \theta);$$

$$\theta|_{r=R} = 0, \quad (16)$$

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (17)$$

Температурное поле цилиндра определяется из выражения (5), в котором координату x следует заменить на r . При этом величины $\theta(r, \alpha, 0, 0, 0)$, $\theta(r, 0, \rho, 0, 0)$, $\theta(r, 0, 0, \beta, 0)$ и $\theta(r, 0, 0, 0, k)$ можно определить из уравнений

$$\lambda' \left[\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} \right] = c_0 (1 + \alpha \theta) \gamma' b'; \quad (18)$$

$$\lambda_0 \left[(1 + \rho \theta) \frac{d^2 \theta}{dr^2} + \rho \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} (1 + \rho \theta) \frac{d\theta}{dr} \right] = c' \gamma' b'; \quad (19)$$

$$\lambda' \left[\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} \right] = c' \gamma_0 (1 + \beta \theta) b';$$

$$\lambda' \left[\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} \right] = c' \gamma' b_0 (1 + k \theta).$$

Неоднородное уравнение (18) можно представить так:

$$\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} - \alpha \frac{b_0}{a_0} = \frac{b_0}{a_0}.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$C_1 J_0 \left(\sqrt{\frac{\alpha b_0}{a_0}} r \right) + C_2 K_0 \left(\sqrt{\frac{\alpha b_0}{a_0}} r \right),$$

где J_0 и K_0 — функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода от мнимого аргумента.

Так как температура на оси цилиндра имеет конечное значение, а при $r \rightarrow 0$ $K_0 \rightarrow \infty$, то $C_2 = 0$.

Частное решение неоднородного уравнения (18) равно $-\frac{1}{\alpha}$, следовательно, общее решение его будет

$$\theta = C_1 J_0 \left(i \sqrt{\frac{\alpha b_0}{a_0}} r \right) - \frac{1}{\alpha},$$

где $J_0(ix) = I_0(x)$, а постоянная C_1 определяется из граничного условия (16):

$$C_1 = \frac{1}{\alpha J_0 \left(i \sqrt{\frac{\alpha b_0}{a_0}} R \right)}.$$

Разложив решение в ряд [6] и пренебрегая членами второго порядка малости, имеем

$$\theta(r, \alpha, 0, 0, 0) = \frac{b_0}{4a_0} (r^2 - R^2) + \frac{b_0^2 \alpha}{16a_0^2} \left(\frac{1}{4} r^4 - R^2 r^2 + \frac{3}{4} R^4 \right),$$

или

$$[\vartheta(r, \alpha, 0, 0, 0) - \vartheta(r, 0, 0, 0, 0)] = \frac{b_0^2 \alpha}{16a_0^2} \left(\frac{1}{4} r^4 - R^2 r^2 + \frac{3}{4} R^4 \right), \quad (20)$$

где

$$\vartheta(r, 0, 0, 0, 0) = \frac{b_0}{4a_0} (r^2 - R^2). \quad (21)$$

По аналогии получаем

$$[\vartheta(r, 0, 0, \beta, 0) - \vartheta(r, 0, 0, 0, 0)] = \frac{b_0^2 \beta}{16a_0^2} \left(\frac{1}{4} r^4 - R^2 r^2 + \frac{3}{4} R^4 \right), \quad (22)$$

$$[\vartheta(r, 0, 0, 0, k) - \vartheta(r, 0, 0, 0, 0)] = \frac{b_0^2 k}{16a_0^2} \left(\frac{1}{4} r^4 - R^2 r^2 + \frac{3}{4} R^4 \right). \quad (23)$$

Переходя к решению уравнения (19), введем новую переменную

$$H = (1 + \rho\vartheta)^2 \quad (24)$$

и обозначим

$$B = \frac{2b_0\rho}{a_0}.$$

Тогда вместо уравнения (19) получим неоднородное уравнение

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dU}{dr} = B. \quad (25)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения [5] будет

$$C_1 \ln|r| + C_2.$$

Определив C_1 и C_2 методом вариации произвольных постоянных, получим общее решение уравнения (25)

$$U = B \frac{r^2}{4} + C_3 \ln|r| - C_4. \quad (26)$$

Постоянные интегрирования C_3 и C_4 можно определить из граничных условий (16) и (17).

Из выражений (24) и (17) следует, что

$$\left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=0} = 0,$$

т. е. в соответствии с уравнением (26) должно быть

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{C_3}{r} \right) = 0.$$

Легко показать, что это равенство возможно только при $C_3 = 0$. Постоянная C_4 находится из граничного условия (16)

$$C_4 = 1 - \frac{B}{4} R^2.$$

Таким образом, после преобразований получим

$$\vartheta(r, 0, \rho, 0, 0) = \frac{\sqrt{1 + \frac{B}{4} (r^2 - R^2)} - 1}{\rho}.$$

Разложив корень в ряд Тейлора и отбросив члены второго порядка малости, имеем

$$[\vartheta(r, 0, \rho, 0, 0) - \vartheta(r, 0, 0, 0, 0)] = -\frac{b_0^2 \rho}{32a_0^2} (r^2 - R^2)^2. \quad (27)$$

В соответствии с выражениями (5), (20)–(23) и (27) можно записать

$$\begin{aligned} \vartheta(r, \alpha, \rho, \beta, k) = & \frac{b_0}{4a_0} (r^2 - R^2) + \\ & + \frac{b_0^2}{16a_0^2} \left(\frac{1}{4} r^4 - R^2 r^2 + \frac{3}{4} R^4 \right) (\alpha + \beta + k) - \frac{b_0^2 \rho}{32a_0^2} (r^2 - R^2)^2. \end{aligned}$$

При $r = 0$

$$\vartheta(r, \alpha, \rho, \beta, k) = \vartheta_{\max} = -\frac{b_0 R^2}{4a_0} + \frac{b_0^2 R^4}{16a_0^2} \left[\frac{3}{4} (\alpha + \beta + k) - \frac{\rho}{2} \right].$$

Решив это квадратическое уравнение относительно a_0 и затем разложив полученный корень в ряд, имеем

$$a_0 = -\frac{b_0 R^2}{4\vartheta_{\max}} (1 + \Delta), \quad (28)$$

где

$$\Delta = \vartheta_{\max} \left[\frac{3}{4} (\alpha + \beta + k) - \frac{\rho}{2} \right]. \quad (29)$$

Выражение (29) для поправки в случае линейного разогрева цилиндра совпадает с результатами решения Е. С. Платунова [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Краев О. А. Измерение температуропроводности металлов в широком интервале температур за один опыт. «Теплоэнергетика», 1957, № 12.
2. Краев О. А. Метод определения зависимости температуропроводности от температуры за один опыт. «Теплоэнергетика», 1956, № 4.
3. Платунов Е. С. Условия температурной регуляризации при монотонном разогреве тел простейшей формы с переменными теплофизическими параметрами. Известия вузов СССР. «Приборостроение», 1964, № 5.
4. Безрукова Е. Н., Сергеев О. А. Систематическая погрешность определения теплопроводности металлов электрическим методом. «Всесоюзная конференция по теплофизическим свойствам веществ при высоких температурах». М., изд. стандартов, 1966.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961.
6. Грей Э. и Мэттьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М., ИЛ, 1949.

Поступила в редакцию
27/III 1968 г.

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ПЕРЕГРЕВА ТЕРМОАНЕМОМЕТРА С ТЕРМИСТОРНЫМ ДАТЧИКОМ

Как известно, тепловой баланс датчика термоанемометра, работающего в режиме постоянной температуры, можно описать уравнением

$$I^2 R = \alpha F \Delta T, \quad (1)$$

где I — ток;
 R — сопротивление термисторного датчика при установленном значении перегрева;
 α — коэффициент теплообмена;
 F — поверхность датчика;
 ΔT — перегрев, т. е. разность температур датчика и среды.
 Из уравнения (1) следует, что чувствительность термоанемометра по току, определяемая как

$$\frac{dI}{dV} = K_I \frac{1}{2V\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dV}, \quad (2)$$

(где V — скорость потока) пропорциональна величине $K_I = \sqrt{\frac{F\Delta T}{R}}$. При увеличении перегрева ΔT величина K_I возрастает, так как наряду с увеличением ΔT уменьшается сопротивление термистора R ($R = Ae^{\frac{B}{T}}$; A и B — постоянные величины; T — температура датчика). Следовательно, возрастает и чувствительность термоанемометра по току. Из уравнения (1) следует также, что чувствительность термоанемометра по напряжению U , определяемая как

$$\frac{dU}{dV} = K_U \frac{1}{2V\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dV}, \quad (3)$$

пропорциональна величине $K_U(\Delta T) = 2 \sqrt{F \Delta T A e^{\frac{B}{\Delta T + T_{cp}}}}$ (T_{cp} — температура среды). Множитель 2 появляется в связи с тем, что измеряемое падение напряжения происходит не только на R , но также на равном ему сопротивлении плеча моста.

Функция $K_U(\Delta T)$ не является монотонной в интервале $(0, +\infty)$ и ее экстремумы определяются из уравнения

$$\frac{dK_U}{d\Delta T} = \sqrt{FR}(\Delta TR)^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{\Delta TB}{(\Delta T + T_{cp})^2} \right] = 0. \quad (4)$$

Учитывая, что $R \neq 0$ и $\Delta T \neq 0$, из уравнения (4) получаем

$$1 - \frac{\Delta TB}{(\Delta T + T_{cp})^2} = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$\Delta T_s = \frac{B}{2} - T_{cp} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} - BT_{cp}}, \quad (6)$$

где ΔT_s — величина перегрева, при которой $K_U(\Delta T)$ принимает экстремальные значения.

Для определения экстремумов функции $K_U(\Delta T)$ определим знак второй производной

$$\begin{aligned} \frac{d^2 K_U}{d\Delta T^2} \Big|_{\Delta T = \Delta T_s} &= \\ &= \sqrt{F} \frac{RB(\Delta T_s R)^{-\frac{1}{2}}}{(\Delta T_s + T_{cp})^3} (\Delta T_s - T_{cp}). \end{aligned} \quad (7)$$

Из уравнения (7) видно, что функция $K_U(\Delta T)$ достигает максимума при $\Delta T_s < T_{cp}$, (8)

а минимума при $\Delta T_s > T_{cp}$. (9)

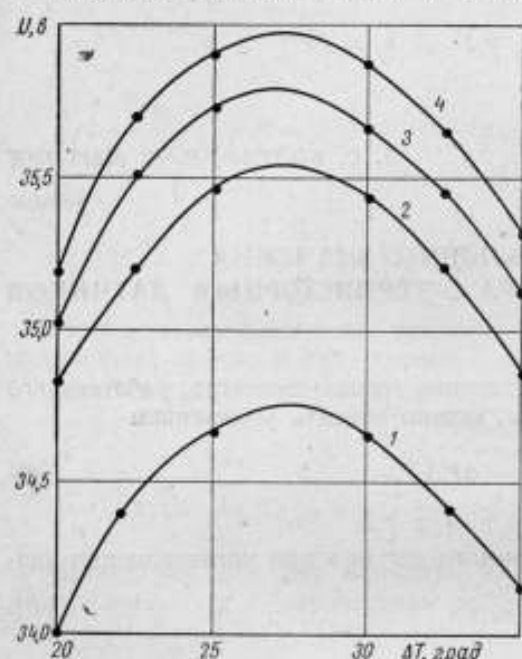
Оценим решение (6) с точки зрения условий (8) и (9). Для термисторов величина $B \cong 3000^\circ \text{K}$, а температура среды изменяется в диапазоне $270-300^\circ \text{K}$, т. е. $B \cong 10T_{cp}$. С учетом этих условий из решения (6) получим

$$\Delta T_s^+ = \frac{B}{2} - T_{cp} + \sqrt{\frac{B^2}{4} - BT_{cp}} \cong 8T_{cp};$$

$$\Delta T_s^- = \frac{B}{2} - T_{cp} - \sqrt{\frac{B^2}{4} - BT_{cp}} \cong 0,15T_{cp}. \quad (10)$$

Итак, функция $K_U(\Delta T)$ в интервале $(0, +\infty)$ имеет одну точку минимума и одну точку максимума. Следовательно, перегрев ΔT_s обеспечивает максимальную чувствительности термоанемометра (если, конечно, при этом термистор не выходит из области рабочих температур).

Для проверки приведенных расчетов были получены градуировочные характеристики полупроводникового датчика с термистором типа МТ-54 ($B = 2973^\circ \text{K}$, $T_{cp} = 276^\circ \text{K}$, $\Delta T_s^- = 27,5 \text{ град}$) и на основе их построены зависимости $U = f(\Delta T)$ при фиксированных значениях скорости. Как видно из рисунка, в заданном диапазоне скоростей максимум чувствительности термоанемометра (максимальное выходное напряжение U) достигается при $\Delta T = 28 \text{ град}$.



Зависимость $U = f(\Delta T)$ при $T_{cp} = 2,7^\circ \text{C}$ и V равном 0,2 (1); 0,5 (2); 0,8 (3) и 1,2 м/сек (4).

Поступила в редакцию
1/111 1968 г.

УДК 536.24

А. А. МЕНЬ, О. А. СЕРГЕЕВ

ВНИИМ

ЛУЧИСТО-КОНДУКТИВНЫЙ ТЕПЛОБМЕН В ПЛОСКОМ СЛОЕ

Задача определения температурного поля плоской стенки из полупрозрачного материала в стационарном режиме связана с изучением явлений переноса, обусловленных двумя механизмами — теплопроводностью и радиацией. Для случая «серой» среды, ограниченной абсолютно черными поверхностями, такая задача рассматривалась в работе [1], но подробное решение там не представлено. Рассмотрим более общую задачу, когда стенки являются отражающими плоскостями. Метод ее решения отличен от того, который использовался в работе [1], а результаты получаются в более компактной форме. Частное решение для среды с абсолютно поглощающими границами представлено в ином виде, чем в указанной работе.

В статье, посвященной рассмотрению процесса лучисто-кондуктивного теплообмена*, показано, что существующие математические модели его построены при некоторых предположениях, которые не позволяют судить о характере приближения к точным решениям. Такую оценку можно получить в тех случаях, когда удастся решить задачу численно, с помощью ЭВМ. Однако до настоящего времени даже для случая «серой» среды нет общего метода решения нелинейного уравнения лучисто-кондуктивного теплообмена на ЭВМ. В настоящей работе предпринята попытка получить аналитическое решение задачи без дополнительных предположений о характере температурного поля.

Постановка задачи и вывод уравнения

Так же, как в работе [1], рассмотрим слой толщиной h , ограниченный двумя плоскими поверхностями с температурами T_0 и T_h ($T_0 > T_h$), имеющими коэффициент отражения R , усредненный по углам падения, т. е.

$$R = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\alpha) \sin \alpha \cos \alpha d\alpha,$$

где $R(\alpha)$ определяется по формулам Френеля для угла падения α .

Пусть Q — полный поток энергии, падающий на левую границу. При решении задачи более удобно задавать величины Q и T_0 , а не температуры на обеих границах слоя. Именно так обстоит дело в реальном эксперименте, например, при определении коэффициента теплопроводности материалов.

* См. стр. 26

Кроме того, такой выбор краевых условий упрощает формулировку и решение задачи. Предполагая наличие в среде локального термодинамического равновесия и отсутствие посторонних источников энергии в слое, получим основное уравнение стационарного состояния в виде

$$\operatorname{div} \bar{W} = \operatorname{div} (\bar{q} + \bar{\epsilon}) = 0, \quad (1)$$

где $\bar{q} = -\lambda \frac{dT}{dx}$ и $\bar{\epsilon}(x)$ — векторы теплового потока и радиации;

λ — коэффициент теплопроводности.

Вектор радиации введен А. А. Гершуном [2], и для его расходимости получено выражение

$$\operatorname{div} \bar{\epsilon} = \varphi - \psi, \quad (2)$$

где φ и ψ — излучательная и поглощательная способности вещества;

$$\varphi - \psi = 4\pi \int_0^{\infty} j_{\nu} d\nu - \int_0^{\infty} \int_{\omega} k_{\nu} B d\omega d\nu; \quad (3)$$

B — яркость лучей в рассматриваемом направлении.

Здесь интегрирование ведется по всему спектру и по всем направлениям радиации. Подставив выражение (3) в (1) и вычислив интегралы по всем частотам ν спектра, для случая «серого» тела получим интегро-дифференциальное уравнение, содержащее неизвестную температуру под знаком интеграла, производной и степени. Именно в таком виде записано уравнение в работе [3] и в других работах. Мы предпочитаем находить вектор радиации $\bar{\epsilon}$, следуя его определению в работе [2] (см. приложение 1) и избавляясь таким образом от четвертой степени температуры в свободной функции уравнения.

Из уравнения (1) для одномерной задачи находим

$$q(x) + \epsilon(x) = Q \quad (4)$$

и с учетом выражения (21П) получим

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{dT}{dx} + 2\pi \int_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \int_{\xi=0}^x j_{\nu}(\xi) E_2[k_{\nu}(x-\xi)] d\xi - \int_{\xi=x}^h j_{\nu}(\xi) E_2[k_{\nu}(\xi-x)] d\xi + \right. \\ \left. + \int_{\xi=0}^h j_{\nu}(\xi) [J_{1g}(x, \xi) - J_{2g}(x, \xi)] d\xi + B_{\nu}^{(2)} [J'_{3g}(x) - J'_{4g}(x)] + \right. \\ \left. + B_{\nu}^{(1)} [J'_{3g}(x) - J'_{4g}(x)] \right\} d\nu = Q, \quad (5) \end{aligned}$$

где $j_{\nu}(\xi)$ — спектральная плотность излучения;

k_{ν} — спектральный показатель поглощения;

$B_{\nu}^{(1)}, B_{\nu}^{(2)}$ — спектральные яркости соответственно левой и правой границ.

Затем так же, как в работе [1], заменим показатель поглощения материала пластины его эффективным значением, усредненным по спектру (росселандово среднее)

$$\frac{1}{k} = \frac{\int_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{k_{\nu}} E_{\nu, \tau} d\nu}{\int_{\nu=0}^{\infty} E_{\nu, \tau} d\nu}, \quad (6)$$

где $E_{\nu, \tau}$ — функция излучения Планка.

Спектральной зависимостью показателя преломления пренебрегаем, тогда интегрирование равенства (5) по ν можно провести до конца, так как все входящие в него функции, кроме j_ν , $B_\nu^{(1)}$ и $B_\nu^{(2)}$, зависят от ν только через k_ν . Имеем

$$\int_{\nu=0}^{\infty} j_\nu(\zeta) d\nu = \frac{kn^2\sigma}{\pi} T^4(\zeta),$$

где n — показатель преломления;

σ — постоянная Стефана—Больцмана.

Поскольку границы — «серые» поверхности, то

$$\int_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^{(1)} d\nu = e \frac{n^2\sigma}{\pi} T_0^4 \quad \text{и} \quad \int_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^{(2)} d\nu = e \frac{n^2\sigma}{\pi} T_h^4.$$

В этих соотношениях e — интегральный коэффициент черноты излучения границ слоя. Используя эти равенства, приведем уравнение (5) к виду

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{dT}{dx} + 2n^2\sigma k \left\{ \int_{\zeta=0}^x T^4(\zeta) E_2[k(x-\zeta)] d\zeta - \int_{\zeta=x}^h T^4(\zeta) E_2[k(\zeta-x)] d\zeta + \right. \\ \left. + \int_{\zeta=0}^h T^4(\zeta) [J_{1g}(x, \zeta) - J_{2g}(x, \zeta)] d\zeta \right\} + \\ + 2n^2\sigma e T_h^4 [J'_{3g}(x) - J'_{4g}(x)] + 2n^2\sigma e T_0^4 [J'_{3g}(x) - J'_{4g}(x)] = Q. \quad (7) \end{aligned}$$

Имея в виду дальнейшее приложение результатов решения к исследованию коэффициента теплопроводности полупрозрачных материалов, рассмотрим случай, когда $\Delta T \ll T_0$, что реализуется в эксперименте. Тогда

$$T^4(x) = T_0^4 \left(1 - \frac{\theta(x)}{T_0}\right)^4 \approx T_0^4 \left(1 - 4 \frac{\theta(x)}{T_0}\right), \quad (8)$$

где

$$\theta(x) = T_0 - T(x).$$

Поскольку $\theta(x) \ll T_0$, это приближенное равенство очень мало отличается от точного. Можно строго оценить ошибку в решении, связанную с такой заменой, как показано в приложении 2. В интересующих нас случаях эта ошибка весьма незначительна. Для дальнейшего преобразования уравнения (7) рассмотрим вектор радиации изотермического слоя при температуре T_0 , который определяется равенством (22П). Так как изотермический слой находится в условиях термодинамического равновесия, то перенос лучистой энергии так же, как и тепловой, отсутствует, и в любом сечении слоя вектор радиации равен нулю. Покажем, что выражение (22П) согласуется с этим выводом, т. е. $\varepsilon(x)|_{T=\text{const}} = 0$.

В состоянии равновесия поток лучистой энергии, распространяющийся в телесном угле $d\omega$ в направлении φ вблизи границы, удовлетворяет соотношению

$$E_{\text{пад}}(1 - R) = E_{\text{соб}}, \quad (9)$$

где $E_{\text{соб}}$ — собственное излучение ограничивающей поверхности;

$E_{\text{пад}}$ — падающая радиация.

Выделим элемент площади границы dS . Если спектральная яркость границы $B_\nu^{(n)} = n^2 B_{\nu 0}^{(n)}$ (величина $B_{\nu 0}^{(n)}$ относится к вакууму), то поток энергии в угле $d\omega$ составит

$$E_{\text{соб}} = n^2 B_{\nu 0}^{(n)} \cos \varphi d\omega dS. \quad (10)$$

При вычислении $E_{\text{пад}}$ следует принять во внимание излучение слоя и границ с учетом многократных отражений. Весь вывод аналогичен выкладкам из приложения I с той разницей, что теперь j_v не зависит от координаты. После интегрирования получим выражение для лучистого потока собственно стенки

$$j_v dS d\omega = \frac{\cos \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}}} \left(1 - e^{-\frac{k_v h}{\cos \varphi}} + R e^{-\frac{k_v h}{\cos \varphi}} - R e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}} \right). \quad (11)$$

Излучение от границ в пределах того же угла $d\omega$ определяется выражением

$$n^2 B_{v0}^{(n)} dS d\omega = \frac{\cos \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}}} \left[e^{-\frac{k_v h}{\cos \varphi}} + R e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}} \right]. \quad (12)$$

Сложив выражения (11) и (12), найдем $E_{\text{пад}}$. Подставив эту сумму и выражение (10) в (9), и учитывая

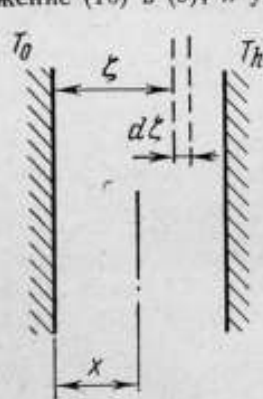


Рис. 1

$$\frac{j_v}{k_v} = n^2 B_{B^v, \tau} \text{ и } B_{B^v, \tau} = \frac{B_{v0}^{(n)}}{1 - R},$$

получим

$$B_{B^v, \tau} \cos \varphi \left[-e^{-\frac{k_v h}{\cos \varphi}} + \frac{1}{1 - R^2 e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}}} \left(R^2 e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}} - R^2 e^{-\frac{3k_v h}{\cos \varphi}} + R e^{-\frac{k_v h}{\cos \varphi}} - R e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}} \right) \right] + B_{v0}^{(n)} \cos \varphi \left[e^{-\frac{k_v h}{\cos \varphi}} + \frac{1}{1 + R^2 e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}}} \left(R^2 e^{-\frac{3k_v h}{\cos \varphi}} + R e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}} \right) \right] = 0. \quad (13)$$

Величина $B_{B^v, \tau}$ представляет собой спектральную яркость излучения абсолютно черной поверхности. Умножив равенство (13) на $\sin \varphi e^{-\frac{k_v x}{\cos \varphi}}$, затем на $\sin \varphi e^{-\frac{k_v (h-x)}{\cos \varphi}}$, вычитая полученные произведения одно из другого и интегрируя по φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$, получим равенство, тождественное относительно x

$$B_{B^v, \tau} \left(- \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi e^{-\alpha (h-x)} d\varphi + \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi e^{-\alpha x} d\varphi + \int_0^{\pi/2} R^2 \beta e^{-\alpha (2h-x)} d\varphi - \int_0^{\pi/2} R^2 \beta e^{-\alpha (h+x)} d\varphi - \int_0^{\pi/2} R^2 \beta e^{-\alpha (3h-x)} d\varphi + \int_0^{\pi/2} R^2 \beta e^{-\alpha (2h+x)} d\varphi + \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\pi/2} R\beta e^{-\alpha(h-x)} d\varphi - \int_0^{\pi/2} R\beta e^{-\alpha x} d\varphi - \int_0^{\pi/2} R\beta e^{-\alpha(2h-x)} d\varphi + \\
& + \int_0^{\pi/2} R\beta e^{-\alpha(h+x)} d\varphi \Big) + B_{v0}^{(n)} \left(\int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi e^{-\alpha(h-x)} d\varphi - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi e^{-\alpha x} d\varphi + \int_0^{\pi/2} R^2 \beta e^{-\alpha(2h-x)} d\varphi - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{\pi/2} R^2 \beta e^{-\alpha(2h+x)} d\varphi + \int_0^{\pi/2} R\beta e^{-\alpha(2h-x)} d\varphi - \int_0^{\pi/2} R\beta e^{-\alpha(h+x)} d\varphi \right) = 0,
\end{aligned}$$

где $\beta = \cos \varphi \sin \varphi / \left(1 - R^2 e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}}\right)$; $\alpha = k_v / \cos \varphi$.
 Пользуясь введенными в приложении I обозначениями, находим

$$\begin{aligned}
& B_{v0}^{(n)} \left\{ E_3(k_v x) - E_3[k_v(h-x)] + \int_0^{\pi/2} R^2 \beta e^{-\alpha(2h-x)} d\varphi - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{\pi/2} R^2 \beta e^{-\alpha(h+x)} d\varphi - J_{4g}^* + J_{3g}^* + \int_0^{\pi/2} R\beta e^{-\alpha(h-x)} d\varphi - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{\pi/2} R\beta e^{-\alpha x} d\varphi - J_{4g}^* + J_{3g}^* \right\} + B_{v0}^{(n)} \left\{ E_3[k_v(h-x)] - \right. \\
& \quad \left. - E_3(k_v x) + J_{4g}^* - J_{3g}^* + J_{4g}^* - J_{3g}^* \right\} = 0. \quad (14)
\end{aligned}$$

Левая часть тождества совпадает с выражением для ϵ из (22П), т. е. утверждение доказано.

Вернемся к преобразованию уравнения (7). Подставим в него выражение (8) и рассмотрим интегральное выражение

$$\begin{aligned}
& 2n^2 \sigma k \left\{ \int_{\zeta=0}^x T_0^4 E_2[k(x-\zeta)] d\zeta - \int_{\zeta=x}^h T_0^4 E_2[k(\zeta-x)] d\zeta + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\zeta=0}^h T_0^4 [J_{1g}(x, \zeta) - J_{2g}(x, \zeta)] d\zeta \right\},
\end{aligned}$$

которое определяет чистое излучение изотермической стенки с температурой T_0 . Прибавив к нему излучение обеих границ при той же температуре $2n^2 \sigma e T_0^4 [J_{3g}^*(x) - J_{4g}^*(x)] + 2n^2 \sigma e T_0^4 [J_{3g}^*(x) - J_{4g}^*(x)]$, получим полный вектор радиации изотермического слоя, который, как указано, равен нулю. Поэтому выражение (7) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& -\lambda \frac{dT}{dx} - 8n^2 \sigma T_0^3 k \left\{ \int_{\zeta=0}^x \vartheta(\zeta) E_2[k(x-\zeta)] d\zeta - \right. \\
& \quad \left. - \int_{\zeta=x}^h \vartheta(\zeta) E_2[k(\zeta-x)] d\zeta + \int_{\zeta=0}^h \vartheta(\zeta) [J_{1g}(x, \zeta) - J_{2g}(x, \zeta)] d\zeta \right\} - \\
& \quad - 2n^2 \sigma e [J_{3g}^*(x) - J_{4g}^*(x)] (T_0^4 - T_h^4) = Q, \quad (15)
\end{aligned}$$

Используя формулу дифференцирования интеграла по параметру, приведем равенство (15) к виду

$$-\lambda \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \left\{ 8n^2 \sigma T_0^3 \int_{\zeta=0}^h \theta(\zeta) [E_3(k|x-\zeta|) + I_1(x, \zeta) + I_2(x, \zeta)] d\zeta + \frac{2n^2 \sigma e}{k} (T_0^4 - T_h^4) [I_3(x) + I_4(x)] \right\} = Q, \quad (16)$$

где

$$I_1(x, \zeta) = \int_0^{\pi/2} \frac{R \sin \varphi \cos \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2kh}{\cos \varphi}}} \left(e^{-\frac{k(x+\zeta)}{\cos \varphi}} + R e^{-\frac{k(2h+x-\zeta)}{\cos \varphi}} \right) d\varphi; \quad (17)$$

$$I_2(x, \zeta) = \int_0^{\pi/2} \frac{R \sin \varphi \cos \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2kh}{\cos \varphi}}} \left(e^{-\frac{k(2h-x-\zeta)}{\cos \varphi}} + R e^{-\frac{k(2h-x+\zeta)}{\cos \varphi}} \right) d\varphi; \quad (18)$$

$$I_3(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{R \cos^2 \varphi \sin \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2kh}{\cos \varphi}}} e^{-\frac{k(h+x)}{\cos \varphi}} d\varphi; \quad (19)$$

$$I_4(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2kh}{\cos \varphi}}} e^{-\frac{k(h-x)}{\cos \varphi}} d\varphi. \quad (20)$$

Проинтегрировав уравнение (16), найдем

$$\lambda T(x) = 8n^2 \sigma T_0^3 \int_{\zeta=0}^h \theta(\zeta) [E_3(k|x-\zeta|) + I_1(x, \zeta) + I_2(x, \zeta)] d\zeta + \frac{2n^2 \sigma e}{k} (T_0^4 - T_h^4) [I_3(x) + I_4(x)] - Qx + C, \quad (21)$$

где C — постоянная интегрирования, определяемая из условия $T(x)_{x=0} = T_0$.

Вычтем обе части равенства (21) из величины λT_0 и воспользуемся равенством (8) при $x = h$, обозначив $\Delta T = T_0 - T_h$, тогда

$$\lambda \theta(x) = Qx + C_1 - \frac{8n^2 \sigma e}{k} T_0^3 \Delta T [I_3(x) + I_4(x)] - 8n^2 \sigma T_0^3 \int_{\zeta=0}^h \theta(\zeta) [E_3(k|x-\zeta|) + I_1(x, \zeta) + I_2(x, \zeta)] d\zeta.$$

Введем безразмерные параметры:

$$\tau = kx \text{ — оптическая плотность (соответственно } \tau_0 = kh \text{ } \tau' = k\zeta);$$

$$N = \frac{8n^2 \sigma T_0^3}{k\lambda} \text{ — величина, характеризующая соотношение фотонной и фононной составляющих теплопередачи;}$$

$$a = \frac{Q}{8n^2 \sigma T_0^4} \text{ — величина, характеризующая отношение полного потока энергии к лучистому потоку на границе;}$$

$$\frac{\theta(\tau)}{T_0} = \alpha(\tau) \text{ — относительное температурное распределение.}$$

После этого получим основное уравнение, описывающее процесс, в следующем безразмерном виде

$$\alpha(\tau) = a\tau N + C_1 - Ne \frac{\Delta T}{T_0} [I_3(\tau) + I_4(\tau)] - N \int_0^{\tau_0} \alpha(\tau') [E_3 |\tau - \tau'| + I_1(\tau, \tau') + I_2(\tau, \tau')] d\tau', \quad (22)$$

причем C_1 находится из условия $\alpha(\tau)_{\tau=0} = 0$.

Решение основного уравнения

Полученное выражение (22) представляет собой линейное интегральное уравнение 2-го рода типа Фредгольма с несимметричным ядром и параметром N . Как известно, свободная функция этого уравнения может служить первым приближенным решением, которое, после определения C_1 , выглядит так:

$$\alpha_1(\tau) = a\tau N + Ne \frac{\Delta T}{T_0} [I_3(0) + I_4(0) - I_3(\tau) - I_4(\tau)]. \quad (23)$$

Степень точности этого приближения, т. е. погрешность, связанная с отбрасыванием интеграла в выражении (22), определена в приложении 3. Рассмотрим полное решение уравнения (22). Произведем замену переменных $\tau_1 = \tau - 0,5\tau_0$ и $\tau'_1 = \tau' - 0,5\tau_0$, тогда

$$\alpha(\tau) = a\tau N + C_1^* - Ne \frac{\Delta T}{T_0} [I_3^*(\tau) + I_4^*(\tau)] - N \int_{-l}^l \alpha(\tau') [E_3 |\tau - \tau'| + K_1(\tau, \tau') + K_2(\tau, \tau')] d\tau'. \quad (24)$$

(Здесь и в дальнейшем нижние индексы у новых переменных для удобства опускаются). В уравнении (24) приняты обозначения:

$$C_1^* = C_1 + 0,5a\tau_0 N; \quad l = 0,5\tau_0;$$

$$K_1(\tau, \tau') = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{R \sin \varphi \cos \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2\tau_0}{\cos \varphi}}} e^{-\frac{\tau_0}{\cos \varphi}} \operatorname{ch} \left(\frac{\tau + \tau'}{\cos \varphi} \right) d\varphi; \quad (25)$$

$$K_2(\tau, \tau') = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{R^2 \sin \varphi \cos \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2\tau_0}{\cos \varphi}}} e^{-\frac{2\tau_0}{\cos \varphi}} \operatorname{ch} \left(\frac{\tau - \tau'}{\cos \varphi} \right) d\varphi; \quad (26)$$

$$I_3^*(\tau) = \int_0^{\pi/2} R \cos^2 \varphi \sin \varphi \frac{1}{1 - R^2 e^{-\frac{2\tau_0}{\cos \varphi}}} e^{-\frac{\tau + 1,5\tau_0}{\cos \varphi}} d\varphi; \quad (27)$$

$$I_4^*(\tau) = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi \frac{1}{1 - R^2 e^{-\frac{2\tau_0}{\cos \varphi}}} e^{-\frac{0,5\tau_0 - \tau}{\cos \varphi}} d\varphi. \quad (28)$$

Из выражений (24)–(26) следует, что в новых переменных ядро уравнения становится симметричным и зависит лишь от суммы и разности аргументов, изменяющихся в квадрате $-l \leq \tau, \tau' \leq l$, причем все слагаемые

ядра — четные функции. Разложим ядро в ряд Фурье. В силу указанных особенностей разложение необходимо произвести на интервале $(0, 2l)$, выбрав в качестве ортонормированной системы функций

$$\frac{1}{2\sqrt{l}}; \frac{1}{\sqrt{2l}} \cos \frac{\pi x}{2l}; \frac{1}{\sqrt{2l}} \cos \frac{2\pi x}{2l} \dots \quad (29)$$

Коэффициенты Фурье отдельных слагаемых ядра найдены в приложении 4. Имеем

$$E_2 |\tau - \tau'| = \frac{A_0}{2\sqrt{l}} + \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi |\tau - \tau'|}{2l}; \quad (30)$$

$$A_n = \frac{2}{\sqrt{\tau_0}} \left\{ \frac{[E_2(0) - (-1)^n E_2(\tau_0)] \tau_0^2}{n^2 \pi^2} + \frac{\tau_0^3}{n^3 \pi^3} \left[-\operatorname{arctg} \frac{n\pi}{\tau_0} + \operatorname{Im} E_1(\tau_0 + in\pi) \right] \right\}; \quad (31)$$

$$K_1(\tau, \tau') = \frac{B_0}{\sqrt{l}} + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi (\tau + \tau')}{2l}; \quad (32)$$

$$B_n = (-1)^n \frac{R \tau_0^{\frac{3}{2}}}{n^2 \pi^2} \left[1 - \frac{\tau_0}{n\pi} \operatorname{agctg} \frac{n\pi}{\tau_0} - E_2(2\tau_0) + S_1 - \frac{\tau_0}{n\pi} S_2(n) \right]; \quad (33)$$

$$S_1 = \sum_{m=1}^{\infty} R^{2m} |E_2(2m\tau_0) - E_2[2\tau_0 + 2m\tau_0]|; \quad (34)$$

$$S_2(n) = \sum_{m=1}^{\infty} R^{2m} \left[\operatorname{Im} E_1 \left[\frac{\tau_0}{n\pi} + i2(m+1)\pi \right] - \operatorname{Im} E_1 \left[\frac{\tau_0}{n\pi} + i2m\pi \right] \right]; \quad (35)$$

$$K_2(\tau, \tau') = \frac{1}{\sqrt{l}} C_0 + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi (\tau - \tau')}{2l}; \quad (36)$$

$$C_n = (-1)^n \frac{R^2 \tau_0^{\frac{3}{2}}}{n^2 \pi^2} \left[S_3 + (-1)^n \frac{\tau_0}{n\pi} S_4(n) \right]; \quad (37)$$

$$S_3 = \sum_{m=0}^{\infty} R^{2m} [E_2(\tau_0 + 2m\tau_0) - E_2(3\tau_0 + 2m\tau_0)]; \quad (38)$$

$$S_4(n) = \sum_{m=0}^{\infty} R^{2m} \left\{ \operatorname{Im} E_1 \left[\frac{\tau_0}{n\pi} + i(2m+1)\pi \right] - \operatorname{Im} E_1 \left[\frac{\tau_0}{n\pi} + i(2m+3)\pi \right] \right\}. \quad (39)$$

Структура коэффициентов A_n , B_n и C_n указывает на возможность такого преобразования выражений (30), (32) и (36), при котором каждый из рядов

заменяется двумя, причем первый из них может быть просуммирован, а второй имеет быстро убывающие коэффициенты. При выполнении этого преобразования используем известные соотношения [4]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{2\pi^2 - 6\pi x + 3x^2}{12}; \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (40)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}; \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (41)$$

Так, для функции $E_3 |\tau - \tau'|$ находим

$$\begin{aligned} E_3 |\tau - \tau'| &= \frac{A_0}{2\sqrt{l}} + \frac{1}{l} \left[E_2(0) \frac{\tau_0^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi |\tau - \tau'|}{2l} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tau_0^2}{\pi^2} E_2(\tau_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi |\tau - \tau'|}{2l} \right] + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \cos \frac{n\pi |\tau - \tau'|}{2l} = \frac{A_0}{\sqrt{2\tau_0}} + \frac{\tau_0}{3} - |\tau - \tau'| + \\ &\quad + \frac{|\tau - \tau'|^2}{2\tau_0} + \frac{\tau_0 E_2(\tau_0)}{6} - \frac{E_2(\tau_0)}{2\tau_0} |\tau - \tau'|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \cos \frac{n\pi |\tau - \tau'|}{2l}, \end{aligned}$$

где

$$A_n^{(1)} = \frac{2\tau_0^2}{n^2 \pi^3} \left[-\operatorname{arctg} \frac{n\pi}{\tau_0} + \operatorname{Im} E_1(\tau_0 + in\pi) \right]. \quad (42)$$

Видоизменив аналогичным образом слагаемые $K_1(\tau, \tau')$ и $K_2(\tau, \tau')$ и сделав необходимые выкладки, получим выражение для ядра уравнения

$$\begin{aligned} -K(\tau, \tau') &= -k(\tau, \tau') - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ H_n \cos \frac{n\pi\tau}{2l} \cos \frac{n\pi\tau'}{2l} + \right. \\ &\quad \left. + L_n \sin \frac{n\pi\tau}{2l} \sin \frac{n\pi\tau'}{2l} \right\}, \quad (43) \end{aligned}$$

где

$$k(\tau, \tau') = M_1 + M_2 \tau \tau' + M_3 (\tau^2 + \tau'^2) - |\tau - \tau'|; \quad (44)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{\frac{2}{\tau_0}} \left(\frac{A_0}{2} + B_0 + C_0 \right) + \frac{\tau_0}{3} \left\{ 1 + \frac{E_2(\tau_0)}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{R}{2} [1 - E_2(\tau_0) + S_1] - \frac{R^2 S_2}{2} \right\}; \quad (45) \end{aligned}$$

$$M_2 = \frac{1}{\tau_0} [-1 + E_2(\tau_0) + R[1 - E_2(\tau_0) + S_1] - R^2 S_2]; \quad (46)$$

$$M_3 = \frac{1}{2\tau_0} \{1 - E_2(\tau_0) + R[1 - E_2(\tau_0) + S_1] + R^2 S_3\}; \quad (47)$$

$$H_n = A_n^{(1)} + B_n^{(1)} + C_n^{(1)}; \quad L_n = A_n^{(1)} + C_n^{(1)} - B_n^{(1)}; \quad (48)$$

$$B_n^{(1)} = (-1)^{n+1} \frac{2R\tau_0^2}{n^3\pi^3} \left[\operatorname{arctg} \frac{n\pi}{\tau_0} + S_2(n) \right]; \quad (49)$$

$$C_n^{(1)} = \frac{2R^2\tau_0^2}{n^3\pi^3} S_4(n). \quad (50)$$

Рассмотрим уравнение (24), заменив его ядро соотношением (44). Прежде всего определим собственные числа ядра $-k(\tau, \tau')$. Для этого обратимся к соответствующему однородному уравнению, которое имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) = & -NM_1 \int_{-l}^l \varphi(\tau') d\tau' - NM_2 \tau \int_{-l}^l \tau' \varphi(\tau') d\tau' - \\ & - NM_3 \tau^2 \int_{-l}^l \varphi(\tau') d\tau' - NM_3 \int_{-l}^l \tau'^2 \varphi(\tau') d\tau' + \\ & + N \int_{-l}^l (\tau - \tau') \varphi(\tau') d\tau' + N \int_{-l}^l (\tau' - \tau) \varphi(\tau') d\tau'. \end{aligned} \quad (51)$$

Трижды продифференцировав равенство (51), приходим к дифференциальному уравнению

$$\varphi'' = 2N\varphi', \quad (52)$$

общее решение которого выглядит так:

$$\varphi(\tau) = \frac{C_1}{m} e^{m\tau} - \frac{C_2}{m} e^{-m\tau} + C_3, \quad (53)$$

где

$$m^2 = 2N. \quad (54)$$

Подставив выражение (53) в (51), найдем

$$\begin{aligned} & C_3 + NM_1 \left[(e^{ml} - e^{-ml}) \left(\frac{C_1 - C_2}{m^2} + 2C_3 l \right) \right] + \\ & + NM_2 \tau \left[(e^{ml} + e^{-ml}) \left(\frac{C_1 l + C_2 l}{m^2} \right) - (e^{ml} + e^{-ml}) \left(\frac{C_1 + C_2}{m^2} \right) \right] + \\ & + NM_3 \tau^2 \left[(e^{ml} - e^{-ml}) \left(\frac{C_1 - C_2}{m^2} \right) + 2C_3 l \right] + \\ & + NM_3 \left\{ \left[(e^{ml} - e^{-ml}) \left(l^2 + \frac{2}{m^2} \right) - (e^{ml} + e^{-ml}) \frac{2l}{m} \right] \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{C_1 - C_2}{m^2} \right) + \frac{2C_3 l^2}{3} \right\} + N\tau (e^{ml} + e^{-ml}) \left(\frac{C_1 + C_2}{m^2} \right) + \\ & + \frac{N}{m^2} (e^{ml} + e^{-ml}) (C_1 - C_2) - \frac{Nl}{m^2} (e^{ml} - e^{-ml}) (C_1 - C_2) - \\ & - NC_3 (l^2 + \tau^2) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку это соотношение должно быть тождественным относительно τ , то для определения C_1 , C_2 и C_3 получается система линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} -M_3 \operatorname{sh} ml C_1 + M_3 \operatorname{sh} ml C_2 + \frac{m^2}{2} (1 - 2M_3 l) C_3 &= 0; \\ \left[\frac{M_2}{m} \operatorname{sh} ml - (M_2 l + 1) \operatorname{ch} ml \right] C_1 + \\ + \left[\frac{M_2}{m} \operatorname{sh} ml - (M_2 l + 1) \operatorname{ch} ml \right] C_2 &= 0; \\ \left\{ (2M_3 l - 1) \frac{\operatorname{ch} ml}{m} + \left[l - M_1 - M_3 \left(l^2 + \frac{2}{m^2} \right) \right] \times \right. \\ \times \operatorname{sh} ml \left. \right\} C_1 + \left\{ -(2M_3 l - 1) \frac{\operatorname{ch} ml}{m} - \left[l - M_1 - M_3 \times \right. \right. \\ \times \left. \left. \left(l^2 + \frac{2}{m^2} \right) \right] \operatorname{sh} ml \right\} C_2 + \\ + \left[-1 + m^2 \left(\frac{l^2}{2} - M_1 l - \frac{M_3 l^3}{3} \right) \right] C_3 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

условием разрешимости которой является равенство нулю ее определителя

$$2 \left[(M_2 l + 1) \operatorname{ch} ml - \frac{M_2}{m} \operatorname{sh} ml \right] \left\{ -\frac{m}{2} \operatorname{ch} ml (1 - 2M_3 l)^2 - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} ml \left[2M_3 (1 - M_3 l) - m^2 \left(\frac{l}{2} - M_3 l^2 + \frac{2}{3} M_3^2 l^3 - \frac{M_1}{2} \right) \right] \right\} = 0.$$

Таким образом, приходим к уравнениям, позволяющим определить область собственных чисел

$$\operatorname{th} z = z \left(1 + \frac{1}{M_2 l} \right) \quad (55)$$

и

$$\operatorname{th} z = \frac{(1 - 2M_3 l)^2 z}{z^2 \left(1 + \frac{4}{3} M_3^2 l^2 - \frac{M_1}{l} - 2M_3 l \right) - 4l M_3 (1 - M_3 l)}, \quad (56)$$

где $z = ml$.

Найдя решения z_{k1} и z_{k2} уравнений (55) и (56), получим все собственные числа задачи

$$N_k^{(1)} = \frac{2(z_{k1})^2}{\tau_0^2}; \quad N_k^{(2)} = \frac{2(z_{k2})^2}{\tau_0^2}. \quad (57)$$

Итак, для всех N , отличных от $N_k^{(1)}$ и $N_k^{(2)}$, неоднородное уравнение

$$\alpha(\tau) = f(\tau) - N \int_{-l}^l k(\tau, \tau') \alpha(\tau') d\tau', \quad (58)$$

где

$$f(\tau) = aN\tau + C_1 - Ne \frac{\Delta T}{T_0} [I_3^*(\tau) + I_4^*(\tau)], \quad (59)$$

имеет единственное решение. Так как свободная функция (59) имеет интегрируемую третью производную, то и в этом случае, продифференцировав выражение (58) трижды по τ , приходим к дифференциальному уравнению

$$\alpha'''' = f'''' + 2N\alpha', \quad (60)$$

решение которого легко получить методом вариации произвольных постоянных

$$\alpha(\tau) = f(\tau) + \frac{m^2}{2} [u_1(\tau) + u_2(\tau)] + \frac{C_4}{m} e^{m\tau} - \frac{C_5}{m} e^{-m\tau} + C_6, \quad (61)$$

где

$$u_1(\tau) = \int [e^{-m\tau} (\int f(\tau) e^{m\tau} d\tau)] d\tau; \quad (62)$$

$$u_2(\tau) = \int [e^{m\tau} (\int f(\tau) e^{-m\tau} d\tau)] d\tau; \quad (63)$$

C_4 , C_5 и C_6 — произвольные постоянные, для определения которых необходимо подставить $\alpha(\tau)$ в выражение (58) и добиться тождественного удовлетворения последнего. Вычисление функций $u_1(\tau)$ и $u_2(\tau)$ подробно приведено в приложении 4, согласно которому

$$\frac{m^2}{2} (u_1 + u_2) = -aN\tau - Ne \frac{\Delta T}{T_0} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} L_n^{(1)}(\tau) + \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} L_n^{(2)}(\tau) \right\}. \quad (64)$$

С учетом выражения (59), получим

$$\alpha(\tau) = \frac{C_4}{m} e^{m\tau} - \frac{C_5}{m} e^{-m\tau} + C_6 + Ne \frac{\Delta T}{T_0} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} \Psi_n^{(1)}(\tau) + \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} \Psi_n^{(2)}(\tau) \right\}, \quad (65)$$

причем C_1^* теперь включено в C_6 . Подставив уравнение (65) в (58) и сделав необходимые выкладки, найдем

$$\begin{aligned} -aN\tau &= -C_6 - NM_1 [(e^{ml} - e^{-ml}) (\frac{C_4 - C_5}{m^2}) + 2C_6 l] - \\ &- NM_2 \tau [(e^{ml} + e^{-ml}) (\frac{C_4 l + C_5 l}{m^2}) - (e^{ml} - e^{-ml}) (\frac{C_4 + C_5}{m^3})] - \\ &- NM_3 \tau^2 [(e^{ml} - e^{-ml}) (\frac{C_4 - C_5}{m^2}) + 2C_6 l] - \\ &- NM_3 \left\{ \left[(l^2 + \frac{2}{m^2}) (e^{ml} - e^{-ml}) - \frac{2l}{m} (e^{ml} + e^{-ml}) \right] \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{C_4 - C_5}{m^2} \right) + \frac{2}{3} C_6 l^3 \right\} - \frac{N\tau}{m^2} (e^{ml} + e^{-ml}) (C_4 + C_5) + \\ &+ \frac{Nl}{m^3} (e^{ml} - e^{-ml}) (C_4 - C_5) - \frac{N}{m^3} (e^{ml} + e^{-ml}) (C_4 - C_5) + \\ &+ NC_6 (l^2 + \tau^2) - NM_1 [V_1(l) - V_1(-l)] - NM_3 \tau^2 [V_1(l) - V_1(-l)] - \\ &- NM_2 \tau [V_2(l) - V_2(-l)] - NM_3 [V_3(l) - V_3(-l)] - \\ &- N\tau [V_1(-l) + V_1(l)] + N [V_2(l) + V_2(-l)], \quad (66) \end{aligned}$$

где

$$V_1(\tau) = \int \left[f(\tau) + \frac{m^2}{2} (u_1 + u_2) \right] d\tau; \quad (67)$$

$$V_2(\tau) = \int \tau \left[f(\tau) + \frac{m^2}{2} (u_1 + u_2) \right] d\tau; \quad (68)$$

$$V_3(\tau) = \int \tau^2 \left[f(\tau) + \frac{m^2}{2} (u_1 + u_2) \right] d\tau. \quad (69)$$

Так как уравнение (66) должно выполняться при любых значениях τ в интервале $(-l, l)$, то постоянные C_4, C_5, C_6 являются решениями системы уравнений

$$\begin{aligned}
 & -M_3 \operatorname{sh} ml \cdot C_4 + M_3 \operatorname{sh} ml \cdot C_5 + \frac{m^2}{2} (1 - 2M_3 l) C_6 = \\
 & \quad = \frac{m^2}{2} M_3 [V_1(l) - V_1(-l)]; \\
 & \quad \left[\frac{M_2}{m} \operatorname{sh} ml - (M_2 l + 1) \operatorname{ch} ml \right] C_4 + \\
 & \quad + \left[\frac{M_2}{m} \operatorname{sh} ml - (M_2 l + 1) \operatorname{ch} ml \right] C_5 = \\
 & = -aN + \frac{m^2}{2} M_2 [V_2(l) - V_2(-l)] + \frac{m^2}{2} [V_1(l) + V_1(-l)]; \\
 & \left\{ (2M_3 l - 1) \frac{\operatorname{ch} ml}{m} + \left[l - M_1 - M_3 \left(l^2 + \frac{2}{m^2} \right) \right] \operatorname{sh} ml \right\} C_4 + \\
 & + \left\{ -(2M_3 l - 1) \frac{\operatorname{ch} ml}{m} - \left[l - M_1 - M_3 \left(l^2 + \frac{2}{m^2} \right) \right] \operatorname{sh} ml \right\} C_5 + \\
 & \quad + \left[-1 + m^2 \left(\frac{l^2}{2} - M_1 l - \frac{M_3 l^3}{3} \right) \right] C_6 = \\
 & = NM_1 [V_1(l) - V_1(-l)] + NM_3 [V_3(l) - V_3(-l)] - \\
 & \quad - N [V_2(l) + V_2(-l)],
 \end{aligned} \tag{70}$$

решая которую, найдем

$$\begin{aligned}
 C_4 = & \frac{1}{\Delta} \left\{ N(1 - 2M_3 l)(A - B) + \right. \\
 & \left. + \left[-1 + 2N \left(\frac{l^2}{2} - M_1 l - \frac{M_3 l^3}{3} \right) \right] (C + D) \right\},
 \end{aligned} \tag{71}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta = & 2 \left[(M_2 l + 1) \operatorname{ch} ml - \frac{M_2}{m} \operatorname{sh} ml \right] \times \\
 & \times \left\{ -\frac{m}{2} \operatorname{ch} ml (1 - 2M_3 l)^2 - \operatorname{sh} ml \left[2M_3 (1 - M_3 l) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - m^2 \left(\frac{l}{2} - M_3 l^2 + \frac{2}{3} M_3^2 l^3 - \frac{M_1}{2} \right) \right] \right\}; \\
 A = & \{-aN + NM_2 [V_2(l) - V_2(-l)] + N [V_1(l) + V_1(-l)]\} \times \\
 & \times \left\{ \left[M_1 + M_3 \left(l^2 + \frac{2}{m^2} \right) - l \right] \operatorname{sh} ml + (1 - 2M_3 l) \frac{\operatorname{ch} ml}{m} \right\}; \\
 B = & \left[\frac{M_2}{m} \operatorname{sh} ml - (M_2 l + 1) \operatorname{ch} ml \right] \times \\
 & \times \{ NM_1 [V_1(l) - V_1(-l)] + NM_3 [V_3(l) - V_3(-l)] - N [V_2(l) + V_2(-l)] \}; \\
 C = & -M_3 \operatorname{sh} ml \{-aN + NM_2 [V_2(l) - V_2(-l)] + N [V_1(l) + V_1(-l)]\}; \\
 D = & NM_3 [V_1(l) - V_1(-l)] \left[\frac{M_2}{m} \operatorname{sh} ml - (M_2 l + 1) \operatorname{ch} ml \right]; \\
 C_5 = & \frac{1}{\Delta} \left\{ N(1 - 2M_3 l)(A + B) + \right. \\
 & \left. + \left[-1 + 2N \left(\frac{l^2}{2} - M_1 l - \frac{M_3 l^3}{3} \right) \right] (C - D) \right\}.
 \end{aligned} \tag{72}$$

Аналитические выражения функций (67)—(69) также приведены в приложении 4.

Возвращаясь теперь к прежним переменным, вместо выражения (65) имеем

$$\alpha(\tau) = \frac{C_4}{m} e^{m(\tau-0,5\tau_0)} - \frac{C_5}{m} e^{-m(\tau-0,5\tau_0)} + C_6 + Ne \frac{\Delta T}{T_0} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} \Phi_n^{(1)}(\tau) + \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} \Phi_n^{(2)}(\tau) \right\}, \quad (73)$$

где

$$\Phi_n^{(1)}(\tau) = \frac{E_2(\tau + b_n)}{n^2} - \frac{e^{-m(\tau + b_n)}}{2m^2} E_1[(1-m)(\tau + b_n)] + \frac{e^{m(\tau + b_n)}}{2m^2} E_1[(1+m)(\tau + b_n)]; \quad (74)$$

$$\Phi_n^{(2)}(\tau) = \frac{E_2(b_n - \tau)}{n^2} - \frac{e^{-m(b_n - \tau)}}{2m^2} E_1[(1-m)(b_n - \tau)] + \frac{e^{m(b_n - \tau)}}{2m^2} E_1[(1+m)(b_n - \tau)]; \quad (75)$$

$$b_n = \tau_0 + 2n\tau_0.$$

Для $\tau = 0$ находим

$$\alpha(0) = 0 = \frac{C_4}{m} e^{-0,5m\tau_0} - \frac{C_5}{m} e^{0,5m\tau_0} + C_6 + Ne \frac{\Delta T}{T_0} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} \Phi_n^{(1)}(0) + \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} \Phi_n^{(2)}(0) \right\}$$

и, вычитая это равенство из выражения (73), окончательно получим

$$\alpha(\tau) = \frac{C_4}{m} e^{-0,5m\tau_0} (e^{m\tau} - 1) - \frac{C_5}{m} e^{0,5m\tau_0} (e^{-m\tau} - 1) + Ne \frac{\Delta T}{T_0} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} [\Phi_n^{(1)}(\tau) - \Phi_n^{(1)}(0)] + \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} [\Phi_n^{(2)}(\tau) - \Phi_n^{(2)}(0)] \right\}. \quad (76)$$

Соотношение (76) дает точное решение исходного линейного уравнения со вспомогательным ядром $-k(\tau, \tau')$, которое следует рассматривать как второе приближение в решении (24). Степень точности этого приближения, так же как и последующие уточнения, можно определить методом, аналогичным применяемому в работе [1]. Однако эти громоздкие выкладки не будем здесь приводить, укажем лишь, что поскольку в реализуемых на практике случаях $\frac{\tau_0}{\pi} \ll 1$, то ядра $-K(\tau, \tau')$ и $-k(\tau, \tau')$ мало отличаются друг от друга во всем квадрате $-l \leq \tau, \tau' \leq l$, что видно из выражений (42), (43) и (48)—(50). Поэтому приведенное здесь приближенное решение весьма близко к точному. Некоторые числовые оценки приведены ниже.

Равенство (76) описывает относительное распределение температур $\alpha(\tau)$, которое выражается через полный температурный перепад ΔT на слое

(величина $\frac{\Delta T}{T_0}$ входит множителем не только в последнее слагаемое, но и в выражения функций $V_1(\tau)$, $V_2(\tau)$ и $V_3(\tau)$ и, следовательно, в постоянные C_4 и C_5). Для того чтобы найти ΔT , в равенстве (76) принимаем $\tau = \tau_0$. Тогда получим уравнение

$$\alpha(\tau_0) = \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{2(C_4 + C_5)}{m} \operatorname{sh} 0,5m\tau_0 + \\ + Ne \frac{\Delta T}{T_0} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} [\Phi_n^{(1)}(\tau_0) - \Phi_n^{(1)}(0)] + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} [\Phi_n^{(1)}(\tau_0) - \Phi_n^{(1)}(0)] \right\} \quad (77)$$

и решаем его относительно ΔT .

Полученные решения использовались для расчета температурных полей в кварцевой пластине ($\lambda = 1,5 \text{ вт/м} \cdot \text{град}$) толщиной $h = 5 \text{ мм}$ при температурах 700, 1000 и 1500° К. Коэффициенты отражения границ принимались равными 0,1; 0,5 и 0,9. Полный поток энергии $Q = 7,5 \cdot 10^3 \text{ вт/м}^2$. Усредненный показатель поглощения составляет 62,5; 27,6 и 14 м^{-1} для указанных температур соответственно [5]. Результаты расчетов полных температурных перепадов ΔT (в град) представлены в таблице. Для сравнения укажем, что без учета излучения при тех же условиях ($\lambda = 1,5 \text{ вт/м} \cdot \text{град}$) разность температур на границах кварцевой пластины составляла бы 25,0 град.

Коэффициент отражения границ	Температура, °К		
	700	1000	1500
0,1	18,0	11,1	4,6
0,5	23,2	16,2	12,1
0,9	24,3	23,0	19,6

Пластина с абсолютно поглощающими границами

В работе [1] для вектора радиации плоского слоя с абсолютно черными границами было использовано полученное в приложении I соотношение (5аП). Переходя к усредненному по спектру показателю поглощения, имеем

$$e(x) = 2n^2\sigma k \left\{ \int_{\zeta=0}^x T^4(\zeta) E_2[k(x-\zeta)] d\zeta - \int_{\zeta=x}^h T^4(\zeta) E_2[k(\zeta-x)] d\zeta \right\} + \\ + 2n^2\sigma T_0^4 E_3(kx) - 2n^2\sigma T_h^4 E_3[k(h-x)]. \quad (78)$$

Используя соотношение (8) и учитывая равенство нулю выражения

$$2n^2\sigma k \left\{ \int_{\zeta=0}^x T_0^4 E_2[k(x-\zeta)] d\zeta - \int_{\zeta=x}^h T_0^4 E_2[k(\zeta-x)] d\zeta \right\} + \\ + 2n^2\sigma T_0^4 E_3(kx) - 2n^2\sigma T_0^4 E_3[k(h-x)],$$

определяющего вектор радиации изотермического слоя при температуре T_0 , находим из равенства (78)

$$\varepsilon(x) = -8n^2\sigma T_0^3 k \left\{ \int_{\zeta=0}^x \vartheta(\zeta) E_2[k(x-\zeta)] d\zeta - \int_{\zeta=x}^h \vartheta(\zeta) E_2[k(\zeta-x)] d\zeta \right\} + 8n^2\sigma T_0^3 \Delta T E_3[k(h-x)],$$

а из (4)

$$-\lambda \frac{dT}{dx} - 8n^2\sigma T_0^3 k \left\{ \int_{\zeta=0}^x \vartheta(\zeta) E_2[k(x-\zeta)] d\zeta - \int_{\zeta=x}^h \vartheta(\zeta) E_2[k(\zeta-x)] d\zeta \right\} + 8n^2\sigma T_0^3 \Delta T E_3[k(h-x)] = Q.$$

Проинтегрировав это соотношение и используя те же безразмерные параметры, что и в предыдущем рассмотрении, приходим к уравнению

$$\alpha(\tau) = \alpha\tau N + C_1 - N \frac{\Delta T}{T_0} E_4(\tau_0 - \tau) - N \int_0^{\tau_0} E_3|\tau - \tau'| \alpha(\tau') d\tau', \quad (79)$$

которое после замены переменных $\tau_1 = \tau - 0,5\tau_0$ и $\tau'_1 = \tau' - 0,5\tau_0$ примет вид

$$\alpha(\tau) = \alpha\tau N + C_1^* - N \frac{\Delta T}{T_0} E_4\left(\frac{\tau_0}{2} - \tau\right) - N \int_{-l}^l E_3|\tau - \tau'| \alpha(\tau') d\tau'. \quad (80)$$

Здесь нижние индексы у новых переменных опущены и введено обозначение $l = 0,5\tau_0$. Это уравнение имеет симметричное ядро, зависящее от разности аргументов. Преобразовав его, как в предыдущем случае получим

$$-E_3|\tau - \tau'| = -M_1 - M_2\tau\tau' - M_3(\tau^2 + \tau'^2) + |\tau - \tau'| - \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \cos \frac{n\pi|\tau - \tau'|}{2l}, \quad (81)$$

где

$$M_1 = \sqrt{\frac{2}{\tau_0}} \cdot \frac{A_0}{2} + \frac{\tau_0}{6} [1 + E_2(\tau_0)]; \quad (82)$$

$$M_2 = -\frac{1}{\tau_0} [1 - E_2(\tau_0)]; \quad (83)$$

$$M_3 = \frac{1}{2\tau_0} [1 - E_2(\tau_0)]. \quad (84)$$

Здесь $A_n^{(1)}$ определяется соотношением (42). Отбросив в равенстве (81) последнее слагаемое, получим новое ядро $-k(\tau, \tau')$. Интегральное уравнение с таким ядром решается тем же методом, что и выше, т. е.

$$\alpha(\tau) = f(\tau) + \frac{m^2}{2} [u_1(\tau) + u_2(\tau)] + \frac{C_4}{m} e^{m\tau} - \frac{C_5}{m} e^{-m\tau} + C_6,$$

где снова $u_1(\tau)$ и $u_2(\tau)$ определяются по формулам (62) и (63), но $f(\tau)$ имеет более простой вид

$$f(\tau) = \alpha\tau N + C_1^* - N \frac{\Delta T}{T_0} E_4\left(\frac{\tau_0}{2} - \tau\right). \quad (85)$$

После всех преобразований находим

$$\alpha(\tau) = \frac{C_4}{m} e^{m\tau} - \frac{C_5}{m} e^{-m\tau} + C_6 + N \frac{\Delta T}{T_0} \left\{ \frac{1}{m^2} E_2(0,5\tau_0 - \tau) + \frac{1}{2m^2} e^{m(0,5\tau_0 - \tau)} E_1[(1+m)(0,5\tau_0 - \tau)] - \frac{1}{2m^2} e^{-m(0,5\tau_0 - \tau)} E_1[(1-m)(0,5\tau_0 - \tau)] \right\}. \quad (86)$$

Возвращаясь к прежним переменным и принимая во внимание условие $\alpha(0) = 0$, получим

$$\alpha(\tau) = \frac{C_4}{m} e^{-0,5m\tau_0} (e^{m\tau} - 1) - \frac{C_5}{m} e^{0,5m\tau_0} (e^{-m\tau} - 1) + N \frac{\Delta T}{T_0} [\Phi(\tau) - \Phi(0)], \quad (87)$$

где

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{m^2} E_2(\tau_0 - \tau) + \frac{1}{2m^2} e^{m(\tau_0 - \tau)} E_1[(1+m)(\tau_0 - \tau)] - \frac{1}{2m^2} e^{-m(\tau_0 - \tau)} E_1[(1-m)(\tau_0 - \tau)]. \quad (88)$$

Постоянные C_4 и C_5 находятся из системы (70) и определяются соотношениями (71) и (72), в которых функции $V_1(\tau)$, $V_2(\tau)$ и $V_3(\tau)$ заменяются более простыми выражениями (см. приложение 4). Для относительного температурного перепада $\frac{\Delta T}{T_0}$ получим уравнение

$$\alpha(\tau_0) = \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{2(C_4 + C_5)}{m} \operatorname{sh} \frac{m\tau_0}{2} + N \frac{\Delta T}{T_0} [\Phi(\tau_0) - \Phi(0)]. \quad (89)$$

Оценив погрешность, которая возникает при замене ядра $-E_3|\tau - \tau'|$ на $-k(\tau, \tau')$, из выражения (81) получим

$$|\delta| \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \cos \frac{n\pi |\tau - \tau'|}{2l} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n^{(1)}| \leq \frac{2\tau_0^2}{\pi^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{arctg} \frac{n\pi}{\tau_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} |Im E_1(\tau_0 + in\pi)| \right\}. \quad (90)$$

Расчет проведем для параметров, указанных выше. Для температур 1000 и 1500° К получаем τ_0 , равное соответственно 0,138 и 0,07, следовательно $\operatorname{arctg} \frac{n\pi}{\tau_0}$ можно заменить на $\frac{\pi}{2}$, пренебрегая в то же время второй суммой в неравенстве (90). После вычислений находим

$$|\delta|_{T=1000^\circ} \leq 2,3 \cdot 10^{-3}; \quad |\delta|_{T=1500^\circ} \leq 5,6 \cdot 10^{-4}.$$

При этом $E_3|\tau - \tau'|$ во всем квадрате $-l \leq \tau, \tau' \leq l$ изменяется от $E_3(0) = 0,5$ до $E_3(2\tau_0)$, что соответствует 0,3175 и 0,3888 для температуры 1000 и 1500° К. Как видно, замена ядра производится с погрешностью, не превышающей 0,7%.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Вектор радиации плоского слоя

В целом ряде работ приводятся аналитические выражения для потока лучистой энергии плоского слоя, но они отличаются друг от друга, а выкладки, как правило, отсутствуют (например работы [6 и 7]). Рассмотрим отдельные составляющие вектора \vec{e} и выведем для него общее выражение в виде, наиболее удобном для приведенного выше решения.

Рассмотрим элементарный объем при координате x , считая его сферой с единичной площадью большого круга (см. рис. 1). Для определения $\varepsilon(x)$ необходимо найти суммарный поток радиации, достигающий поверхности этой сферы [2]. Предположим, что поглощение лучистой энергии происходит по закону Бугера и рассеяние в среде отсутствует. Весь лучистый поток, приходящий к каждой точке среды, складывается из $\vec{e}_1(x)$ и $\vec{e}_2(x)$ — излучений сред, находящихся соответственно слева и справа от точки рассмотрения, т. е. при

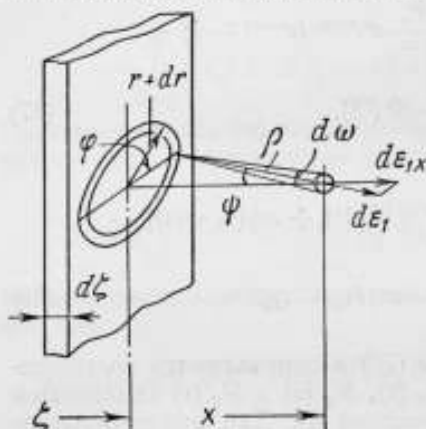


Рис. 2

$\zeta < x$ и $\zeta > x$ (ζ — текущая координата), $\vec{e}_3(x)$ и $\vec{e}_4(x)$ — потоков радиации соответственно от левой и правой границ.

$\vec{e}_{1g}(x)$ и $\vec{e}_{2g}(x)$ — обозначают ту долю испускаемой веществом радиации, которая после многократных отражений от стенок вновь возвращается к точке рассмотрения, подходя к ней соответственно слева и справа; $\vec{e}_{3g}(x)$ и $\vec{e}_{4g}(x)$ — имеют тот же смысл, но относятся не к радиации самой среды, а к излучению границ. Таким образом, находим

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_{1g} - \varepsilon_{2g} + \varepsilon_{3g} - \varepsilon_{4g}. \quad (1\Pi)$$

Рассмотрим составляющую $\vec{e}_1(x)$. С этой целью выделим слой толщиной $d\xi$ (рис. 2) и проведем две окружности радиусом r и $r + dr$. Поток от элементарного объема $dV = r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\xi$ будет

$$d\varepsilon_{1x} = j_V e^{-k_V \rho} \cos \psi \, d\omega \, dV.$$

Учитывая, что $\rho = \frac{x - \zeta}{\cos \psi}$, $r = (x - \zeta) \operatorname{tg} \psi$ и $d\omega = \frac{1}{\rho^2}$, получим

$$d\varepsilon_{1x} = j_V e^{-\frac{k_V(x-\zeta)}{\cos \psi}} \sin \psi \, d\varphi \, d\xi \, d\psi.$$

Лучистый поток от элемента объема $\delta V = 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot d\xi$ составит

$$\delta\varepsilon_{1x} = 2\pi j_V e^{-\frac{k_V(x-\zeta)}{\cos \psi}} \sin \psi \, d\xi \, d\psi.$$

Проинтегрировав это равенство по ψ от 0 до $\frac{\pi}{2}$, получим выражение для лучистого потока от всего слоя при координате ζ

$$\Delta\varepsilon_{1x} = 2\pi j_V d\xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{k_V(x-\zeta)}{\cos \psi}} \sin \psi \, d\psi = 2\pi j_V E_2[k_V(x-\zeta)] d\xi.$$

При вычислении интеграла была сделана подстановка $t = \frac{k_V(x-\zeta)}{\cos \psi}$ и введено обозначение

$E_n(x) = x^{n-1} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^n} dt$. Эти интегралопозвательные функции протабулированы в работе [8]. Наконец, интегрируя по ζ от 0 до x и по всему спектру, находим

$$\varepsilon_1(x) = 2\pi \int_{\nu=0}^{\infty} \int_{\zeta=0}^x j_V(\zeta) E_2[k_V(x-\zeta)] d\xi \, d\nu. \quad (2\Pi)$$

Составляющая $\bar{e}_2(x)$ находится аналогично предыдущей, но при этом учитывается, что $\zeta > x$,

$$e_2(x) = 2\pi \int_{v=0}^{\infty} \int_{\zeta=x}^h j_v(\zeta) E_2[k_v(\zeta-x)] d\zeta dv. \quad (3\Pi)$$

При вычислении третьей и четвертой составляющих предполагаем, что угловое распределение яркости грани подчиняется закону Ламберта. Тогда от элемента поверхности $dS = r \cdot dr \cdot d\varphi$ (рис. 3) к координате x приходит лучистый поток

$$de_{3x} = B_v^{(1)} \frac{e^{-k_v \rho}}{\rho^2} \cos \psi r dr d\varphi.$$

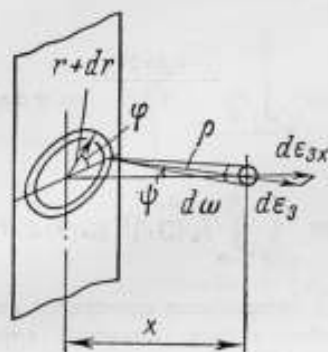


Рис. 3

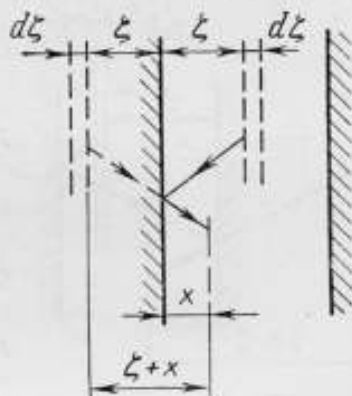


Рис. 4

Так же, как и для составляющей $\bar{e}_1(x)$, находим для его проекции на ox выражение

$$de_{1x} = B_v^{(1)} e^{-\frac{k_v x}{\cos \psi}} \sin \psi \cos \psi d\psi d\varphi.$$

Проинтегрировав по φ и по ψ , получим

$$\Delta e_{3x} = 2\pi B_v^{(1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{k_v x}{\cos \psi}} \sin \psi \cos \psi d\psi = 2\pi B_v^{(1)} E_3(k_v x).$$

И, наконец, находим выражения для составляющих $e_3(x)$, $e_4(x)$

$$e_3(x) = 2\pi \int_{v=0}^{\infty} B_v^{(1)} E_3(k_v x) dv; \quad (4\Pi)$$

$$e_4(x) = 2\pi \int_{v=0}^{\infty} B_v^{(2)} E_3[k_v(h-x)] dv. \quad (5\Pi)$$

Если пластина ограничена абсолютно черными поверхностями, то остальные составляющие равны нулю, и тогда выражение для вектора радиации будет

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) = 2\pi \int_{v=0}^{\infty} \left\{ \int_{\zeta=0}^x j_v(\zeta) E_2[k_v(x-\zeta)] d\zeta - \int_{\zeta=x}^h j_v(\zeta) E_2[k_v(\zeta-x)] d\zeta + \right. \\ \left. + B_v^{(1)} E_3(k_v x) - B_v^{(2)} E_3[k_v(h-x)] \right\} dv, \end{aligned} \quad (5a\Pi)$$

которое было использовано в работе [1].

Для вычисления составляющей $\bar{v}_{1g}(x)$ обратимся к рис. 4. Всякий луч, приходящий после однократного отражения от границы к координате x от элементарного слоя $d\zeta$, находящегося на расстоянии ζ от левой стенки, можно рассматривать, как выходящий из такого же элементарного слоя, но расположенного за левой плоскостью на расстоянии ζ . Таким образом, зеркально отражая в левой границе слой $d\zeta$, можно рассматривать фиктивный слой, находящийся на расстоянии $\zeta + x$ от координаты наблюдения. Проведя такую замену для каждой точки среды и проинтегрировав по всей толщине слоя, получим выражение для лучистого потока $\varepsilon_{1g}^{(1)}$, который приходит к координате x слева после однократного отражения от левой границы

$$\varepsilon_{1g}^{(1)}(x) = 2\pi \int_{v=0}^{\infty} \int_{\zeta=0}^h \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R j_v(\zeta) e^{-\frac{k_v(x+\zeta)}{\cos \varphi}} \sin \varphi d\varphi d\zeta dv.$$

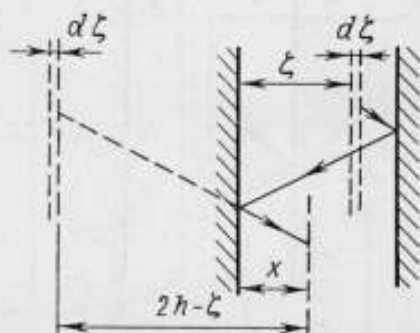


Рис. 5

Обозначив

$$J_1^{(1)}(\zeta, v) = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R e^{-\frac{k_v(x+\zeta)}{\cos \varphi}} \sin \varphi d\varphi. \quad (6П)$$

получим

$$\varepsilon_{1g}^{(1)}(x) = 2\pi \int_{v=0}^{\infty} \int_{\zeta=0}^h j_v(\zeta) J_1^{(1)}(\zeta, v) d\zeta dv. \quad (7П)$$

Аналогично рассматривая однократно отраженный от обеих границ лучистый поток $\varepsilon_{1g}^{(2)}$ (рис. 5), получим

$$\varepsilon_{1g}^{(2)}(x) = 2\pi \int_{v=0}^{\infty} \int_{\zeta=0}^h j_v(\zeta) J_1^{(2)}(\zeta, v) d\zeta dv, \quad (8П)$$

где

$$J_1^{(2)}(\zeta, v) = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R^2 e^{-\frac{k_v(2h+x-\zeta)}{\cos \varphi}} \sin \varphi d\varphi. \quad (9П)$$

Заменяя в показателе экспоненты в формуле (6П) $x + \zeta$ на $2h + x + \zeta$, а затем на $4h + x + \zeta$, $6h + x + \zeta$ и т. д. и подставив полученные интегралы $J_1^{(3)}$, $J_1^{(5)}$, $J_1^{(7)}$ и т. д. в выражение (7П), найдем лучистые потоки, отраженные 2, 3, 4 . . . и т. д. раз от левой границы. (Подынтегральные выражения в $J_1^{(3)}$, $J_1^{(5)}$, $J_1^{(7)}$. . . умножаются соответственно на R^2 , R^4 , R^6 . . .). Заменяя в показателе экспоненты в уравнении (9П) $2h + x - \zeta$ на $4h + x - \zeta$, а затем на $6h + x - \zeta$, $8h + x - \zeta$ и т. д. и умножив подынтегральное выражение на R^2 , R^4 , R^6 . . ., получим интегралы $J_1^{(4)}$, $J_1^{(6)}$, $J_1^{(8)}$ Затем аналогично выражению (8П) найдем лучистые потоки, отраженные 2, 3, 4 . . . и т. д. раз от правой границы и приходящие слева к координате x . Суммируя все полученные выражения, имеем

$$\varepsilon_{1g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{1g}^{(n)}(x) = 2\pi \int_{v=0}^{\infty} \int_{\zeta=0}^h j_v(\zeta) J_{1g}(x, v, \zeta) dv d\zeta, \quad (10П)$$

где

$$J_{1g}(x, v, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} J_1^{(n)} = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \left(R e^{-\frac{k_v(x+\zeta)}{\cos \varphi}} + R^2 e^{-\frac{k_v(2h+x-\zeta)}{\cos \varphi}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + R^2 e^{-\frac{k_v(2h+x-\zeta)}{\cos \varphi}} + R^4 e^{-\frac{k_v(4h+x-\zeta)}{\cos \varphi}} \dots) d\varphi = \\
& = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \sin \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}}} \left(e^{-\frac{k_v(x+\zeta)}{\cos \varphi}} + R e^{-\frac{k_v(2h+x-\zeta)}{\cos \varphi}} \right) d\varphi. \quad (11\Pi)
\end{aligned}$$

Аналогично находятся выражения для остальных составляющих вектора радиации

$$\varepsilon_{2g}(x) = 2\pi \int_{v=0}^{\infty} \int_{\xi=0}^h j_v(\xi) J_{2g}(\xi, v, x) dv d\xi; \quad (12\Pi)$$

$$J_{2g}(\xi, v, x) = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \sin \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}}} \left[e^{-\frac{k_v(2h-x-\xi)}{\cos \varphi}} + R e^{-\frac{k_v(2h-x+\xi)}{\cos \varphi}} \right] d\varphi; \quad (13\Pi)$$

$$\varepsilon_{3g}(x) = 2\pi \int_{v=0}^{\infty} \left\{ J'_{3g}(v, x) B_v^{(2)} + J''_{3g}(v, x) B_v^{(1)} \right\} dv; \quad (14\Pi)$$

$$J'_{3g}(v, x) = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \sin \varphi \cos \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}}} e^{-\frac{k_v(h+x)}{\cos \varphi}} d\varphi; \quad (15\Pi)$$

$$J''_{3g}(v, x) = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2 \sin \varphi \cos \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}}} e^{-\frac{k_v(x+2h)}{\cos \varphi}} d\varphi; \quad (16\Pi)$$

$$\varepsilon_{4g}(x) = 2\pi \int_{v=0}^{\infty} \left\{ J'_{4g}(v, x) B_v^{(1)} + J''_{4g}(v, x) B_v^{(2)} \right\} dv; \quad (17\Pi)$$

$$J'_{4g}(v, x) = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \sin \varphi \cos \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}}} e^{-\frac{k_v(2h-x)}{\cos \varphi}} d\varphi; \quad (18\Pi)$$

$$J''_{4g}(v, x) = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2 \sin \varphi \cos \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}}} e^{-\frac{k_v(3h-x)}{\cos \varphi}} d\varphi. \quad (19\Pi)$$

Таким образом, подставив выражения (2П)—(5П), (10П), (12П), (14П) и (17П) в равенство (1П), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) = & 2\pi \int_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \int_{\zeta=0}^x i_{\nu}(\zeta) E_2[k_{\nu}(x-\zeta)] d\zeta - \int_{\zeta=x}^h i_{\nu}(\zeta) E_2[k_{\nu}(\zeta-x)] d\zeta + \right. \\ & + \int_{\zeta=0}^h i_{\nu}(\zeta) [J_{1g}(x, \nu, \zeta) - J_{2g}(x, \nu, \zeta)] d\zeta + B_{\nu}^{(1)} [J'_{3g}(x, \nu) - J'_{4g}(x, \nu) + E_3(k_{\nu}x)] + \\ & \left. + B_{\nu}^{(2)} [J'_{3g}(x, \nu) - J'_{4g}(x, \nu) - E_3[k_{\nu}(h-x)] \right\} d\nu. \end{aligned} \quad (20П)$$

После необходимых упрощений получим окончательное выражение для вектора радиации плоского слоя

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) = & 2\pi \int_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \int_{\zeta=0}^x i_{\nu}(\zeta) E_2[k_{\nu}(x-\zeta)] d\zeta - \int_{\zeta=x}^h i_{\nu}(\zeta) E_2[k_{\nu}(\zeta-x)] d\zeta + \right. \\ & + \int_{\zeta=0}^h i_{\nu}(\zeta) [J_{1g}(x, \nu, \zeta) - J_{2g}(x, \nu, \zeta)] d\zeta + B_{\nu}^{(2)} [J'_{3g}(x, \nu) - J'_{4g}(x, \nu)] + \\ & \left. + B_{\nu}^{(1)} [J'_{3g}(x, \nu) - J'_{4g}(x, \nu)] \right\} d\nu. \end{aligned} \quad (21П)$$

Пусть температура слоя всюду одинакова, тогда спектральная плотность излучения i_{ν} не зависит от координаты, и все интегралы по переменной ζ можно упростить. После всех вычислений находим

$$\begin{aligned} \int_{\zeta=0}^x E_2[k_{\nu}(x-\zeta)] d\zeta &= \frac{1}{k_{\nu}} [E_2(0) - E_2(k_{\nu}x)]; \\ \int_{\zeta=x}^h E_2[k_{\nu}(\zeta-x)] d\zeta &= \frac{1}{k_{\nu}} [E_2(0) - E_2[k_{\nu}(h-x)]]; \\ \int_{\zeta=0}^h [J_{1g}(x, \zeta) - J_{2g}(x, \zeta)] d\zeta &= \frac{1}{k_{\nu}} \left[\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \cos \varphi \sin \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2k_{\nu}h}{\cos \varphi}}} e^{-\frac{k_{\nu}x}{\cos \varphi}} d\varphi - J'_{3g}(x) + \right. \\ & + \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2 \cos \varphi \sin \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2k_{\nu}h}{\cos \varphi}}} e^{-\frac{k_{\nu}(h+x)}{\cos \varphi}} d\varphi - J'_{3g}(x) - \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \cos \varphi \sin \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2k_{\nu}h}{\cos \varphi}}} e^{-\frac{k_{\nu}(h-x)}{\cos \varphi}} d\varphi + \\ & \left. + J'_{4g}(x) - \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2 \cos \varphi \sin \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2k_{\nu}h}{\cos \varphi}}} e^{-\frac{k_{\nu}(2h-x)}{\cos \varphi}} d\varphi + J'_{4g}(x) \right]. \end{aligned}$$

Используя эти равенства, а также учитывая, что $j_v = k\sqrt{\pi^2 B_{Bv}}$, и $B_v^{(n)} = \pi^2 B_{v0}^{(n)}$, с учетом выражения (20П) получим

$$\begin{aligned} \epsilon(x)|_{T=\text{const}} = 2\pi^2 \int_0^\infty B_{Bv} \left[E_3[k_v(h-x)] - E_3(k_v h) - J'_{3g}(x, v) - J''_{4g}(x, v) + \right. \\ \left. + J'_{4g}(x, v) + J''_{4g}(x, v) + \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R\beta e^{-\alpha x} d\varphi + \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R^2\beta e^{-\alpha(h+x)} d\varphi - \right. \\ \left. - \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R\beta e^{-\alpha(h-x)} d\varphi - \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R^2\beta e^{-\alpha(2h-x)} d\varphi \right] + B_{v0}^{(n)} [J'_{3g}(x, v) + J''_{3g}(x, v) - \\ - J'_{4g}(x, v) - J''_{4g}(x, v) + E_3(k_v x) - E_3[k_v(h-x)]] dv, \quad (22П) \end{aligned}$$

где

$$\beta = \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2k_v h}{\cos \varphi}}}; \quad \alpha = \frac{k_v}{\cos \varphi}.$$

Как уже указывалось, подынтегральное выражение в формуле (22П) тождественно равно нулю, а следовательно, и вектор радиации изотермического слоя равен нулю, что соответствует его физическому смыслу.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Уравнение (7) точно описывает процесс теплопередачи в плоском слое для «серой» среды. Если при разложении бинома $(1 - \Phi(\zeta)/T_0)^4$ ограничиться первыми двумя членами, то погрешность в определении потока радиации из-за отброшенных членов разложения не может быть больше, чем

$$\begin{aligned} 12\pi^2 \sigma k T_0^2 \Delta T \left\{ \int_{\zeta=0}^x E_2[k(x-\zeta)] d\zeta - \int_{\zeta=x}^h E_2[k(\zeta-x)] d\zeta + \right. \\ \left. + \int_{\zeta=0}^h [J_{1g}(x, \zeta) - J_{2g}(x, \zeta)] d\zeta \right\}, \quad (23П) \end{aligned}$$

поскольку $\Phi(\zeta) = T_0 - T(\zeta)$ — монотонная функция. Так как все подынтегральные функции положительны (что следует из определения функций $E_n(x)$ и соотношений (11П) и (13П) для $J_{1g}(x, \zeta)$ и $J_{2g}(x, \zeta)$), то выражение в фигурных скобках в (23П) не может превышать по абсолютной величине сумму слагаемых одного знака (слагаемые разных знаков — величины одного порядка). Обозначим сумму положительных слагаемых J_+

$$J_+ = \int_0^x E_2[k(x-\zeta)] d\zeta + \int_x^h J_{1g}(x, \zeta) d\zeta.$$

Перейдя к безразмерной координате $\tau = kx$ (соответственно $\tau_0 = kh$) и сделав необходимые вычисления, получим

$$J_+ = \frac{1}{k} [E_2(0) - E_2(\tau)] + \frac{R}{k} [I(\tau) - (1-R)I(\tau_0 + \tau) - RI(2\tau_0 + \tau)]. \quad (24П)$$

Здесь введена функция $I(\alpha)$ для обозначения интеграла

$$I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2\tau_0}{\cos \varphi}}} e^{-\frac{\alpha}{\cos \varphi}} d\varphi, \quad (25П)$$

который не выражается через элементарные функции. Сделав некоторые преобразования (как в приложении 4), представим функцию $I(\alpha)$ в виде ряда

$$I(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} E_3(\alpha + 2n\tau_0). \quad (26П)$$

Из выражения (24П) после преобразований получим

$$J_+(\tau) = \frac{1}{k} \left\{ E_3(0) - (1-R) \left[E_3(\tau) + R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} E_3(\tau_0 + \tau + 2n\tau_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + R^2 \sum_{n=0}^{\infty} E_3(\tau + 2\tau_0 + 2n\tau_0) \right] \right\}.$$

Производная $\frac{dJ_+(\tau)}{d\tau}$ в интервале $0 \leq \tau \leq \tau_0$ положительна и не обращается в нуль, так что $J_+(\tau)$ принимает максимальное значение при $\tau = \tau_0$

$$J_{+ \max} = \frac{1}{k} \left\{ E_3(0) - (1-R) \left[E_3(\tau_0) + R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} E_3[2(n+1)\tau_0] + \right. \right. \\ \left. \left. + R^2 \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} E_3[\tau_0 + 2(n+1)\tau_0] \right] \right\}.$$

Окончательное выражение для величины δ_r будет

$$|\delta_r| < 12n^2 \sigma T_0^2 \Delta T \left\{ 0,5 - (1-R) \left[E_3(\tau_0) + R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} E_3[2(n+1)\tau_0] + \right. \right. \\ \left. \left. + R^2 \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} E_3[\tau_0 + 2(n+1)\tau_0] \right] \right\}. \quad (27П)$$

С целью оценки величины δ_r проводился расчет для температур 1000 и 1500° К. Так, при коэффициенте отражения границ R , равном 0,1; 0,5 и 0,98, Q составляло 0,12; 0,5 и 2,1% при $T = 1000^\circ \text{К}$ и 0,11; 0,6 и 3% при $T = 1500^\circ \text{К}$. Полный поток Q составлял $7,5 \times 10^3 \text{ вт/м}^2$. Температурный перепад ΔT был вычислен на основе полученных решений. Таким образом видно, что погрешность увеличивается с ростом T и R и даже при высоких температурах погрешность, возникающая в результате замены нелинейного интегрального уравнения линейным (для параметров задачи, используемых при измерении коэффициента теплопроводности полупрозрачных материалов), весьма незначительна.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Как уже указывалось, свободная функция уравнения (22) является его первым приближенным решением. Чтобы сравнить погрешность этого результата с точным решением, необходимо оценить интегральный член в выражении (22)

$$\delta_{\alpha} \leq N \int_0^{\tau_0} \alpha(\tau') [E_3(\tau') - E_3|\tau - \tau'| + I_1(\tau', 0) - I_1(\tau', \tau) + I_2(\tau', 0) - I_2(\tau', \tau)] d\tau'.$$

Разность первых двух слагаемых в квадратных скобках принимает как положительные, так и отрицательные значения, в то время как алгебраическая сумма остальных слагаемых всегда положительна, что следует из определения этих функций в выражениях (17) и (18). Поэтому рассмотрим отдельно два интеграла

$$J_1 = \int_0^{\tau_0} \alpha(\tau') [E_3(\tau') - E_3|\tau - \tau_1|] d\tau' \quad \text{и}$$

$$J_2 = \int_0^{\tau_0} \alpha(\tau') [I_1(\tau', 0) - I_1(\tau', \tau) + I_2(\tau', 0) - I_2(\tau', \tau)] d\tau'.$$

Для оценки первого прием во внимание, что подынтегральная функция положительна в интервале $0 < \tau' < \frac{\tau}{2}$. Учитывая, кроме того, что $\alpha(\tau')$ монотонно возрастает, находим

$$|J_1| \leq \frac{\Delta T}{T_0} \left| \int_{\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} [E_3(\tau') - E_3|\tau - \tau'|] d\tau' \right| = \\ = \frac{\Delta T}{T_0} \left| 2E_4\left(\frac{\tau}{2}\right) - E_4(\tau_0) - 2E_4(0) + E_4(\tau_0 - \tau) \right|.$$

Легко проверить, что выражение под знаком абсолютной величины всегда отрицательно и минимально при $\tau = \frac{2}{3} \tau_0$, так что окончательно

$$J_1 \leq \frac{\Delta T}{T_0} \left| 3E_4\left(\frac{\tau_0}{2}\right) - 2E_4(0) - E_4(\tau_0) \right|. \quad (28\Pi)$$

Обращаясь к интегралу J_2 , представим функции $I_1(\tau, \tau')$ и $I_2(\tau, \tau')$ в виде рядов, как в приложении 2,

$$I_1(\tau, \tau') = R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} E_3(\tau' + \tau + 2n\tau_0) + R^2 \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} E_3(\tau - \tau' + 2\tau_0 + 2n\tau_0);$$

$$I_2(\tau, \tau') = R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} E_3(2\tau_0 - \tau - \tau' + 2n\tau_0) + R^2 \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} E_3(2\tau_0 - \tau + \tau' + 2n\tau_0).$$

Сделав необходимые вычисления, получим

$$|J_2| \leq \frac{\Delta T}{T_0} \left\{ R [E_4(0) + E_4(\tau_0)] - (1-R) \left(R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} [E_4(\tau_0 + 2n\tau_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + E_4(2\tau_0 + 2n\tau_0) + R^2 \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} [E_4(2\tau_0 + 2n\tau_0) + E_4(3\tau_0 + 2n\tau_0)] \right) - \right. \\ \left. - R [E_4(\tau) + E_4(\tau_0 - \tau)] + (1-R) \left(R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} [E_4(\tau_0 + \tau + 2n\tau_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + E_4(2\tau_0 - \tau + 2n\tau_0)] + R^2 \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} [E_4(2\tau_0 + \tau + 2n\tau_0) + E_4(3\tau_0 - \tau + 2n\tau_0)] \right) \right\}.$$

Все члены, зависящие от τ , образуют функцию, достигающую максимума при $\tau = 0$ и τ_0 (правая часть неравенства обращается в нуль) и минимума — при $\tau = \frac{\tau_0}{2}$. Это последнее значение определяет величину J_2

$$|J_2| \leq \frac{\Delta T}{T_0} \left\{ R \left[E_4(0) + E_4(\tau_0) - 2E_4\left(\frac{\tau_0}{2}\right) \right] - (1-R) \left(R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} [E_4(\tau_0 + 2n\tau_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + E_4(2\tau_0 + 2n\tau_0) - 2E_4(1,5\tau_0 + 2n\tau_0)] + R^2 \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} [E_4(2\tau_0 + 2n\tau_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + E_4(3\tau_0 + 2n\tau_0) - 2E_4(2,5\tau_0 + 2n\tau_0)] \right) \right\}. \quad (29\Pi)$$

Отсюда

$$\delta_a \leq N (|J_1| + |J_2|), \quad (30\Pi)$$

где $|J_1|$ и $|J_2|$ удовлетворяют соотношениям (28\Pi) и (29\Pi).

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Прежде чем вычислять различные коэффициенты и функции, удовлетворяющие приведенным в работе интегральным соотношениям, рассмотрим несколько вспомогательных интегралов

$$a) J(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{1 - ae^{-\frac{\beta}{\cos \varphi}}} e^{-\frac{\alpha}{\cos \varphi}} d\varphi; (|a| < 1; \operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0). \quad (31\Pi)$$

Заменяв $\cos \varphi$ на z и разложив выражение $(1 - ae^{-\frac{\beta}{\cos \varphi}})^{-1}$ в ряд, найдем

$$J(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_0^1 z^2 e^{-\frac{P_n}{z}} dz.$$

В последнем равенстве использована равномерная сходимость ряда и введено обозначение $P_n = \alpha + n\beta$. Заменяв P_n/z переменной x и используя определение интегралоподобных функций в работе [8]

$$E_n(x) = x^{n-1} \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^n} du,$$

найдем для $J(\alpha)$ следующее представление

$$J(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n E_n(\alpha + n\beta). \quad (32\Pi)$$

Этот ряд сходится равномерно относительно α , так как он мажорируется сходящимся рядом $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$.

$$b) K(\alpha, u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx. \quad (33\Pi)$$

Дважды дифференцируя по параметру α , приходим к уравнению

$$K'' = \frac{e^{-\alpha u}}{\alpha} - K(\alpha, u)$$

и, применив метод вариации произвольных постоянных, получим

$$K(\alpha, u) = -\frac{1}{2i} E_1[(u+i)\alpha] e^{i\alpha} + \frac{1}{2i} E_1[(u-i)\alpha] e^{-i\alpha} + Ae^{i\alpha} + Be^{-i\alpha},$$

где A, B — постоянные интегрирования. Для их определения устремим α к нулю и воспользуемся известным разложением для $E_1(z)$ [9], тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2i} \left(\gamma + \ln(u+i)\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-u-i)^n \alpha^n}{n!} \right) e^{i\alpha} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2i} \left(\gamma + \ln(u-i)\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i-u)^n \alpha^n}{n!} \right) e^{-i\alpha} \right\} &= \frac{1}{2i} \ln \frac{u+i}{u-i} = \\ &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} u = K(0, u), \end{aligned}$$

откуда $A + B = 0$. Устремляя теперь α к ∞ и учитывая, что $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K(\alpha, u) = 0$, найдем $A = B = 0$. Таким образом, получим

$$K(\alpha, u) = -\frac{1}{2i} E_1[(u+i)\alpha] e^{i\alpha} + \frac{1}{2i} E_1[(u-i)\alpha] e^{-i\alpha} \quad (34\Pi)$$

или

$$K(\alpha, u) = -\cos \alpha \operatorname{Im} E_1[(u+i)\alpha] - \sin \alpha \operatorname{Re} E_1[(u+i)\alpha], \quad (35\Pi)$$

где действительные и мнимые части функции $E_1(z)$ могут быть найдены с помощью таблицы [10]

$$e) I_1(\alpha, \beta, b) = \int_{C_1}^{C_2} e^{\beta x} E_1[\alpha(x+b)] dx. \quad (36\Pi)$$

Здесь C_1 и C_2 — любые значения в интервале $-b \leq x < \infty$. Интегрируя по частям, найдем

$$I_1(\alpha, \beta, b) = F_1(\alpha, \beta, b, C_1) - F_1(\alpha, \beta, b, C_2),$$

где

$$F_1(\alpha, \beta, b, x) = \frac{e^{\beta x}}{\beta} E_1[\alpha(b+x)] - \frac{e^{-\beta b}}{\beta} E_1[(\alpha-\beta)(b+x)]. \quad (37\Pi)$$

Если $C_1 = -b$, то подынтегральная функция обращается в бесконечность, но $F_1(x)$ остается ограниченной и непрерывной

$$\begin{aligned} F_1(\alpha, \beta, b, -b) &= \lim_{x \rightarrow -b} \left\{ \frac{e^{-\beta b}}{\beta} [\ln \alpha(x+b) - \ln(\alpha-\beta)(x+b)] \right\} = \\ &= -\frac{e^{-\beta b}}{\beta} \ln \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Аналогично

$$I_2(\alpha, \beta, b) = \int_{C_1}^{C_2} e^{\beta x} E_1[\alpha(b-x)] dx \quad (b \leq x < \infty); \quad (38\Pi)$$

$$I_2(\alpha, \beta, b) = F_2(\alpha, \beta, b, C_1) - F_2(\alpha, \beta, b, C_2);$$

$$F_2(\alpha, \beta, b, x) = \frac{e^{\beta x}}{\beta} E_1[\alpha(b-x)] - \frac{e^{\beta b}}{\beta} E_1[(\beta+\alpha)(b-x)]. \quad (39\Pi)$$

Теперь рассмотрим свободную функцию $f(\tau)$. Сравнив выражения (19) и (20) с уравнением (31\Pi), найдем

$$I_3(0) = RJ(\tau_0); \quad I_3(\tau) = RJ(\tau_0 + \tau); \quad I_4(0) = J(\tau_0); \quad I_4(\tau_0) = J(\tau_0 - \tau).$$

Здесь правые части равенств вычисляются на основе выражения (32\Pi), причем следует принять $a = R^2$ и $\beta = 2\tau_0$. Ряд (32\Pi) сходится достаточно быстро. При расчетах было взято шесть первых членов ряда (32\Pi), что позволило даже при больших значениях $R = 0.9$ и $T = 1500^\circ \text{K}$ получить $J(\alpha)$ с погрешностью, не превышающей 6%. Если ряд (32\Pi) заменить суммой первых k слагаемых, то погрешность такой замены не превысит

$$\Delta J(\alpha) = \frac{a^{k+1}}{1-a} E_k[\alpha + (k+1)\beta]. \quad (40\Pi)$$

Перейдем к вычислению коэффициентов A_n , B_n и C_n . Для того чтобы найти коэффициент

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^{2l} E_3(x) \cos \frac{n\pi x}{2l} dx,$$

рассмотрим интеграл $A = \int_{C_1}^{C_2} E_3(x) e^{\beta x} dx$. Дважды проинтегрировав его по частям и используя выражение (37\Pi),

получим

$$A = \frac{e^{\beta\tau_0}}{\beta} \left[E_2(\tau_0) + \frac{E_2(\tau_0)}{\beta} - \frac{E_1(\tau_0)}{\beta^2} \right] - \frac{1}{\beta} \left\{ E_2(0) + \frac{E_2(0)}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} (\ln(1-\beta) - E_1[(1-\beta)\tau_0]) \right\}.$$

Полагая $\beta = \frac{i n \pi}{\tau_0}$ и $\beta = -\frac{i n \pi}{\tau_0}$ и сложив результаты подстановок, найдем

$$A_n = \frac{2}{V\tau_0} \left\{ \frac{\tau_0^2}{n^2\pi^2} [E_2(0) - (-1)^n E_2(\tau_0)] + \frac{\tau_0^3}{n^2\pi^2} \left[-\operatorname{arctg} \frac{n\pi}{\tau_0} + Im E_1(\tau_0 + i2n\pi) \right] \right\}; \quad (41П)$$

$$A_0 = V\sqrt{\frac{2}{\tau_0}} \int_0^{\tau_0} E_2(x) dx = V\sqrt{\frac{2}{\tau_0}} [E_2(0) - E_2(\tau_0)]. \quad (42П)$$

Рассмотрим теперь коэффициенты B_n

$$B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \sin \varphi \cos \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2\tau_0}{\cos \varphi}}} b_n(\varphi) e^{-\frac{\tau_0}{\cos \varphi}} d\varphi, \quad (43П)$$

где $b_n(\varphi)$ — коэффициенты Фурье функции $\operatorname{ch}\left(\frac{z}{\cos \varphi}\right)$ по системе (29). Из [4] имеем

$$b_n(\varphi) = (-1)^n \frac{2}{V\tau_0} \cdot \frac{\cos \varphi}{1 + \frac{n^2\pi^2}{\tau_0^2} \cos^2 \varphi} \operatorname{sh}\left(\frac{\tau_0}{\cos \varphi}\right).$$

Разложив в ряд член $1/(1 - R^2 e^{-2\tau_0 \sec \varphi})$, из выражения (43П) найдем

$$B_n = (-1)^n \frac{R}{V\tau_0} \sum_{m=0}^{\infty} R^{2m} \{K_m(k_n m \beta) - K_m[k_n(m+1)\beta]\},$$

где

$$\beta = 2\tau_0;$$

$$k_n = \frac{n\pi}{\tau_0};$$

$$K_m(k_n, \gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{1 + k_n^2 \cos^2 \varphi} e^{-\frac{\gamma}{\cos \varphi}} d\varphi.$$

Подстановкой $k_n \cos \varphi = \frac{1}{z}$ последний интеграл приведем к виду

$$K_m(k_n, \gamma) = \frac{1}{k_n^3} \left[k_n E_2(\gamma) - K\left(\gamma k_n; \frac{1}{k_n}\right) \right]; \quad |m \neq 0|,$$

где второе слагаемое определяется из выражения (35П) при $\alpha = \gamma k_n$ и $u = \frac{1}{k_n}$. При $m = 0$

$$K_0(k_n, 0) = \frac{\tau_0^2}{n^2\pi^2} - \frac{\tau_0^3}{n^2\pi^2} \operatorname{arctg} \frac{n\pi}{\tau_0}.$$

После всех выкладок найдем

$$B_n = (-1)^n \frac{R\tau_0^{\frac{3}{2}}}{n^2\pi^2} \left[1 - \frac{\tau_0}{n\pi} \operatorname{arctg} \frac{n\pi}{\tau_0} - E_2(\tau_0) + S_1 - \frac{\tau_0}{n\pi} S_2(n) \right], \quad (44\Pi)$$

где

$$S_1 = \sum_{m=1}^{\infty} R^{2m} [E_2(2m\tau_0) - E_2(2\tau_0 + 2m\tau_0)]; \quad (45\Pi)$$

$$S_2(n) = \sum_{m=1}^{\infty} R^{2m} \left\{ ImE_1 \left[\frac{\tau_0}{n\pi} + i2(m+1)n\pi \right] - ImE_1 \left(\frac{\tau_0}{n\pi} + i2mn\pi \right) \right\}; \quad (46\Pi)$$

$$B_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \sin \varphi \cos \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2\tau_0}{\cos \varphi}}} b_0(\varphi) \cdot e^{-\frac{\tau_0}{\cos \varphi}} d\varphi =$$

$$= R \sqrt{\frac{2}{\tau_0}} \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} [E_4(2n\tau_0) - E_4[(2n+1)\tau_0]]. \quad (47\Pi)$$

Совершенно аналогично находим коэффициенты C_n

$$C_n = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2\tau_0}{\cos \varphi}}} b_n(\varphi) e^{-\frac{2\tau_0}{\cos \varphi}} d\varphi =$$

$$= (-1)^n \frac{R^2}{\sqrt{\tau_0}} \left[\frac{\tau_0^2}{n^2\pi^2} S_3 + \frac{\tau_0^3}{n^2\pi^3} S_4(n) \right], \quad (48\Pi)$$

где

$$S_3 = \sum_{m=0}^{\infty} R^{2m} [E_2(\tau_0 + 2m\tau_0) - E_2(3\tau_0 + 2m\tau_0)]; \quad (49\Pi)$$

$$S_4(n) = \sum_{m=0}^{\infty} R^{2m} \left\{ ImE_1 \left[\frac{\tau_0}{n\pi} + i(2m+1)n\pi \right] - ImE_1 \left[\frac{\tau_0}{n\pi} + i(2m+3)n\pi \right] \right\}; \quad (50\Pi)$$

$$C_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2 \sin \varphi \cos \varphi}{1 - R^2 e^{-\frac{2\tau_0}{\cos \varphi}}} b_0(\varphi) e^{-\frac{2\tau_0}{\cos \varphi}} d\varphi =$$

$$= R^2 \sqrt{\frac{2}{\tau_0}} \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} [E_4[(2n+1)\tau_0] - E_4[(2n+3)\tau_0]]. \quad (51\Pi)$$

Для вычисления функций $u_1(\tau)$ и $u_2(\tau)$ рассмотрим интеграл

$$Q(\beta) = \int e^{\beta\tau} f(\tau) d\tau = aN \left(\frac{e^{\beta\tau}}{\beta} \tau - \frac{1}{\beta^2} e^{\beta\tau} \right) +$$

$$+ C_1 \frac{e^{\beta\tau}}{\beta} - Ne \frac{\Delta T}{T_0} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} Q_{1n}(\beta, b_1) + \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} Q_{2n}(\beta, b_2) \right\}.$$

где

$$Q_{1n}(\beta, b_1) = \int e^{\beta\tau} E_4(\tau + b_1) d\tau = \frac{e^{\beta b_1}}{\beta} E_4(\tau + b_1) + \\ + \frac{e^{\beta\tau}}{\beta^2} E_3(\tau + b_1) + \frac{e^{\beta\tau}}{\beta^3} E_2(\tau + b_1) + \frac{1}{\beta^3} F_1(1, \beta, b_1; \tau); \\ Q_{2n}(\beta, b_2) = \int e^{\beta\tau} E_4(b_2 - \tau) d\tau = \frac{e^{\beta b_2}}{\beta} E_4(b_2 - \tau) - \\ - \frac{e^{\beta\tau}}{\beta^2} E_3(b_2 - \tau) + \frac{e^{\beta\tau}}{\beta^3} E_2(b_2 - \tau) - \frac{1}{\beta^3} F_2(1, \beta, b_2; \tau); \\ b_1 = 1,5\tau_0 + 2n\tau_0; \quad b_2 = 0,5\tau_0 + 2n\tau_0.$$

Здесь использовано выражение (59) для свободной функции основного уравнения и соотношения, полученные в пунктах а и б настоящего приложения. Теперь имеем

$$u_1(\tau) = \int \left[e^{-m\tau} \left(\int f(\tau) e^{m\tau} d\tau \right) \right] d\tau = \int e^{-m\tau} Q(m) d\tau; \\ u_2(\tau) = \int \left[e^{m\tau} \left(\int f(\tau) e^{-m\tau} d\tau \right) \right] d\tau = \int e^{m\tau} Q(-m) d\tau$$

и после всех выкладок найдем

$$\frac{m^2}{2} (u_1 + u_2) = -aN\tau - Ne \frac{\Delta T}{T_0} \left(R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} L_n^{(1)}(\tau) + \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} L_n^{(2)}(\tau) \right), \quad (52\Pi)$$

где

$$L_n^{(1)}(\tau) = -E_4(\tau + b_1) - \frac{E_3(\tau + b_1)}{m^2} + \frac{1}{2m^3} e^{-m(\tau + b_1)} E_1[(1 - m)(\tau + b_1)] - \\ - \frac{1}{2m^3} e^{m(\tau + b_1)} E_1[(1 + m)(\tau + b_1)]; \quad (53\Pi)$$

$$L_n^{(2)}(\tau) = -E_4(b_2 - \tau) - \frac{E_3(b_2 - \tau)}{m^2} - \frac{e^{m(b_2 - \tau)}}{2m^3} E_1[(1 + m)(b_2 - \tau)] + \\ + \frac{e^{-m(b_2 - \tau)}}{2m^3} E_1[(1 - m)(b_2 - \tau)]. \quad (54\Pi)$$

Если границы слоя абсолютно черные, то суммирование по n в выражении (52\Pi) исчезает, и остается лишь слагаемое, соответствующее $n = 0$ в последней сумме

$$\frac{m^2}{2} [u_1(\tau) + u_2(\tau)]_B = -aN\tau + N \frac{\Delta T}{T_0} \left\{ E_4\left(\frac{\tau_0}{2} - \tau\right) + \right. \\ + \frac{E_3\left(\frac{\tau_0}{2} - \tau\right)}{m^2} + \frac{1}{2m^3} e^{m(0,5\tau_0 - \tau)} E_1\left[\left(1 - \frac{m}{2}\right)(0,5\tau_0 - \tau)\right] - \\ \left. - \frac{1}{2m^3} e^{-m(0,5\tau_0 - \tau)} E_1\left[\left(1 + \frac{m}{2}\right)(0,5\tau_0 - \tau)\right] \right\}. \quad (55\Pi)$$

Вычислим функции $V_1(\tau)$, $V_2(\tau)$ и $V_3(\tau)$. Сравним выражения (59) и (52\Pi)–(54\Pi), получим

$$f(\tau) + \frac{m^2}{2} (u_1 + u_2) = Ne \frac{\Delta T}{T_0} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} \psi_{2n}(\tau) + \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} \psi_{2n}(\tau) \right\}.$$

где

$$\Psi_{1n}(\tau) = \frac{E_2(\tau + b_1)}{m^2} - \frac{1}{2m^3} e^{-m(\tau + b_1)} E_1[(1 - m)(\tau + b_1)] + \\ + \frac{1}{2m^3} e^{m(\tau + b_1)} E_1[(1 + m)(\tau + b_1)];$$

$$\Psi_{2n}(\tau) = \frac{E_2(b_2 - \tau)}{m^2} + \frac{1}{2m^3} e^{m(b_2 - \tau)} E_1[(1 + m)(b_2 - \tau)] - \\ - \frac{1}{2m^3} e^{-m(b_2 - \tau)} E_1[(1 - m)(b_2 - \tau)].$$

Постоянная C_1^* , входящая в $f(\tau)$, как указано выше, объединена с постоянной C_6 . Далее имеем

$$V_1(\tau) = Ne \frac{\Delta T}{T_0} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} V_{1n}^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} V_{1n}^{(2)} \right\}; \quad (56\Pi)$$

$$-V_{1n}^{(1)}(\tau) = \frac{1}{m^2} E_3(\tau + b_1) + \frac{1}{m^4} E_1(\tau + b_1) - \frac{1}{2m^4} e^{-m(\tau + b_1)} \times \\ \times E_1[(1 - m)(\tau + b_1)] - \frac{e^{m(\tau + b_1)}}{2m^4} E_1[(1 + m)(\tau + b_1)]; \quad (57\Pi)$$

$$-V_{1n}^{(2)}(\tau) = -\frac{1}{m^2} E_3(b_2 - \tau) - \frac{1}{m^4} E_1(b_2 - \tau) + \\ + \frac{1}{2m^4} e^{-m(b_2 - \tau)} E_1[(1 - m)(b_2 - \tau)] + \frac{1}{2m^4} e^{m(b_2 - \tau)} E_1[(1 + m)(b_2 - \tau)]. \quad (58\Pi)$$

При вычислениях $V_2(\tau)$ и $V_3(\tau)$ использовано соотношение [8]

$$E_\nu(k) = \frac{1}{\nu - 1} [e^{-x} - x E_{\nu-1}(x)]; \quad \nu \neq 1.$$

Таким образом

$$V_2(\tau) = Ne \frac{\Delta T}{T_0} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} V_{2n}^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} V_{2n}^{(2)} \right\}; \quad (59\Pi)$$

$$-V_{2n}^{(1)}(\tau) = \frac{e^{-(b_1 + \tau)}}{m^2} - \frac{2E_4(b_1 + \tau)}{m^2} - \frac{b_1 E_3(b_1 + \tau)}{m^2} + \\ + \frac{e^{-(b_1 + \tau)}}{m^4} - \frac{\tau e^{-m(b_1 + \tau)}}{2m^4} E_1[(1 - m)(b_1 + \tau)] - \frac{b_1 E_1(b_1 + \tau)}{m^4} - \\ - \frac{\tau e^{m(b_1 + \tau)}}{2m^4} E_1[(1 + m)(b_1 + \tau)] - \frac{e^{-m(b_1 + \tau)}}{2m^5} \times \\ \times E_1[(1 - m)(b_1 + \tau)] + \frac{e^{m(b_1 + \tau)}}{2m^5} E_1[(1 + m)(b_1 + \tau)]; \quad (60\Pi)$$

$$-V_{2n}^{(2)}(\tau) = \frac{e^{-(b_2 - \tau)}}{m^2} - \frac{2E_4(b_2 - \tau)}{m^2} - \frac{b_2 E_3(b_2 - \tau)}{m^2} + \\ + \frac{e^{-(b_2 - \tau)}}{m^4} - \frac{b_2 E_1(b_2 - \tau)}{m^4} + \frac{\tau e^{-m(b_2 - \tau)}}{2m^4} E_1[(1 - m)(b_2 - \tau)] + \\ + \frac{\tau e^{m(b_2 - \tau)}}{2m^4} E_1[(1 + m)(b_2 - \tau)] - \frac{e^{-m(b_2 - \tau)}}{2m^5} E_1[(1 - m)(b_2 - \tau)] + \\ + \frac{e^{m(b_2 - \tau)}}{2m^5} E_1[(1 + m)(b_2 - \tau)]; \quad (61\Pi)$$

$$V_3(\tau) = Ne \frac{\Delta T}{T_0} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} V_{3n}^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} V_{3n}^{(2)} \right\}; \quad (62П)$$

$$\begin{aligned} -V_{3n}^{(1)}(\tau) &= \frac{6}{m^2} E_3(b_1 + \tau) + \frac{4b_1}{m^2} E_4(b_1 + \tau) + \frac{b_1^2}{m^2} E_3(b_1 + \tau) + \\ &+ \frac{b_1^2}{m^4} E_1(b_1 + \tau) + \frac{e^{-(b_1 + \tau)}}{m^4} (\tau - b_1) (1 + m^2) + \frac{e^{-(b_1 + \tau)}}{m^4} (1 - m^2) + \\ &+ \frac{2}{m^6} E_1(b_1 + \tau) - e^{-m(b_1 + \tau)} \left[\frac{\tau^2}{2m^4} + \frac{\tau}{m^5} + \frac{1}{m^6} \right] E_1[(1 - m)(b_1 + \tau)] + \\ &+ e^{m(b_1 + \tau)} \left[\frac{\tau}{m^5} - \frac{\tau^2}{2m^4} - \frac{1}{m^6} \right] E_1[(1 + m)(b_1 + \tau)]; \quad (63П) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -V_{3n}^{(2)}(\tau) &= -\frac{6}{m^2} E_3(b_2 - \tau) - \frac{4b_2}{m^2} E_4(b_2 - \tau) - \frac{b_2^2}{m^2} E_3(b_2 - \tau) + \\ &+ \frac{e^{-b_2(b_2 - \tau)}}{m^2} (\tau + b_2 + 1) + \frac{e^{-(b_2 - \tau)}}{m^4} (\tau + b_2 - 1) - \frac{b_2^2 \cdot E_1(b_2 - \tau)}{m^4} - \\ &- \frac{2}{m^6} E_1(b_2 - \tau) + e^{-m(b_2 - \tau)} \left[\frac{\tau^2}{2m^4} - \frac{\tau}{m^5} + \frac{1}{m^6} \right] E_1[(1 - m)(b_2 - \tau)] + \\ &+ \left[\frac{\tau^2}{2m^4} + \frac{\tau}{m^5} + \frac{1}{m^6} \right] e^{m(b_2 - \tau)} E_1[(1 + m)(b_2 - \tau)]. \quad (64П) \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мень А. А., Сергеев О. А. О влиянии радиационной составляющей на процесс теплопередачи в прозрачных средах. «Всесоюзная конференция по теплофизическим свойствам веществ при высоких температурах». М., изд. стандартов, 1966.
2. Гершуни А. А. Избранные труды по фотометрии и светотехнике. М., Физматгиз, 1958.
3. Viskanta R., Gosh A. Trans. ASME, C, 84, 1962, № 1.
4. Градштейн И. М., Рыжик И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
5. Lee D. W., Kingery W. D. IACS, 1960, № 11.
6. Politz H. Int. Journ. Heat Mass Transf., 1965, № 8.
7. Адрианов В. Н. Радиационно-кондуктивный и радиационно-конвективный теплообмен. Сб. «Тепло- и массообмен», т. 2, Минск, 1965.
8. Пагурова В. И. Таблицы интегро-экспоненциальной функции. М., изд. ВЦ АН СССР, 1958.
9. Бейтмен Г. и Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., изд. «Наука», 1966.
10. Таблицы интегро-показательной функции в комплексной области. М., изд. ВЦ АН СССР, 1965.

Поступила в редакцию
8/III 1968 г.

ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЛАВЛЕНОГО КВАРЦА

Приведены результаты одной из первых работ ВНИИМ по изучению теплофизических свойств веществ, выполненных по плану Государственной службы стандартных справочных данных.

Выбор плавленного кварца (кварцевое стекло, аморфный кремнезем) в качестве объекта исследования сделан не случайно. Благодаря малому температурному коэффициенту линейного расширения, прозрачности в ультрафиолетовой и инфракрасной областях спектра, механической прочности и химической стойкости он находит широкое применение во многих областях науки и техники. При этом почти во всех случаях необходимо знать его теплофизические свойства.

Кроме того, эта работа имела самостоятельное метрологическое значение, так как намечено провести экспериментальное изучение теплофизических свойств плавленного кварца и других стекол с целью использования их в качестве стандартных образцов, обеспечивающих передачу единиц измерения теплофизических величин от образцовых установок к рабочим [1]. Большая физическая и химическая однородность плавленного кварца, которой добивается современная технология производства, позволяет надеяться на высокую стабильность будущих стандартных образцов, изготовленных из стекол.

Наконец, третья цель, которая преследовалась данной работой, заключалась в разработке методики оценки надежности опубликованных экспериментальных данных.

Работа велась по схеме: сбор информации — анализ ее — оценка надежности данных [2, 3].

Теплоемкость

Экспериментальному изучению теплоемкости плавленного кварца, а также различных кристаллических модификаций кремнезема посвящено большое количество работ. Первые оценки надежности данных о теплоемкости были выполнены в 1927 г. Сосманом [4], который привел значения теплоемкости кварца, кристобалита и плавленного кварца. В 1934 г. аналогичная работа была проведена Келли [5]. По мере появления новых экспериментальных материалов он пересматривал свои данные в 1949 [6] и в 1960 гг. [7]. В последнем издании учтены все данные, имеющиеся на сентябрь 1958 г. Значения теплоемкости в последней работе практически ничем не отличаются от приведенных в работе [6]. Температурный интервал начинается с $298,15^\circ \text{K}$ (25°C).

По Келли, зависимость удельной теплоемкости плавленного кварца от температуры в интервале 298,15—2000° К можно представить с погрешностью 0,4% в виде

$$C_p = A_c + B_c T + N_c T^{-2}, \quad (1)$$

где T — температура, °К.
Значения коэффициентов A_c , B_c и N_c даны в табл. 1.

Таблица 1

Теплоемкость	Значения коэффициентов		
	A_c	B_c	N_c
молярная, кал/моль·град	13,38	$3,68 \cdot 10^{-9}$	$-3,45 \cdot 10^6$
удельная кал/г·град	0,2227	$6,12 \cdot 10^{-9}$	$-5,74 \cdot 10^6$
удельная, дж/кг·град	931,3	0,256	$-2,40 \cdot 10^7$

К сожалению, Келли не приводит выводов погрешности. Погрешность, равная $\pm 0,4\%$, представляется заниженной, особенно для интервала температур 1100—2000° К. Он не дает также значений теплоемкости плавленного кварца при температурах ниже 298,15° К. Такие данные, содержащиеся в обзорной работе Сосмана [4], приведены в табл. 2.

Таблица 2

Температура		Удельная теплоемкость	
°С	°К	кал/г·град	дж/кг·град
-255	18,15	0,00482	20,2
-250	23,15	0,00768	32,2
-240	33,15	0,0118	49,3
-230	43,15	0,0176	73,9
-220	53,15	0,0246	103
-200	73,15	0,0432	181
-150	123,15	0,0783	332
-100	173,15	0,113	472
-50	223,15	0,142	594
0	273,15	0,165	693
+50	323,15	0,184	773

Совпадение низкотемпературных данных Сосмана с данными Келли при 50°C выполняется с погрешностью менее 0,5%.

Проведенная нами обработка данных табл. 2 методом наименьших квадратов показывает, что они могут быть представлены в *дж/кг·град* формулой

$$C_p = -84,32 + 3,871T - 3,762 \cdot 10^{-3}T^2 \quad (2)$$

в интервале температур от -200 до $+50^\circ\text{C}$ ($73-323^\circ\text{K}$). Погрешность определения C_p из уравнения (2) равна 0,4%.

Таким образом, в интервале температур $70-1100^\circ\text{K}$ в качестве стандартных можно рекомендовать данные, полученные из уравнений (1) и (2). Для более высоких и более низких температур результаты расчета C_p из уравнения (1) можно использовать как справочные.

Теплопроводность

Поиск литературы был произведен с помощью фундаментального библиографического руководства Тулукияна [9], а также различных реферативных, библиографических и периодических изданий. Обнаруженные статьи и монографии служили в свою очередь источниками библиографических данных. Поиск был закончен, когда круг литературных источников окончательно замкнулся. После этого были просмотрены основные периодические издания (журналы, труды, отчеты, где могли быть опубликованы данные о теплопроводности кремнезема) за последние три года.

По-видимому, невозможно для всех видов измерений выдвинуть одинаковые критерии надежности данных. С точки зрения надежности данных о теплопроводности плавленого кварца опубликованные работы должны содержать:

- 1) оригинальные экспериментальные результаты;
- 2) данные о теплопроводности, полученные абсолютными методами.

При сравнительных методах вносится дополнительная погрешность, связанная с неточностью определения теплопроводности материала, примененного в качестве образцового*;

- 3) анализ возможных систематических погрешностей измерения;
- 4) анализ случайных погрешностей измерения;
- 5) сведения о чистоте и структуре исследуемых образцов;
- 6) результаты (в виде таблиц), непосредственно полученные в опыте.

Дальнейшая работа с литературой сводилась к последовательному применению указанных критериев.

В табл. 3 приведены работы, удовлетворяющие первому критерию, и основные сведения о работах, которые позволяют применить второй критерий. Как видно, из дальнейшего рассмотрения должны быть изъяты работы [11, 12, 17, 20, 25] и частично [15], в которых теплопроводность плавленого кварца определяется сравнительными методами. В табл. 3 нет лишь статьи Кнаппа [24], которой в СССР не имеется. К оставшимся работам были применены критерии 3—6. Оказалось, что третьему и пятому критериям не удовлетворяет работа [15]. Здесь расчетная формула, выведенная для цилиндра Архимеда, необоснованно применена к образцам эллипсоидальной формы. Анализ систематических погрешностей отсутствует. Из-за сложной формы образцы изготавливали путем измельчения блоков прозрачного плавленого кварца, т. е. по микроструктуре они отличаются от сплошных образцов, рассмотренных во всех других работах.

* Стр. 16.

Таблица 3

Год издания работы и автор	Метод определения				Темпера- турный диапазон, °К
	абсолютный	сравни- тельный	стацно- нарный	нестацио- нарный	
1911, Эйкен [10]	+		+		80—400
1915, Баррат [11]		+	+		300—400
1927, Кэй, Хиггинс [12]		+	+		350—500
1928, Зеeman [23]	+		+		230—1230
1940, Берч, Кларк [13]	+		+		300—800
1951, Берман [14]	+		+		20—90
1955, Кингери [15]	+	+	+		300—1000
1959, Рэй, Конноли [16]	+		+		300—2100
1959, Рэтклиф [17]		+	+		130—350
1960, Пустовалов [18]	+		+		500—1300
1960, Девяткова и др. [19]	+		+		80—1100
1961, Курешин, Пла- тунов [22]	+			+	310—670
1962, Алексеенко [20]		+	+		293
1964, Васильев [21]	+			+	80—380
1957, Гэффнер [25]		+		+	303

Третьему критерию не удовлетворяет работа [16]. В ней практически полностью отсутствует анализ погрешностей, одним из источников которых является разность температур в образцах, достигающая 1800 град на толщине 2,5 мм. Третьему и четвертому критериям не удовлетворяют статьи [14, 18]. Пятому критерию не удовлетворяет работа [23], так как неизвестно состояние единственного образца, подвергнувшегося исследованию.

Перечисленные работы были исключены из дальнейшего рассмотрения. Кроме того, было исключено значение теплопроводности, полученное Эйкенем [10] при 100° С, так как в его правильности сомневался сам автор.

Подробный анализ работ [10, 13, 19, 22] показал, что практически ни одна из этих работ не удовлетворяет пятому критерию. Берч и Кларк [13] — единственные авторы, которые приводят значения чистоты исследованного материала. Однако их утверждение о том, что примеси в данном случае не влияют на значения теплопроводности, бездоказательно.

Ни одна работа не удовлетворяет шестому критерию. Кроме того, все работы содержат неучтенные систематические погрешности, а анализ

случайных погрешностей либо отсутствует, либо неполон, либо оптимистичен.

При таком положении ни одной из анализируемых работ нельзя было отдать предпочтение, оставалось лишь принять, что все измерения являются равноточными, на этой основе построить усредняющую кривую и найти среднеквадратическое отклонение экспериментальных точек от этой кривой.

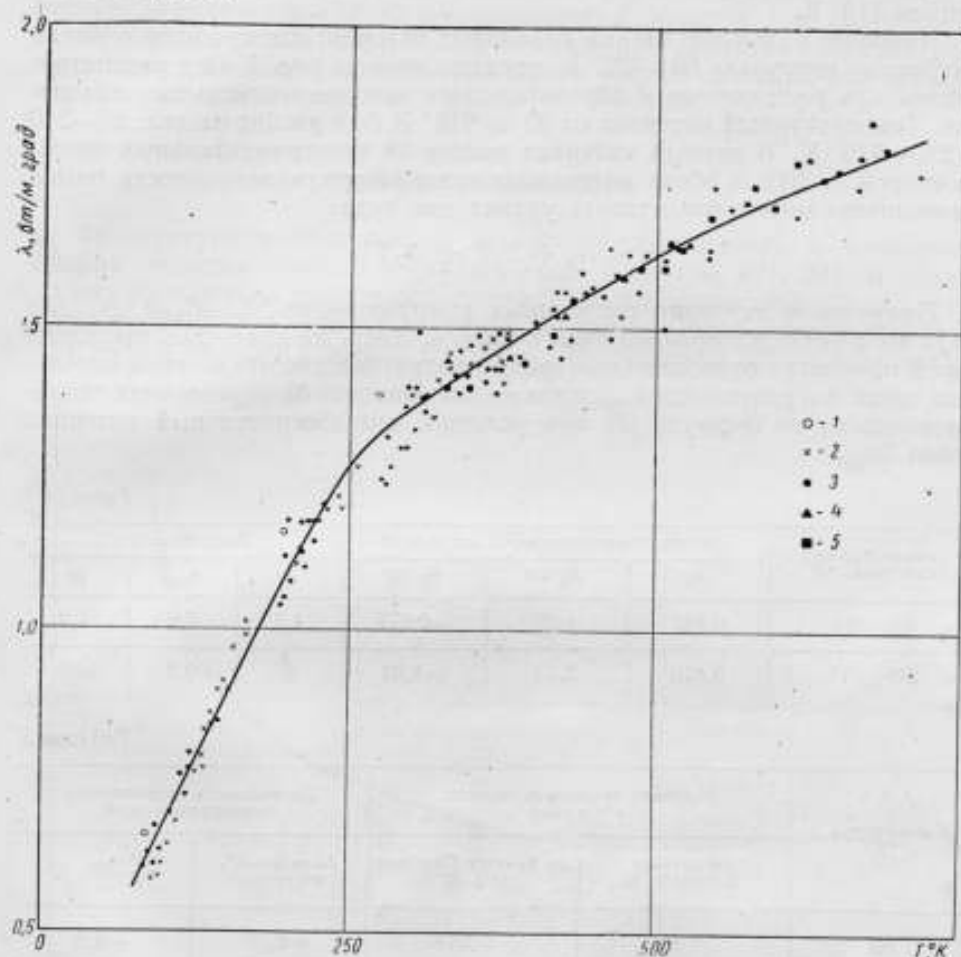


Рис. 1. Зависимость $\lambda = \lambda(T)$, вычисленная из уравнения (3) по данным:

1 — Эйкена [10]; 2 — Васильева [21]; 3 — Девитковой и др. [19]; 4 — Берча и Кларка [13];
5 — Курепина и Платунова [22].

Все известные методы определения теплопроводности основаны на предположении выполнимости уравнения Фурье. Однако это предположение несправедливо при высоких температурах для таких прозрачных материалов, как плавленый кварц. Поэтому, прежде чем перейти к обработке результатов, необходимо оценить то верхнее значение изученного температурного диапазона, при котором результаты измерения теплопроводности известными методами имеют смысл. Из данных, приведенных на стр. 33, следует, что если коэффициент отражения поверхностей R равен 0,9, а толщина кварцевой пластины h составляет 5 мм, то систематическая погрешность измерения теплопроводности, вызываемая пере-

носом тепла излучением, при температуре $T = 700^\circ \text{K}$ равна 3%. Очевидно, что если не вводить соответствующие поправки, то диапазон измерений должен быть ограничен температурой, выбор которой определяется требуемой точностью измерений. Обсуждаемые работы не содержат информации, необходимой для точного учета поправок на перенос тепла излучением. Учитывая это обстоятельство и относительно невысокую точность измерений теплопроводности, диапазон температур ограничен нами значением 715°K .

Наиболее надежные данные различных авторов, относящиеся к температурному интервалу $80-715^\circ \text{K}$, представлены на рис. 1. Они рассматривались как равноточные и обрабатывались методом наименьших квадратов. Температурный интервал от 80 до 715°K был разбит на два: $80-240$ и $240-715^\circ \text{K}$. В первый интервал вошли 48 экспериментальных точек, во второй — 100. В обоих интервалах температурную зависимость теплопроводности можно представить уравнением вида

$$\lambda = A_\lambda + B_\lambda T + N_\lambda T^2. \quad (3)$$

Полученные значения постоянных коэффициентов A_λ , B_λ и N_λ для двух выбранных интервалов даны в табл. 4. Здесь же приведены выраженные в процентах относительные среднеквадратические отклонения отдельных точек σ и результата $\sigma_{\text{рез}}$, а также погрешности $\delta\lambda$ определения теплопроводности по формуле (3) при условии, что доверительный интервал равен $2\sigma_{\text{рез}}$.

Таблица 4

Температурный интервал, $^\circ \text{K}$	Значения коэффициента, $\text{вт/м}\cdot\text{град}$			Погрешность, %		
	A_λ	$B_\lambda \cdot 10^3$	$N_\lambda \cdot 10^6$	σ	$\sigma_{\text{рез}}$	$\delta\lambda$
80—240	0,243	4,29	-0,097	4,5	0,6	1,2
240—715	0,810	2,13	-1,02	3	0,3	0,6

Таблица 5

Температура, $^\circ \text{K}$	Значения теплопроводности, $\text{вт/м}\cdot\text{град}$		Погрешность определения теплопроводности	
	по данным ВНИИМ, λ	по данным Пауэлла [28], λ'	$\Delta\lambda = \lambda - \lambda'$, $\text{вт/м}\cdot\text{град}$	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot 100$, %
80	0,59	0,55	+0,04	+6,8
100	0,67	0,69	-0,02	-3,0
150	0,88	0,95	-0,07	-8,0
200	1,10	1,14	-0,04	-3,6
250	1,28	1,28	0	0
273,1	1,32	1,33	-0,01	-0,8
300	1,36	1,38	-0,02	-1,5
350	1,43	1,45	-0,02	-1,4
400	1,50	1,51	-0,01	-0,7
500	1,62	1,62	0	0
600	1,72	1,75	-0,03	-1,7
700	1,80	1,92	-0,12	-6,7

Одновременно с тем, как были получены настоящие результаты, появилась книга Пауэлла [28], где, в частности, приводится таблица рекомендуемых значений теплопроводности λ' плавленого кварца в том же температурном интервале 80—700° К.

Как видно из табл. 5, совпадение результатов, полученных Пауэллом (λ') и нами (λ), удовлетворительно, особенно в интервале 250—600° К. Имеющиеся расхождения максимальны на концах исследованного температурного интервала и носят систематический характер. Это указывает на необходимость дальнейшего экспериментального изучения температурной зависимости теплопроводности плавленого кварца, особенно при температурах ниже 250 и выше 600° К.

Температуропроводность

Температурная зависимость температуропроводности a плавленого кварца экспериментально изучалась лишь в работах [21, 22]. В первой из них исследована зависимость $a = a(T)$ цилиндрического образца в интервале 36—362° К квазистационарным методом радиального теплового потока при малых и больших критериях Fo . В работе [22] использовался

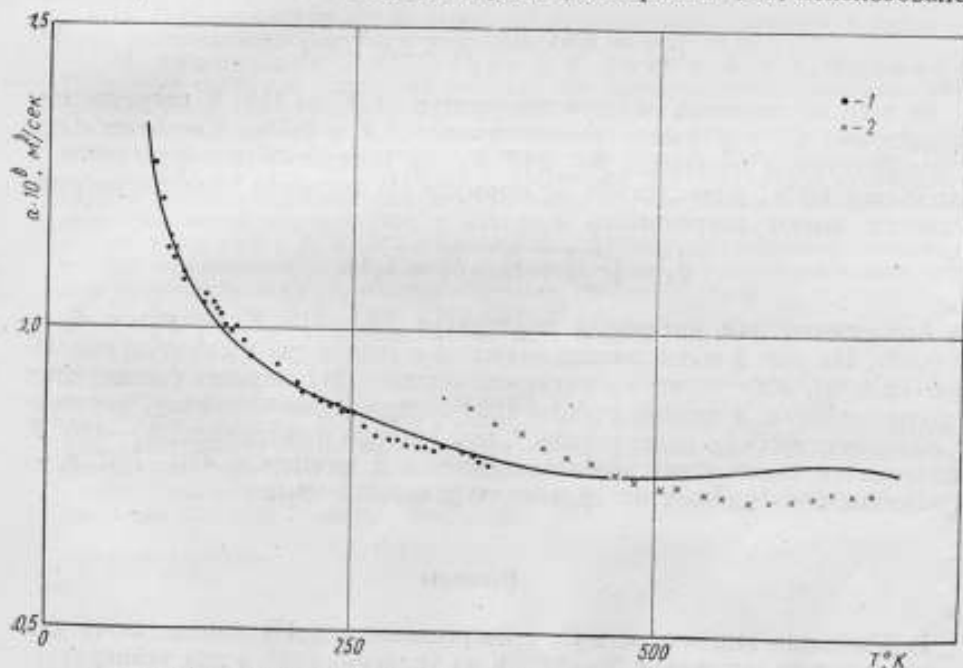


Рис. 2. Зависимость $a = a(T)$, вычисленная из уравнения (4) по данным:

1 — Васильева [21]; 2 — Курепина и Платунова [22].

прибор, позволяющий определить теплофизические коэффициенты материалов $\lambda = 1-10 \text{ вт/м} \cdot \text{град}$ и $a = 1 \cdot 10^{-7} \pm 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$ в режиме монотонного (динамического) разогрева образца в интервале 20—400° С.

Как видно из рис. 2, при 325° К данные работ [21] и [22] расходятся на 8%. Из-за недостаточного количества работ по температуропроводности плавленого кремнезема, а также из-за систематического сдвига значений температуропроводности в указанных двух работах мы не решились обработать эти результаты методом наименьших квадратов, а определили

температуропроводность из соотношения $a = \lambda / C_p \gamma$. Для этого в интервале 80—715° К при расчете C_p и λ были использованы соотношения (1)—(3).

Что касается плотности γ плавленного кварца, то из рассматриваемых работ только в статье Берча и Кларка [13] приведено ее значение, равное 2199 кг/м³. В статье [26] приводятся значения масс и объемов трех кубов из оптического плавленного кварца, на основании которых $\gamma = 2201$ кг/м³. Проведенные измерения показали, что значения плотности отдельных образцов из оптического кварца не выходят за пределы 2200 ± 10 кг/м³. Таким образом, при расчетах a было принято $\gamma = 2200 \pm 10$ кг/м³.

Плотность плавленного кварца незначительно изменяется с температурой, так как мало изменяется объем образцов $V = V_0 (1 + \beta t)$, зависящий от коэффициента объемного расширения плавленного кварца $\beta = 3\alpha$. По данным работы [27], коэффициент линейного расширения α равен $0,6 \cdot 10^{-6}$ град⁻¹ в интервале 20—500° С, т. е. для температуры 500° С он составляет 0,09% по сравнению с единицей. Эту поправку к объему, а следовательно, к плотности плавленного кварца можно не учитывать, так как плотность определена с большей погрешностью (~0,5%). Таким образом, формула для расчета температуропроводности (в м²/сек) имеет вид

$$a = \frac{\lambda}{C_p \gamma} = 4,54 \cdot 10^{-4} \frac{A_\lambda + B_\lambda T + N_\lambda T^2}{A_c + B_c T + N_c T^2} \quad (4)$$

Во всей исследуемой области температур от 80 до 715° К погрешности определения C_p и γ равны соответственно 0,4 и 0,5%. Следовательно, в температурном интервале 80—240° К, где погрешность определения λ составляет 1,2%, вычисленные по формуле (4) значения температуропроводности имеют погрешность

$$\delta_a = \sqrt{\delta_\lambda^2 + \delta_c^2 + \delta_\gamma^2} = 1,4\%$$

Аналогично для интервала температур 240—715° К получаем $\delta_a = 0,9\%$. На рис. 2 вычисленные значения a соединены в плавную сплошную кривую. Как видно из рисунка, данные [21] хорошо согласуются с вычисленными, а данные работы [22] содержат, по-видимому, неучтенную систематическую погрешность*, при которой в интервале 320—480° К наблюдается систематическое завышение, а в интервале 480—700° К — занижение этих данных по сравнению с вычисленными.

Выводы

1. Удельная теплоемкость C_p с погрешностью 0,4% определяется для температурного интервала 70—300° К из уравнения (2), а для температурного интервала 300—1100° К — из уравнения (1).
2. Теплопроводность λ определяется из уравнения (3). В интервале 80—240° К погрешность равна 1,2%, в интервале 240—715° К она составляет 0,6%.
3. Температуропроводность a определяется из уравнения (4). В интервале 80—240° К погрешность равна 1,4%, в интервале 240—715° К — 0,9%.

* Стр. 58.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев Г. М. Регулярный тепловой режим. М.—Л., Гостехиздат, 1954.
2. Новиков И. И., Голашвили Т. В., Лутовини В. С. О понятии «стандартные справочные данные», о свойствах веществ и материалов. «Измерительная техника», 1966, № 9.
3. Национальная система стандартных справочных данных США (перевод с английского). М.—Л., изд. стандартов, 1965.
4. Sosman R. B. International Critical tables 5, 105, 4, 21, 1927.
5. Kelley K. K. High-Temperature, Heat-Content, Heat-Capacity and Entropy Data for Inorganic compounds. U. S. Bur. of Mines. Bull. 371, Washington, 1934.
6. Kelley K. K. High-Temperature, Heat-Content, Heat-capacity and Entropy Data for Inorganic Compounds, U. S. Bur. of Mines Bull. 476, Washington, 1949.
7. Kelley K. K. High-Temperature, Heat-Content, Heat-capacity and Entropy Data for Inorganic Compounds. U. S. Bull. of Mines Bull. 584, Washington, 1960.
8. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. М., изд. АН СССР, 1962.
9. Touloukian J. S. Editor, Thermophysical Properties research literature. Mc Gran Hill Book Company, New York, Toronto, London, 1960, v. 1, 1963, v. 2.
10. Eucken A. Ann. d. Phys., 1911, B. 34.
11. Barrat T. Proc. Phys. Soc. 1914—1915, 27.
12. Kaye G. W. Higgins W. S. Proc. Roy. Soc. 1927, v. 113, A.
13. Birch F., Clark H. Amer. J. Sci., 1940.
14. Berman R. Proc. Roy. Soc., 1951, A. 208.
15. Kingery W. J. Am. Ceram. Soc. 1955, v. 38, № 7.
16. Wray K. L., Cannolly T. Y. J. Appl. Phys. 1959, v. 30, № 11.
17. Ratcliffe E. H. Brit. J. Appl. Phys. 1959, v. 10, № 1.
18. Пустовалов Б. В. Изменение теплопроводности кварцевого стекла в процессе кристаллизации. «Стекло и керамика», 1960, № 5.
19. Девяткова Е. Д., Петров А. В., Смирнов И. А., Мойжес Б. Я. Плавленный кварц как образцовый материал при измерении теплопроводности. «Физика твердого тела», 1960, т. 2, вып. 4.
20. Алексеенко М. П. Теплопроводность, температуропроводность и удельная теплоемкость оптических материалов. «Оптико-механическая промышленность», 1962, 10.
21. Васильев Л. Л. Метод и аппаратура для определения теплофизических свойств теплоизоляционных материалов в температурном диапазоне 80—500° К. «Инженерно-физический журнал», 1964, т. VII, № 5.
22. Курепин В. В., Платунов Е. С. Прибор для скоростных широкотемпературных теплофизических испытаний теплоизоляционных и полупроводниковых материалов. Известия вузов СССР, «Приборостроение», 1961, т. IV, № 5.
23. Seeman H. E. Phys. Rev., 1928, 31.
24. Knapp W. I. J. Amer. Ceram. Soc., 1943, 26.
25. Gaffner G. Brit. J. Appl. Phys., 1957, 8.
26. Кузьменков Л. Н. Абсолютное измерение плотности ртути. «Труды метрологических институтов СССР», вып. 96 (156), М.—Л., Стандартгиз, 1967.
27. Королева А. Н., Шевченко Е. Б. Результаты исследования температурного коэффициента удлинения плавленого кварца и стекла сорта 23. «Труды институтов Госкомитета», вып. 78 (138), М.—Л., изд. стандартов, 1965.
28. Powell R. W., Ho C. J., Liley P. E. NSRDS—NBS8, Category 5, Thermodynamic and Transport Properties, nov. 1966.

Поступила в редакцию
27/II 1968 г.

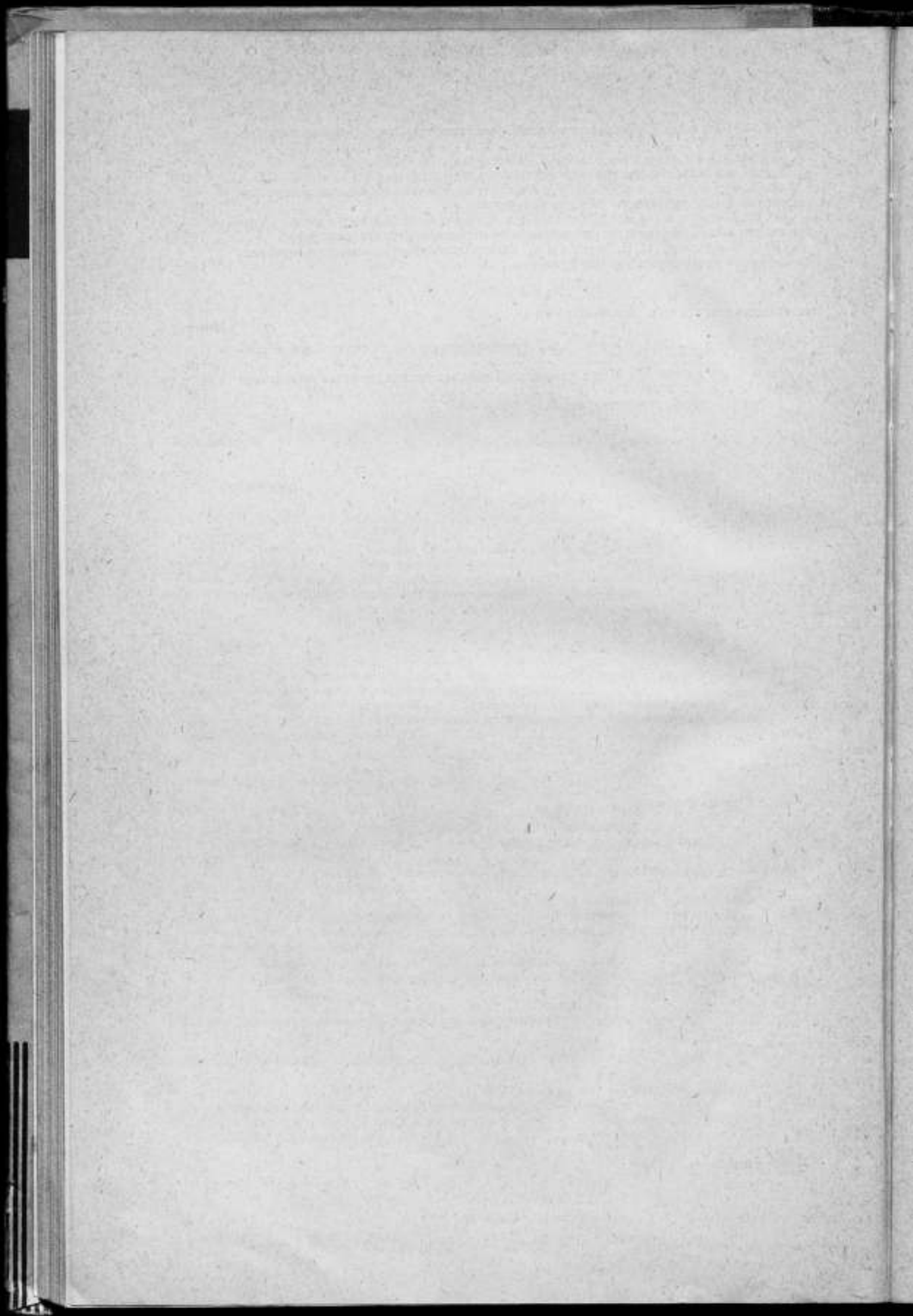
СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
I. ИНФОРМАЦИЯ	
√ Б. Н. Олейник. Пересмотр «Положения о Международной практической температурной шкале» (МПТШ)	5
√ Б. Н. Олейник. Решения Тринадцатой Генеральной конференции по мерам и весам о единицах измерения тепловых величин	10
√ Б. Н. Олейник. Работы Международной организации по стандартизации (ИСО) в области единиц измерения тепловых величин	13
II. ОБЗОРЫ	
√ О. А. Сергеев, А. З. Чечельницкий. Стационарные сравнительные методы измерения теплопроводности твердых материалов	16
√ А. А. Мень, О. А. Сергеев. Лучисто-кондуктивный теплообмен	26
√ О. А. Сергеев, Ю. А. Чистяков. Измерение теплопроводности тонких слоев твердых веществ	40
III. МЕТОДИКИ ИЗМЕРЕНИЙ. ПРИБОРЫ	
√ Г. А. Новиков, Б. Н. Олейник, С. В. Пасенко, О. А. Сергеев, В. С. Усков. Методика поверки газовых калориметров	54
√ О. А. Сергеев, Л. И. Филатов. Исследование динамического <i>al</i> -калориметра ЛИТМО	58
√ В. Д. Микина, Б. Н. Олейник. Калориметры для стандартных определений теплоты сгорания веществ	62
√ В. Д. Микина, Л. А. Новикова, Б. Н. Олейник. Массивные калориметры сжигания для измерения малых тепловых эффектов	66
√ Б. Н. Олейник, З. К. Патовская. Установка для поверки и градуировки плоских тепломеров	70
√ Ю. И. Александров, В. И. Новгородцева, Е. В. Чепелева. Выбор материала ампул при анализе термохимических образцовых веществ криоскопическим методом	73
√ М. В. Анolik, В. А. Левидов, Г. П. Цивирко. Применение сглаживания для улучшения помехоустойчивости дискретного дифференциатора	76
IV. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ТЕПЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ	
√ Р. Г. Думова, О. А. Сергеев. О значениях случайных погрешностей измерения температуры эталонным термоприемником	82
√ А. Г. Иванова, Д. Ф. Тартаковский. О стабильности технических термометров сопотвращения	85

✓ А. Г. Иванов. Расчет перегрева поверхностных термометров сопротивления	90
✓ Ю. И. Александров, В. Д. Микина, Г. А. Новиков. О поправке на окисление азота при определении теплоты сгорания	95
✓ А. В. Кайданова, А. И. Кайданов. Расчет аксиальных потерь при измерении теплопроводности твердых материалов	103
✓ Е. Н. Безрукова, К. Г. Парцхаладзе, О. А. Сергеев. О погрешности измерения температуропроводности методом линейного разогрева	110
✓ В. С. Болгар, И. С. Мытник. Выбор оптимального значения перегрева термоанемометра с термисторным датчиком	117

V. ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

✓ А. А. Мень, О. А. Сергеев. Лучисто-кондуктивный теплообмен в плоском слое	119
✓ О. А. Сергеев, Т. З. Чадович. Теплофизические свойства плавленого кварца	151
Рефераты статей, опубликованных в сборнике	163



Приложение

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В СБОРНИКЕ

УДК 536.5

Пересмотр положения о Международной практической температурной шкале (МПТШ)

Б. Н. Олейник

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 5—9

С 1962 по 1967 г. Консультативный комитет по термометрии на 6, 7 и 8-й сессиях рассматривал состояние температурных измерений и пришел к выводу о необходимости создания нового положения о Международной практической температурной шкале. Тринадцатая Генеральная конференция по мерам и весам в октябре 1967 г. поручила Международному комитету мер и весов окончательно решить этот вопрос. В статье приводятся эти решения.

Таблиц 1, библиографий 5.

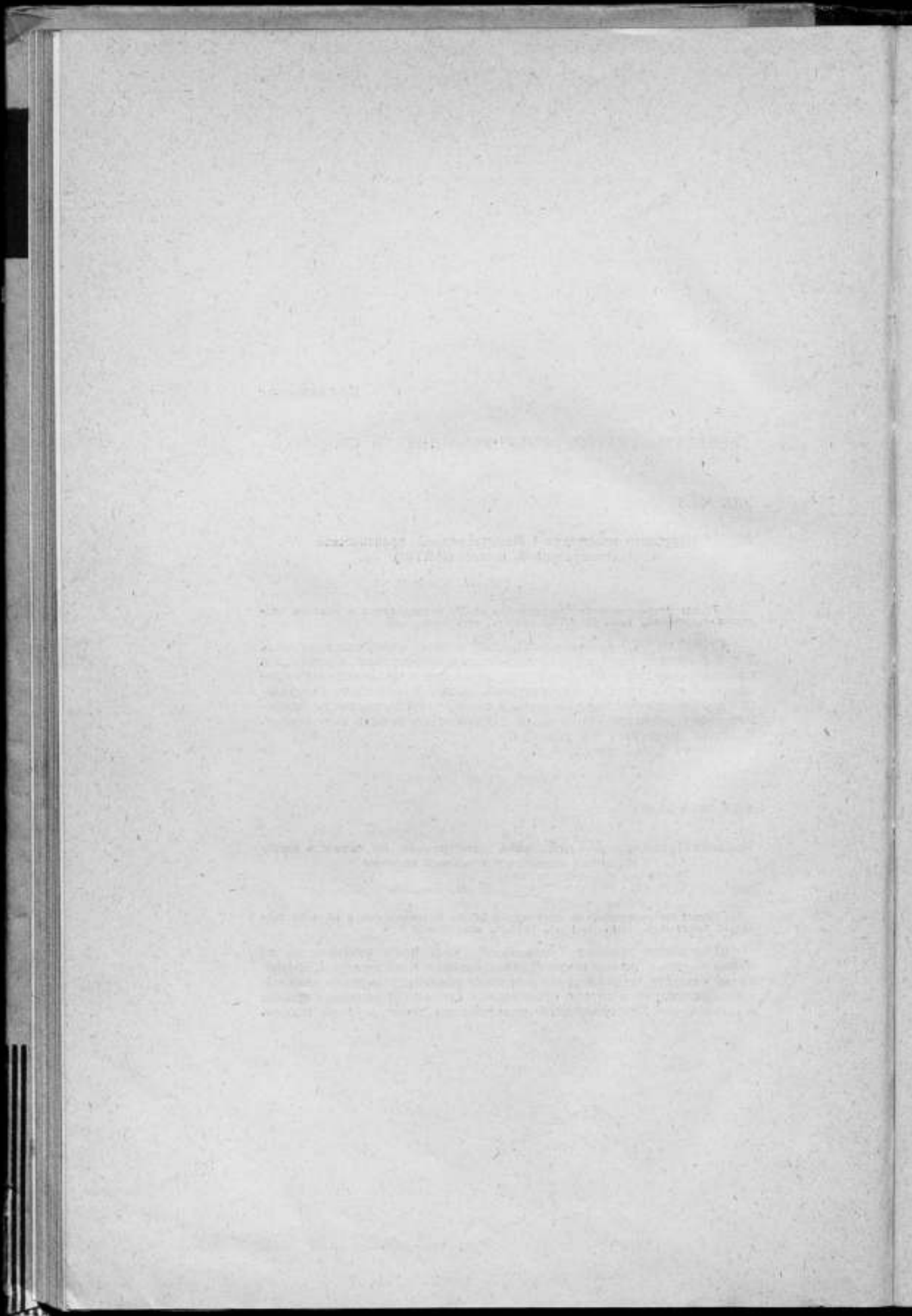
УДК 061.3.53.081

Решения Тринадцатой Генеральной конференции по мерам и весам о единицах измерения тепловых величин

Б. Н. Олейник

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 10—12

Приводятся решения Тринадцатой Генеральной конференции по мерам и весам о наименовании единицы измерения температуры, обозначении разности температур, определении единицы измерения температуры, включении в список производных единиц СИ тепловых единиц и пересмотре Международной практической температурной шкалы.



Работы международной организации по стандартизации (ИСО)
в области единиц измерений тепловых величин

Б. Н. Олейник

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 13—15

Приведены сведения о работе Технического комитета № 12 ИСО, который рассматривает вопросы физических величин, их единиц измерения, коэффициенты для перевода единиц измерения из одной системы единиц в другую. Приведены также последние решения ТК 12, принятые в Москве в 1967 г.

Таблиц 1.

Стационарные сравнительные методы измерения теплопроводности
твердых материалов

О. А. Сергеев, А. З. Чечельницкий

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 16—25

Приводится анализ сравнительных стационарных методов аксиального теплового потока. Методы применимы в широком интервале температур и значений теплопроводности. Рассматриваются различные модификации методов, анализируются преимущества и недостатки их в сопоставлении с абсолютными методами измерения. Показано, что применение сравнительного метода для получения достаточно точных данных оправдано лишь в случае, когда экспериментальная техника не усложняется до уровня абсолютных методов.

Иллюстраций 8, библиографий 27.

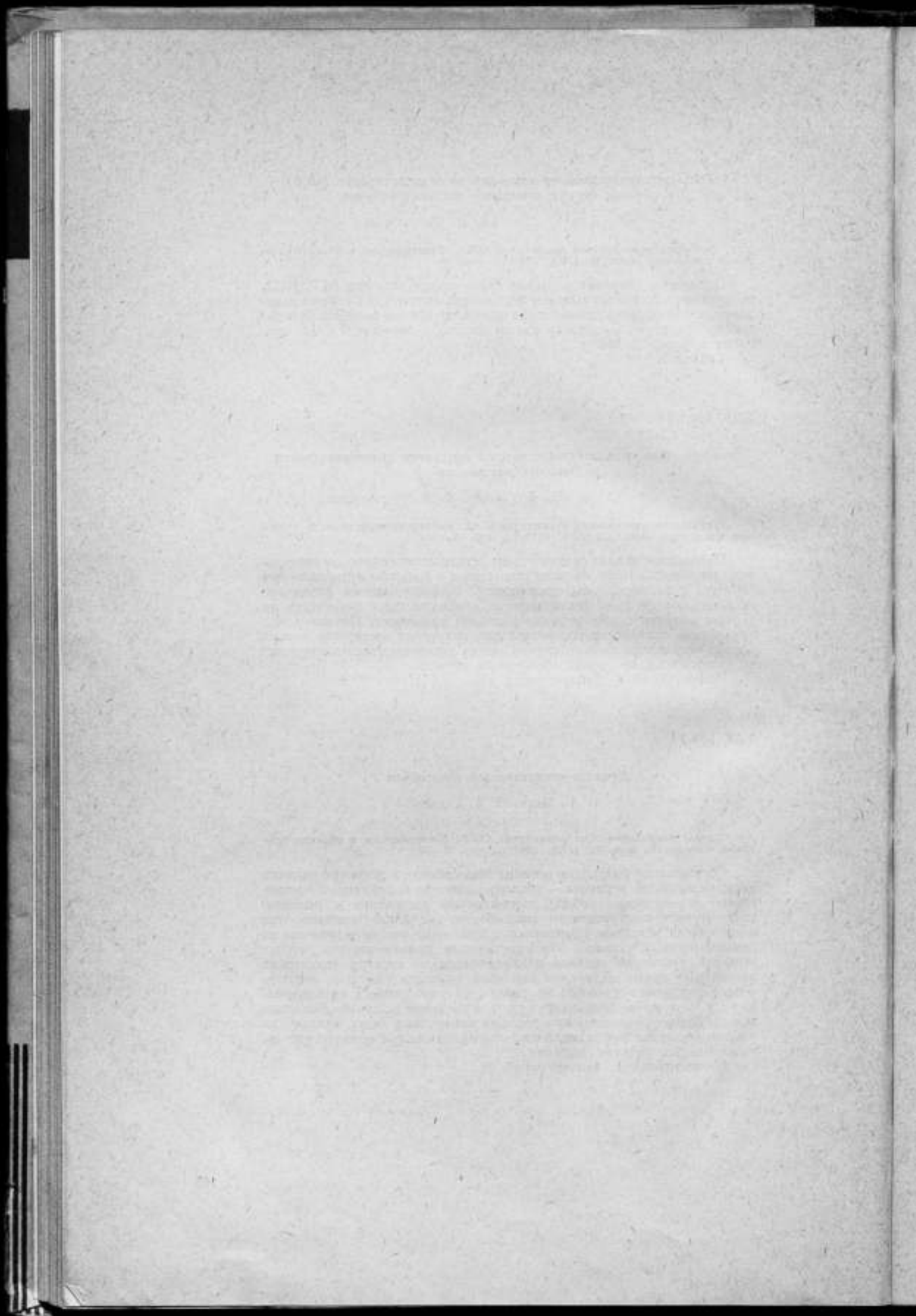
Лучисто-кондуктивный теплообмен

А. А. Мень, О. А. Сергеев

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 26—39

Обсуждаются различные аспекты энергообмена в среде при наличии двух механизмов переноса — теплопроводности и радиации. Рассмотрены теоретические работы, посвященные постановке и решению задач лучисто-кондуктивного теплообмена как аналитическими, так и числовыми методами. Сравниваются различные теории и границы их применимости. Показано, что практическое применение полученных решений неизменно связано с усреднением по спектру оптических постоянных среды. Для слоя конечной толщины известные теоретические построения основаны на различных упрощающих предположениях и поэтому не позволяют судить о точности решений. Числовые методы более эффективны при решении конкретных задач, однако при изменении параметров задачи в широком диапазоне они не имеют удовлетворительных методик решения.

Иллюстраций 1, библиографий 30.



УДК 536.2.53.08 : 539.2

Измерение теплопроводности тонких слоев твердых веществ

О. А. Сергеев, Ю. А. Чистяков

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 40—53

Приведен анализ оригинальных работ, посвященных измерению теплопроводности тонких слоев твердых веществ.

Показано, что методы измерения теплопроводности, с успехом используемые для массивных образцов, практически непригодны для тонких слоев. Сделан вывод, что применение известных методов ограничено областью малых значений коэффициента теплопроводности (в основном не более $1 \text{ вт/м}\cdot\text{град}$) и сравнительно больших толщин исследуемых образцов (200 $\mu\text{м}$ и более).

Иллюстраций 8, библиографий 22.

УДК 536.62.089.6

Методика поверки газовых калориметров

Г. А. Новиков, Б. Н. Олейник, С. В. Пасенко, О. А. Сергеев, В. С. Усков

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 54—57

Предлагается использовать для поверки газовых калориметров фирмы «Юнкалор» бомбовый калориметр, предназначенный для определения теплоты сгорания твердого, жидкого и газообразного топлив. Представлены результаты поверки газовых калориметров в системе «Краснодарэнерго».

Таблиц 2, библиографий 2.

УДК 536.62

Исследование динамического αL -калориметра ЛИТМО

О. А. Сергеев, Л. И. Филатов

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 58—61

Приведены результаты исследований, выполненных при государственных испытаниях динамического αL -калориметра ЛИТМО. Описана методика экспериментальной оценки погрешностей измерений прибора.

Иллюстраций 4, библиографий 5.

УДК 536.62

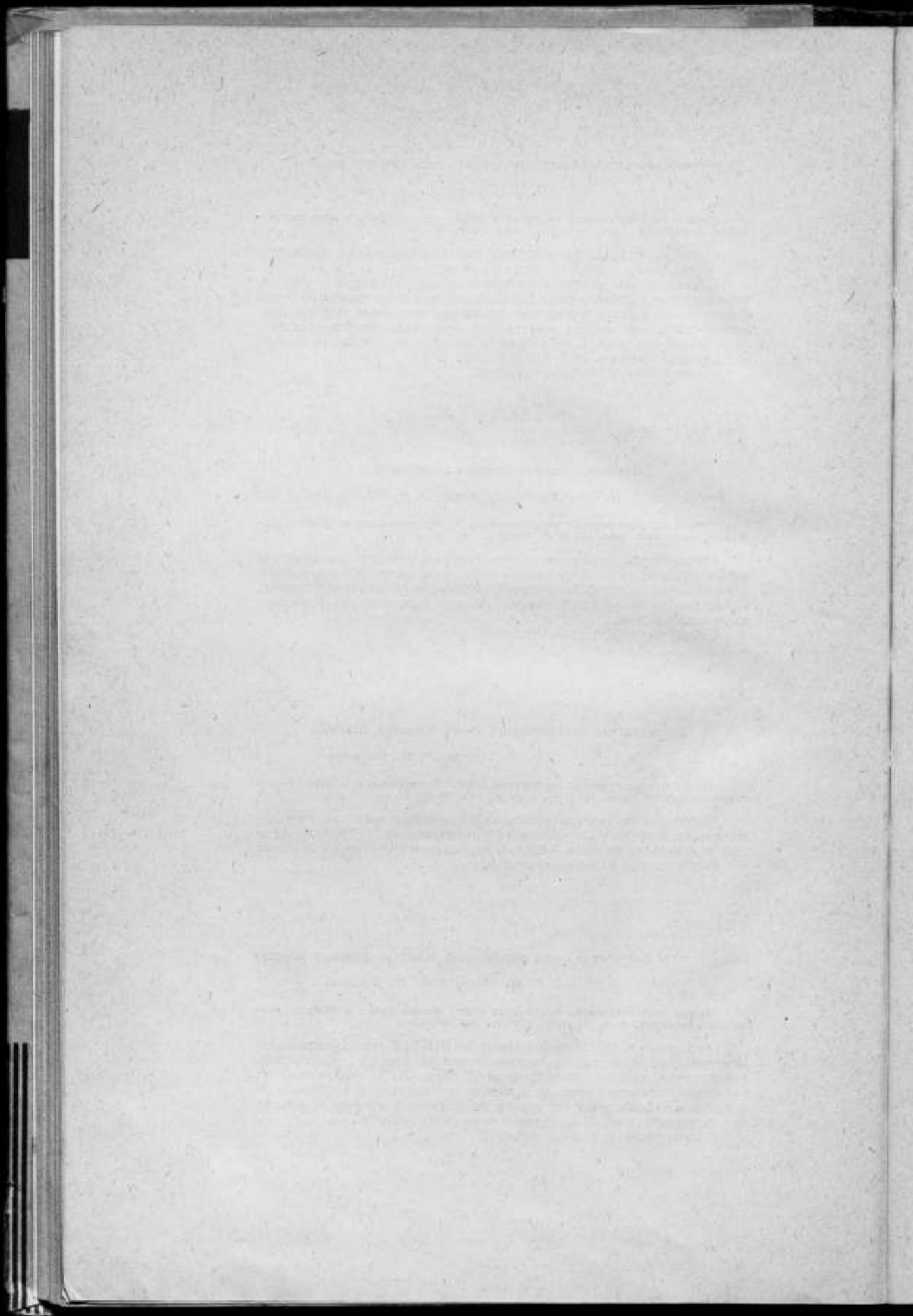
Калориметры для стандартных определений теплоты сгорания веществ

В. Д. Микина, Б. Н. Олейник

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 62—65

Сообщается о двух разработанных во ВНИИМ стандартных калориметрах для определения теплоты сгорания веществ. Жидкостные калориметры, условно обозначенные В-08 и В-09, рассчитаны на измерение количества теплоты, эквивалентного сгоранию 1 г бензойной кислоты. Погрешность градуировки по бензойной кислоте одного из них составляет $\pm 0,05\%$, а другого — не более $\pm 0,07\%$.

Иллюстраций 1, библиографий 2.



УДК 536.62

Массивные калориметры сжигания для измерения малых тепловых эффектов

В. Д. Микина, Л. А. Новикова, Б. Н. Олейник

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 66—69

Созданный тип массивного калориметра отличается от существующих тем, что для улучшения теплового контакта бомбы и блока форма бомбы и отверстия, в которое она вставляется, сделаны коническими. Кроме того, бомба составная: ее корпус из нержавеющей стали вставлен в коническую латунную втулку и сверху закрыт резьбовой пробкой, причем между верхней наиболее нагреваемой частью корпуса и пробкой имеется зазор, который устраняет преимущественную направленность потока тепла вверх при сгорании исследуемого вещества.

Калориметры, разработанные во ВНИИМ, позволяют определять количество теплоты, в 2, 5 и 10 раз меньшее выделяющегося при сгорании 1 г бензойной кислоты. Градуировка по бензойной кислоте показала, что среднеквадратическая погрешность воспроизведения теплового эквивалента для двух первых калориметров составляет $\pm 0,03\%$, а для последнего — $\pm 0,05\%$.

Таблиц 1, иллюстраций 1, библиографий 6.

УДК 53.089.62 : 681.12

Установка для поверки и градуировки плоских тепломеров

Б. Н. Олейник, З. К. Патовская

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 70—72

Дано описание установки типа УТП-1, предназначенной для создания и измерения плотности тепловых потоков в диапазоне от 0 до 1000 $\text{вт}/\text{м}^2$ с погрешностью $\pm 1\%$. Приведен анализ погрешностей измерения и результаты испытаний тепломеров на этой установке.

Иллюстраций 3.

УДК 536.581 : 543.08

Выбор материала ампул при анализе термохимических образцовых веществ криоскопическим методом

Ю. И. Александров, В. И. Новгородцева, Е. В. Чепелева

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 73—75

Обоснован выбор материала для ампул при криоскопическом анализе адипиновой, бензойной, парахлорбензойной, щавелевой и янтарной кислот. Исследована коррозионная стойкость платины, тантала, титана и нержавеющей стали к расплавам указанных кислот. Показано, что в равных условиях наибольшей коррозионной стойкостью обладают платина и тантал.

Иллюстраций 3, библиографий 12.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

REPORT OF THE

COMMISSION ON THE

REVISION OF THE

PHYSICS CURRICULUM

FOR THE

PHYSICS DEPARTMENT

AT THE UNIVERSITY OF CHICAGO

1952-1953

BY

THE COMMISSION

ON THE

REVISION OF THE

PHYSICS CURRICULUM

FOR THE

PHYSICS DEPARTMENT

AT THE UNIVERSITY OF CHICAGO

1952-1953

BY

THE COMMISSION

ON THE

REVISION OF THE

PHYSICS CURRICULUM

FOR THE

PHYSICS DEPARTMENT

AT THE UNIVERSITY OF CHICAGO

1952-1953

BY

THE COMMISSION

ON THE

REVISION OF THE

PHYSICS CURRICULUM

УДК 536.55

**Применение сглаживания для улучшения помехоустойчивости
дискретного дифференциатора**

М. В. Анолик, В. А. Левилов, Г. П. Цивирко

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 76—81

Исследуется точность дискретно-дифференцирующего измерительного устройства, вычисляющего разность между усредненными на одинаковых интервалах времени значениями входного сигнала. На вход устройства одновременно с полезным сигналом поступают аддитивные высокочастотные помехи. При измерении скорости медленно протекающих тепловых процессов погрешность, вызываемая этими помехами, значительно меньше по сравнению с дискретными дифференциаторами, вычисляющими разность мгновенных значений входного сигнала.

Иллюстраций 2, библиографий 7.

УДК 536.5.53.088

**О значениях случайных погрешностей измерения температуры
эталонным терморезистором**

Р. Г. Думова, О. А. Сергеев

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 82—84

Показано, что точное знание температуры реперных точек недостаточно для определения случайных погрешностей измерений температуры эталонным терморезистором. В соответствии с метрологической практикой, значения постоянных в интерполяционном уравнении предлагается считать точными, а погрешность в воспроизводимом температурном интервале рассчитывать, интерполируя значения погрешностей в реперных точках.

Таблиц 1, библиографий 2.

УДК 536.531

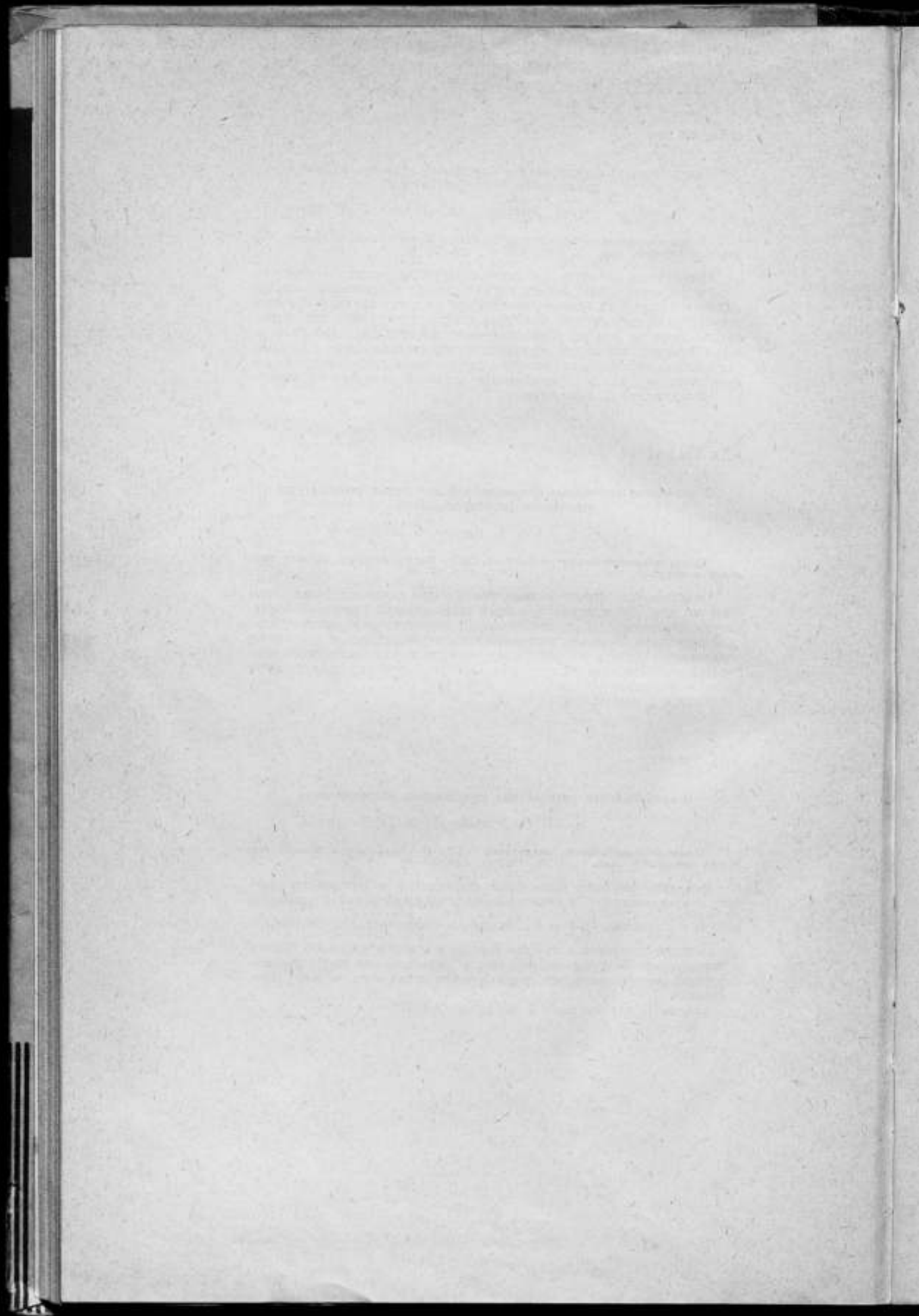
О стабильности технических термометров сопротивления

А. Г. Иванова, Д. Ф. Тартаковский

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 85—89

Выведены формулы предельной погрешности измерения термометров сопротивления с учетом распределения отклонений сопротивления R_0 и отношения $\frac{R_{100}}{R_0} = N$. Законы распределения этих отклонений при выпуске термометров из производства и к моменту поверки близки к нормальным. Полученные результаты указывают на необходимость совершенствования методики поверки технических термометров сопротивления.

Таблиц 1, иллюстраций 3, библиографий 2.



УДК 536.531

Расчет перегрева поверхностных термометров сопротивления

А. Г. Иванова

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 90—94

Получены формулы для оценки перегрева поверхностных термометров сопротивления измерительным током. Расчетные данные расходятся с экспериментальными для отдельных типов термометров в пределах 20%.

Иллюстраций 1, библиографий 2.

УДК 536.662

О поправке на окисление азота при определении теплоты сгорания

Ю. И. Александров, В. Д. Микина, Г. А. Новиков

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 95—102

Рассмотрен механизм образования азотной кислоты в калориметрической бомбе. Исследована зависимость количества образующейся азотной кислоты от давления кислорода, массы вещества, концентрации азота и выдержки продуктов сгорания в бомбе после сжигания вещества.

Установлено, что к концу главного периода калориметрического опыта процесс образования азотной кислоты из двуокиси азота не заканчивается. Поэтому поправку на окисление азота следует рассматривать состоящей из тепловых эффектов образования азотной кислоты и окислов азота.

Таблиц 2, иллюстраций 4, библиографий 11.

УДК 53.088 : 536.2 : 539.2

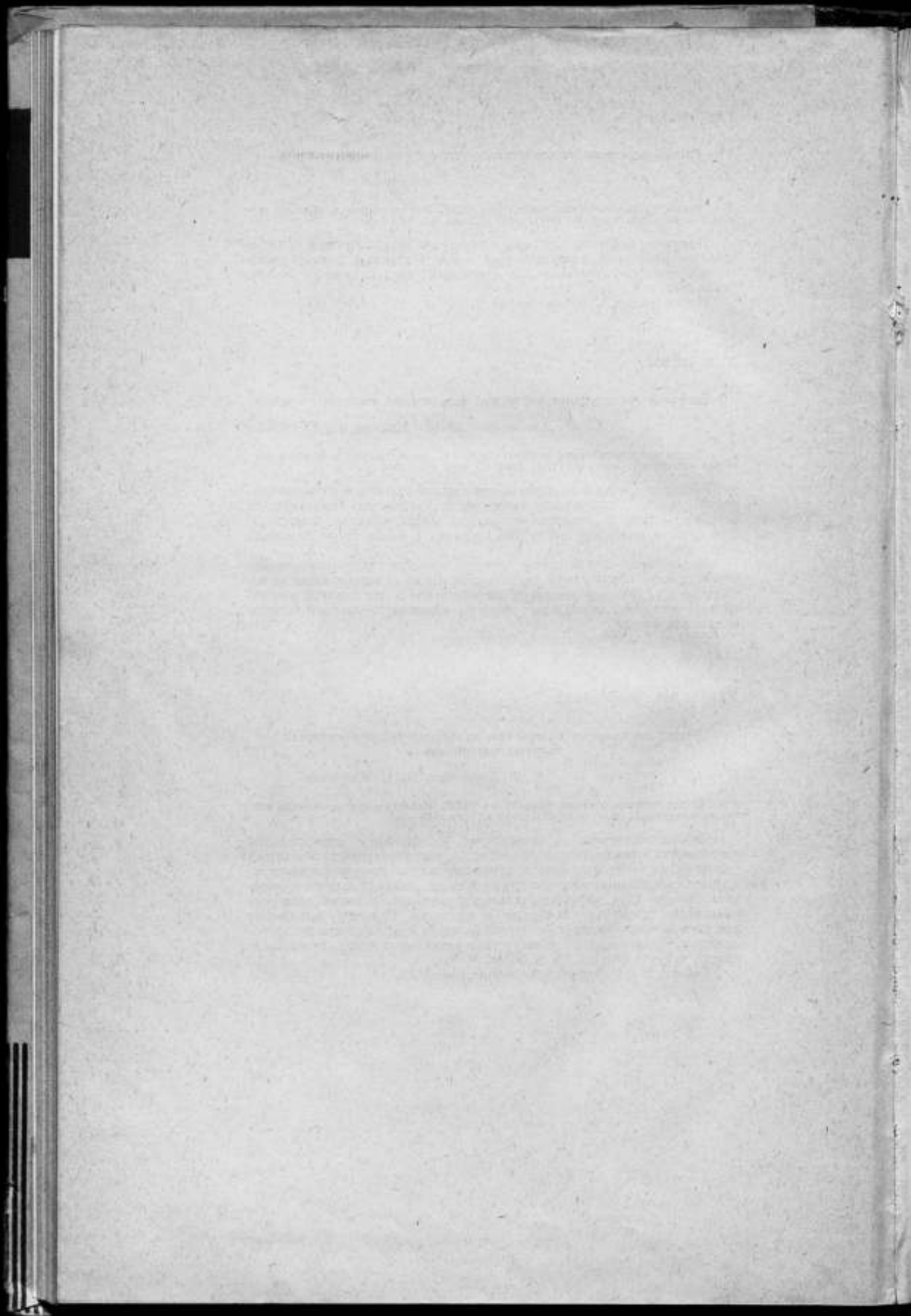
Расчет аксиальных потерь при измерении теплопроводности твердых материалов

А. В. Кайданова, А. И. Кайданов

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (71), 1969 г., стр. 103—109

Работа посвящена аналитическому исследованию относительной погрешности измерения теплопроводности, обусловленной аксиальными потерями тепла от изоляции при использовании широко распространенного стационарного метода двух образцов. Задача сводится к решению системы двух дифференциальных уравнений, описывающих распределение температур в образце и изоляции. Получено выражение для поправочного члена в расчетной формуле коэффициента теплопроводности. Показано, что при отсутствии радиальных потерь аксиальные потери могут достигать 5% и более.

Таблиц 1, иллюстраций 3, библиографий 12.



УДК 531.516

О погрешности измерения температуропроводности методом линейного разогрева

Е. Н. Безрукова, К. Г. Парцхаладзе, О. А. Сергеев

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 110—116

Рассматривается температурное поле пластины и цилиндра в режиме линейного симметричного разогрева поверхностей. Применение теории возмущений позволило решить задачу с учетом зависимости теплофизических параметров от температуры и получить поправку к формуле определения температуропроводности.

Полученные результаты сравниваются с данными исследований других авторов.

Библиографий 6.

УДК 551.508.4

Выбор оптимального значения перегрева термоанемометра с термисторным датчиком

В. С. Болгар, Н. С. Мытник

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 117—118

Проанализирована работа термоанемометра, чувствительным элементом которого является термистор. Определено условие получения максимальной чувствительности схемы в режиме постоянной температуры и приведена методика расчета оптимального перегрева термисторов.

Иллюстраций 1.

УДК 536.24

Лучисто-кондуктивный теплообмен в плоском слое

А. А. Мень, О. А. Сергеев

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 119—120

Приведено аналитическое решение линеаризованного интегрального уравнения лучисто-кондуктивного теплообмена в плоском слое, ограниченном отражающими плоскостями. Математическое исследование основано на методе, отличающемся от известных приближенных методов решения линейных интегральных уравнений. Предлагаемый способ решения — аппроксимация ядра алгебраической функцией и быстро сходящимся тригонометрическим рядом — позволяет получать результаты с достаточной для практики точностью при сравнительно небольшом объеме вычислений. Когда оптическая толщина слоя меньше единицы, решение получается в замкнутом виде, на численных примерах показано, что погрешность не превышает нескольких процентов.

Иллюстраций 5, библиографий 10.

УДК 66—971 : 666.19

Теплофизические свойства плавленого кварца

О. А. Сергеев, Т. З. Чадович

Труды метрологических институтов СССР. Исследования в области тепловых измерений, вып. 111 (171), 1969 г., стр. 151—159

Проведен критический анализ данных о теплоемкости, теплопроводности и температуропроводности плавленого кварца в широком интервале температур. Примененный метод анализа может рассматриваться как один из возможных. Рекомендуемые значения представлены аналитически для интервала температур 80—715° К.

Таблиц 5, иллюстраций 2, библиографий 28.

ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ
ТЕПЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Труды метрологических институтов СССР

Выпуск 111 (171)

Редактор *Н. Н. Александрова*

Техн. редактор *З. Г. Вагер*

Корректор *Л. Н. Панина*

Сдано в набор 13/IX 1968 г. Подписано в печать 22/IV 1969 г.
Формат бумаги 70×108/16. Печ. л. 11. Прив. 15.07. Уч.-изд. л. 12,4
М-40749. Тираж 2000 экз. Цена 1 р. 34 коп. Заказ № 2300

ИЗДАТЕЛЬСТВО СТАНДАРТОВ
Москва, К-1, ул. Щусева, 4

Ленинградская типография № 6 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Ленинград, ул. Моисеенко, 10

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
36	8-я снизу	2σ	4σ
36	10-я »	$\beta(\tau)$	$\beta(0)$
41	1-я »	T_0	T_2
120	2-я »	F_v, τ	$\frac{\partial E_v, \tau}{\partial T}$

Зак. 2300

ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ
ТЕПЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Труды метрологических институтов СССР

Выпуск 111 (171)

Редактор *Н. Н. Александрова*

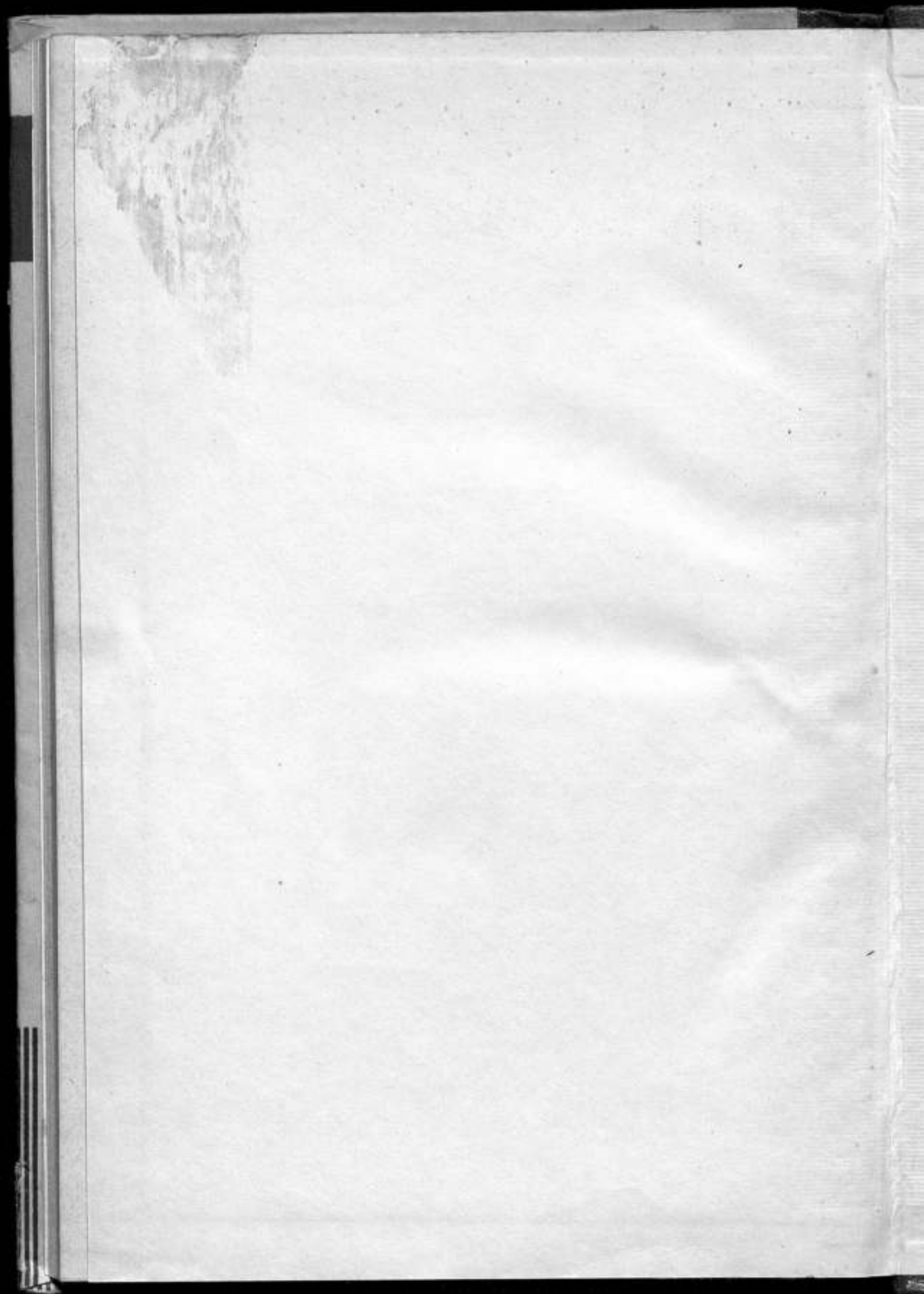
Техн.

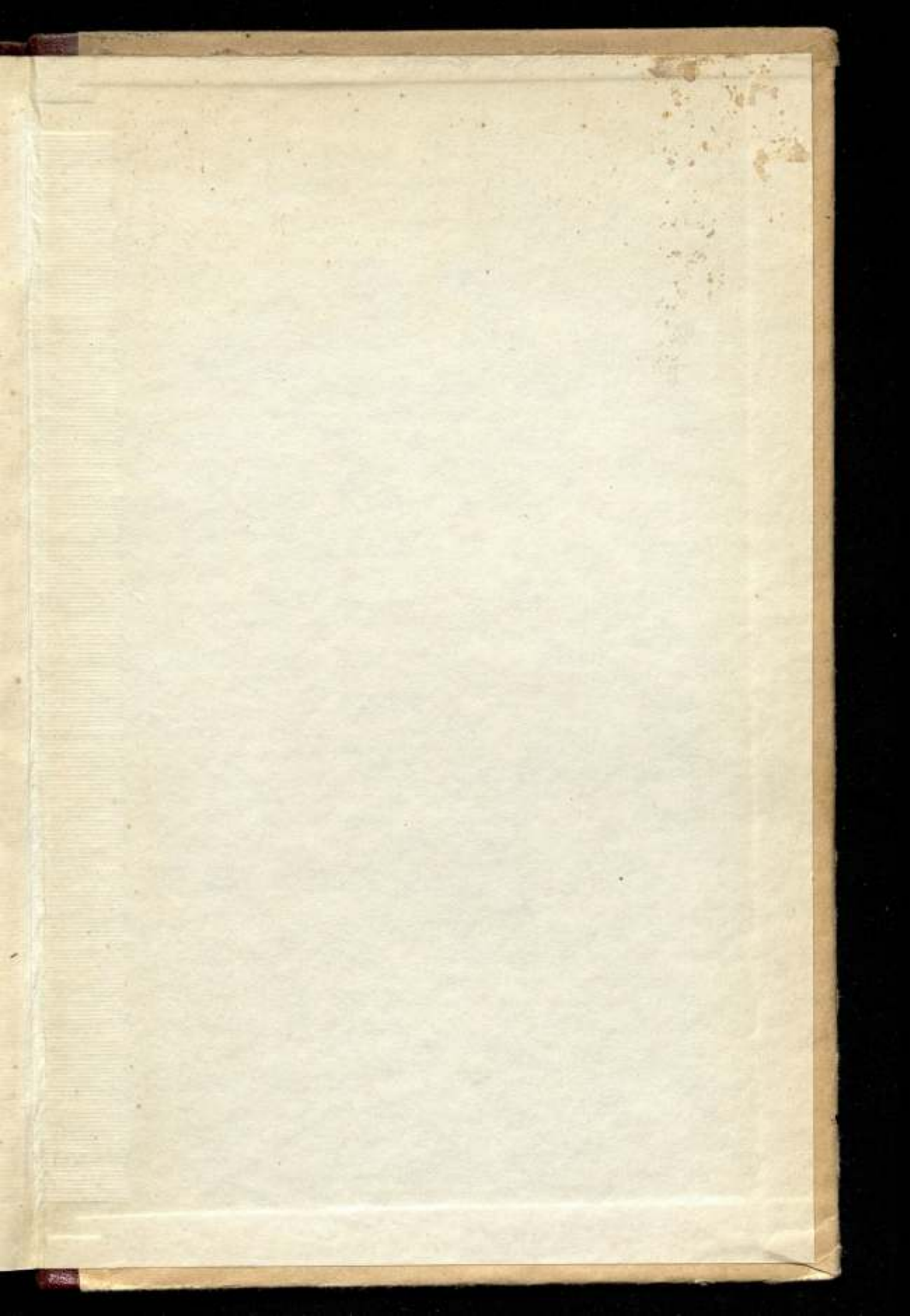
Корре

Сдано в набор 13/IX 1968 г.
Формат бумаги 70×108/16
М-40749. Тираж 2000 эк

ИЗДАТЕ
Москв

Ленинградская тип
Комитета по печ
Ленинг





Гр. 34 к.