

МИНИСТЕРСТВО ФИНАНСОВ СССР
ГЛАВНАЯ ПАЛАТА МЕР И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ СССР
ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ
ИМ. Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

**ИССЛЕДОВАНИЕ
В ОБЛАСТИ
ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ
ИЗМЕРЕНИЙ**

ТРУДЫ ВНИИМ
ВЫПУСК 23 (83)

МАШГИЗ · 1954



UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY
PHYSICS DEPARTMENT
5708 S. UNIVERSITY AVE.
CHICAGO, ILL. 60637

1952

1952

МИНИСТЕРСТВО ФИНАНСОВ СССР
ГЛАВНАЯ ПАЛАТА МЕР И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ СССР
ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
МЕТРОЛОГИИ имени Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

ИССЛЕДОВАНИЕ В ОБЛАСТИ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

ТРУДЫ ВНИИМ
ВЫПУСК 23(83)

Под редакцией
канд. физ.-мат. наук Г. Д. КОКОША

БИБЛИОТЕКА
Всесоюзного научно-иссле-
дательского института метрологии
имени Д. И. Менделеева



ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОЙ И СУДОСТРОИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1954 ЛЕНИНГРАД

415017

В сборнике помещены статьи по гравиметрии, отражающие часть работы института в этой области за последние годы.

Сборник предназначен для научных сотрудников, работников гравиметрических экспедиций, а также для студентов старших курсов университетов и институтов, специализирующихся в области геофизики.

111
111

Ответственный редактор
директор ВНИИМ канд. техн. наук
М. Ф. Юдин

ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МАШГИЗА

Редакция литературы по конструированию и эксплуатации машин

Заведующий редакцией инж. *Ф. И. Фетисов*

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящий сборник Трудов ВНИИМ вошли работы по гравиметрии, которые в части измерения абсолютного значения ускорения силы тяжести в последние годы получили некоторое развитие.

Уточнение значения величины g для пункта ВНИИМ важно, по крайней мере, по двум причинам:

1. Для установления константы g , с целью использования ее при воспроизведении единицы силы в области механических измерений, единицы силы тока с помощью токовых весов и в других метрологических работах.

2. Получения опорного пункта для гравиметрических работ.

Некоторые результаты проделанных работ при выполнении этих задач и отражены в настоящем сборнике.

В статье С. И. Торопина „Дифференциальный физический маятник с одной системой призма—подушка“ рассматривается теория дифференциального маятника с одной призмой и подушкой.

Преимущество такого маятника заключается в том, что колебания его во всех четырех состояниях происходят без нарушения контакта между призмой и подушкой, что исключает погрешность от влияния изменения момента упругих сил в месте контакта призмы и подушки, так как этот момент сохранит одно и то же значение для всех четырех состояний. Дается достаточно развернутый метрологический анализ, позволяющий видеть преимущество рассматриваемой маятниковой аппаратуры и метода измерения.

Статья С. И. Торопина „Влияние призмы и подушки при абсолютном определении ускорения силы тяжести с помощью маятников“ посвящена анализу влияния радиуса кривизны, материала и чистоты поверхности призмы и подушки на приведенную длину маятников. Автор исходит при этом из известных исследований Д. И. Менделеева и показывает, что изменение величины радиуса кривизны рабочего ребра призмы и упругих свойств призмы и подушки неизбежно приводит к изменению приведенной длины маятника, а следовательно, и к изменению периода его колебаний.

Вопросы, затронутые автором в рассматриваемой статье, требуют несомненно дальнейшего изучения и, главным образом, в направлении вскрытия физической природы сил, действующих в месте контакта призмы и подушки.

В статье С. И. Торопина „Исключение влияния сокачания штатива при абсолютном определении ускорения силы тяжести с помощью поворотных маятников“ рассматривается применение дифференциального метода к двум маятникам с равными массами, что дает возможность исключения влияния сокачания штатива.

Статьи Н. Н. Медведева посвящены некоторым частным вопросам гравиметрии.

В статье „Определение температуры маятника при наличии температурной слоистости во внешней среде“ автор дает теоретическое исследование

дование, подтверждаемое затем результатами опытов, о действительной температуре маятника при наличии в воздухе вертикального температурного градиента.

Результаты этих исследований дают возможность уточнить величину периода колебаний маятника за счет внесения более точной температурной поправки в приведенную длину маятника, а, следовательно, и в период его колебаний.

Статья „Методика определения периода колебания маятников из наблюдений с синхрочасами“ показывает возможность и целесообразность замены хронометров при гравиметрических работах синхрочасами или хроноскопами, что сократит время наблюдений и повысит качество гравиметрических работ.

Редактор

С. И. ГОРОПИН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК С ОДНОЙ СИСТЕМОЙ ПРИЗМА—ПОДУШКА

Обычные поворотные маятники должны иметь во взаимных точках либо две опорные подушки, либо две призмы, скрепленные со стержнем маятника.

В случае призм, закрепленных на стержне маятника, их необходимо менять местами для исключения влияния конечного радиуса кривизны призмы.

Перестановка призм местами усложняет эксперимент с маятником, а применение двух опорных подушек, скрепленных со стержнем маятника, не дает полной уверенности в том, что две точки подвеса маятника и его центр тяжести находятся в одной плоскости. Для установки этих точек в одной плоскости требуется специальное приспособление и тщательное проведение юстировки маятника, что также усложняет эксперимент с маятником.

Наличие в маятнике нескольких систем призма—подушка является существенным недостатком, так как уравнивание периодов колебания во взаимных точках производится при различном влиянии упругих сил и сил трения в системе призма—подушка, поэтому можно наблюдать равенство периодов колебаний, когда его нет в действительности.

Обычно колебания маятников производятся на призмах с малым радиусом кривизны, вследствие этого, даже при незначительной массе маятника, призма испытывает большую удельную нагрузку, благодаря которой в системе призма—подушка происходят упругие деформации как лезвия призмы, так и опорной подушки.

При наличии деформаций ось вращения маятника не проходит через плоскость опорной подушки и не совпадает с ребром призмы. Наличие упругих деформаций в системе призма—подушка вызывает увеличение длины стержня маятника и кажущееся увеличение приведенной длины маятника, вследствие неучтенного сокачания, вызываемого изгибом ребра призмы и опорной плоскости подушки.

Применение дифференциального метода к двум поворотным маятникам и применение дифференциальных физических маятников с четырьмя опорными плоскостями [1] позволяет исключить некоторую часть систематических погрешностей, присущих маятниковому методу, но при этом не исключается влияние системы призма—подушка.

Исчерпывающее решение проблемы исключения влияния системы призма—подушка, а также исключения влияния всех других источников систематических погрешностей при абсолютном определении ускорения силы тяжести, возможно путем применения, предложенного автором в 1948 г., дифференциального физического маятника с одной опорной призмой, качающегося на одной и той же опорной подушке.

С этой точки зрения такой маятник представляет большой теоретический и практический интерес.

1. Теория маятника с одной системой призма—подушка

Всякий физический маятник можно рассматривать как тело, состоящее из n отдельных частей, массы которых соответственно равны $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, расстояния от этих масс до оси вращения маятника— $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$.

Если в маятнике все массы, кроме одной, например массы m_n , закреплены и жестко скреплены в одно целое, а масса m_n может передвигаться относительно оси вращения маятника, то тогда имеет место теорема, на основании которой можно осуществить дифференциальный физический маятник с одной системой призма—подушка.

Теорема о приведенной длине L маятника. Если L_1 есть приведенная длина маятника, когда подвижная масса m_n находится на расстоянии z_1 от оси вращения, то можно всегда указать такое второе положение подвижной массы m_n на расстоянии z_2 от оси вращения, что приведенная длина маятника L_1 не изменится и будет равна сумме расстояний z_1 и z_2 , т. е.

$$L_1 = z_1 + z_2.$$

Из теории физического маятника для приведенной длины L имеем выражение [2]:

$$L = \frac{I}{MH}, \quad (1)$$

где

I — момент инерции физического маятника относительно оси вращения;

M — масса маятника;

H — расстояние от центра тяжести маятника до оси вращения.

Для маятника, состоящего из n отдельных масс, момент инерции I и величина MH относительно оси вращения соответственно будут:

$$\left. \begin{aligned} I &= I_1^0 + m_1 h_1^2 + I_2^0 + m_2 h_2^2 + \dots + I_n^0 + m_n h_n^2; \\ MH &= m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 + \dots + m_n h_n, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $I_1^0, I_2^0, I_3^0, \dots, I_n^0$ — моменты инерции соответствующих масс относительно осей, проходящих через центры тяжести этих масс, параллельно оси вращения маятника.

Если в маятнике все массы закреплены, кроме массы m_n , которая может перемещаться, то равенства (2) можно записать в следующем виде:

$$I = A + m_n h_n^2 \quad (3)$$

$$MH = B + m_n h_n,$$

где

A и B — постоянные величины, равные

$$\left. \begin{aligned} A &= I_1^0 + m_1 h_1^2 + I_2^0 + m_2 h_2^2 + \dots + I_{n-1}^0 + m_{n-1} h_{n-1}^2; \\ B &= m_1 h_1 + m_2 h_2 + \dots + m_{n-1} h_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Для удобства обозначим $h_n = z$; $m_n = m$.

Приведенная длина L маятника, согласно равенствам (1), (2), (3), будет:

$$L = \frac{A + mz^2}{B + mz}. \quad (5)$$

При

$$z=0, L=\frac{A}{B}=l. \quad (6)$$

Если масса m находится на расстоянии z_1 от оси вращения, то приведенная длина маятника будет:

$$L_1 = \frac{A + mz_1^2}{B + mz_1} \quad (7)$$

или

$$z_1^2 - L_1 z_1 + \frac{A - BL_1}{m} = 0. \quad (8)$$

Квадратное уравнение (8) имеет z_1 своим корнем, следовательно, существует второй вещественный корень уравнения (8) z_2 ; его вещественность следует из вещественности z_1 , причем z_2 , являясь корнем квадратного уравнения (8), удовлетворяет уравнению (7). Отсюда заключаем, что положению массы m на расстоянии z_2 от оси вращения соответствует приведенная длина L_1 , как и в случае расположения массы m на расстоянии z_1 от оси вращения.

На основании свойств квадратного уравнения следует:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= z_1 + z_2; \\ z_1 z_2 &= \frac{A - BL_1}{m} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

откуда

$$L_1 = \frac{A}{B} - \frac{m}{B} z_1 z_2 = l - \frac{m}{B} z_1 z_2. \quad (10)$$

В маятнике можно указать пару таких точек, при совмещении с которыми центра тяжести подвижной массы m , приведенная длина маятника не меняется. Такие точки назовем взаимными.

Из уравнения (10) следует:

а) если $z_1 > 0$ и $z_2 > 0$, т. е. если взаимные точки для подвижной массы m расположены по одну сторону от оси вращения маятника (в данном случае ниже оси вращения), то имеет место следующее неравенство:

$$L < l = \frac{A}{B};$$

б) если $z_1 > 0$, а $z_2 < 0$ или $z_1 < 0$, а $z_2 > 0$, т. е. одна из взаимных точек расположена выше оси вращения маятника, то получим следующее неравенство:

$$L > l = \frac{A}{B}.$$

Для выбранного маятника величины A и B являются постоянными. Следствия теоремы:

1) Если $z_1 = l$, то $z_2 = 0$ и $L_1 = l = \frac{A}{B}$.

Действительно, второй корень z_2 уравнения (8) определяется из равенства:

$$z_2 = \frac{L_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{L_1}{2}\right)^2 - \frac{A - BL_1}{m}}. \quad (11)$$

Легко показать, что при $z_1 = l$ выражение $\frac{A - BL_1}{m}$ будет равно нулю и мы получим, согласно равенству (11), что $z_2 = 0$ и, следовательно,

$$L_1 = z_1 + z_2 = l + 0 = l.$$

2) Если $z_1 > l$, то $z_2 < 0$, т. е. вторая взаимная точка будет выше оси вращения маятника.

При $z_1 > l$ будем иметь:

$$\frac{A - BL_1}{m} < 0$$

и для второго корня уравнения (8), определяемого равенством (11), будет справедливо неравенство

$$z_2 < 0.$$

3) Если $z_1 = 0$, то $z_2 = l$, что следует из равенств (7) и (9).

Кривые приведенных длин маятника, как функции расстояния центра тяжести подвижной массы m до оси вращения, для различных значений A и B изображены на рис. 1.

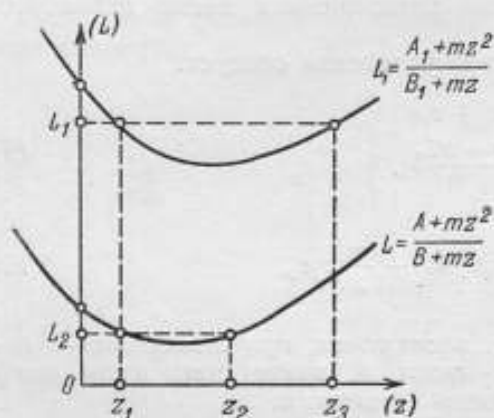


Рис. 1.

Минимум кривой

$$L = f(z) = \frac{A + mz^2}{B + mz}$$

будет при z_1

$$z_1 = \frac{\sqrt{Am + B^2} - B}{m} \quad (12)$$

Минимальное значение приведенной длины L , согласно равенствам (5) и (12), будет:

$$L_{\min} = \frac{2}{m} (\sqrt{Am + B^2} - B) \quad (13)$$

На основании равенств (9), (12), (13) следует, что при L_{\min} будем иметь:

$$z_1 = z_2 = \frac{\sqrt{Am + B^2} - B}{m}.$$

При L_{\min} положение центра тяжести подвижной массы m не может быть точно определено, так как из условия $\frac{dL}{dz} = 0$ следует, что небольшие измерения z не меняют приведенную длину L .

Согласно равенствам (9) и (10) имеем:

$$z_1 + z_2 = l - \frac{m}{B} z_1 \cdot z_2. \quad (14)$$

Задавшись расстоянием z_1 , из равенства (14) можно определить расстояние до взаимной точки z_2 ; оно будет равно

$$z_2 = \frac{l - z_1}{1 + \frac{m}{B} z_1} = \frac{\frac{A}{B} - z_1}{1 + \frac{m}{B} z_1} = \frac{A - Bz_1}{B + mz_1}. \quad (15)$$

Согласно равенствам (9) и (15) имеем:

$$L_1 = z_1 + z_2 = z_1 + \frac{A - Bz_1}{B + mz_1}. \quad (16)$$

2. Осуществление дифференциального маятника с одной системой призма—подушка

Для физического маятника с одной подвижной массой m при ее передвижении A и B являются постоянными.

Рассмотрим два случая:

1. Пусть центр подвижной массы m расположен на расстоянии z_1 от оси вращения маятника.

Расстояние z_2 до взаимной точки определяется равенством (15).

На основании теоремы и равенства (15) имеем:

$$L_1 = z_1 + z_2 = z_1 + \frac{A - Bz_1}{B + mz_1}. \quad (17)$$

2. Поместим центр подвижной массы m , как в первом случае, на расстоянии z_1 от оси вращения, изменив предварительно для данного маятника его параметры A и B .

Чтобы изменить A и B [как следует из равенств (4)], при постоянстве масс в маятнике, достаточно изменить положение одной из масс $m_1, m_2, m_3, \dots, m_{n-1}$, например, изменить расстояние от центра тяжести до оси вращения $(n-1)$ -й массы, т. е. изменить расстояние h_{n-1} .

Изменив в маятнике положение $(n-1)$ -й массы, для A и B получим новые значения A_1 и B_1 , а следовательно, новый маятник с приведенной длиной L_2 , определяемой равенством:

$$L_2 = \frac{A_1 + mz_1^2}{B_1 + mz_1}. \quad (18)$$

Отсюда

$$z_1^2 - L_2 z_1 + \frac{A_1 - B_1 L_2}{m} = 0. \quad (19)$$

Квадратное уравнение (19) имеет второй корень z_3 ; причем z_3 , являясь корнем квадратного уравнения (19), удовлетворяет уравнению (18).

На основании теоремы получим:

$$L_2 = z_1 + z_3. \quad (20)$$

Согласно равенству (15), расстояние z_3 до второй взаимной точки будет:

$$z_3 = \frac{A_1 - B_1 z_1}{B_1 + mz_1}.$$

Равенство (20) можно записать в следующем виде:

$$L_2 = z_1 + z_3 = z_1 + \frac{A_1 - B_1 z_1}{B_1 + mz_1}. \quad (21)$$

Из равенств (17) и (21) получим:

$$L_1 - L_2 = z_2 - z_3 = \frac{A - Bz_1}{B + mz_1} - \frac{A_1 - B_1 z_1}{B_1 + mz_1}. \quad (22)$$

Чтобы определить разность приведенных длин $L_1 - L_2$, как следует из равенства (22), нужно определить расстояние $(z_2 - z_3)$ между двумя положениями центра тяжести подвижной массы m .

Если подвижная масса m при передвижениях ставится одной и той же стороной на опорные плоскости, предназначенные для нее, то неопределенность положения центра тяжести массы m исключается, так как расстояние $z_2 - z_3$ будет равно расстоянию между двумя опорными плоскостями.

Поскольку

$$L_1 - L_2 = z_2 - z_3,$$

то неопределенность оси вращения маятника исключается полностью.

Разность приведенных длин $\lambda = L_1 - L_2$ зависит как от величин A, B, A_1, B_1 , характеризующих маятник, так и от выбранного расстояния z_1 .

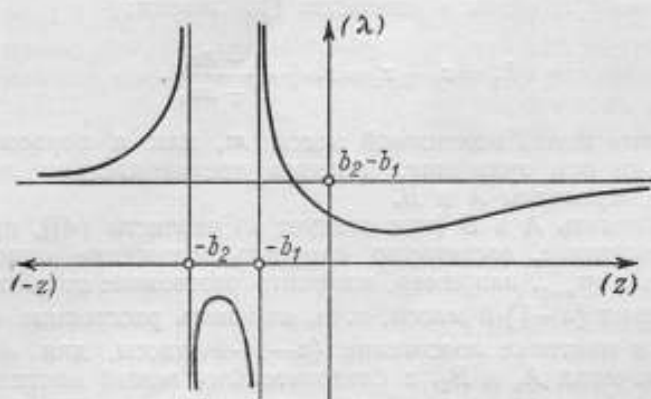


Рис. 2.

A_1, B_1, A и B есть постоянные величины для каждого маятника, поэтому для данного маятника λ будет зависеть от выбранного расстояния z_1 .

Из равенства (22) имеем:

$$\lambda = \frac{a_1 - b_1 z_1}{b_1 + z_1} - \frac{a_2 - b_2 z_1}{b_2 + z_1},$$

где

$$a_1 = \frac{A}{m}; \quad b_1 = \frac{B}{m}; \quad a_2 = \frac{A_1}{m}; \quad b_2 = \frac{B_1}{m}.$$

Кривая разности приведенных длин $L_1 - L_2$ как функция расстояния z_1 дана на рис. 2. Как видно из графика функции, для всех значений z_1 в промежутке $(-b_1, -b_2)$ имеет место неравенство $L_1 - L_2 < 0$ или $L_2 > L_1$.

Для каждого значения λ соответствуют два значения z_1 , определяющие одну и ту же разность приведенных длин $L_1 - L_2$. В реальных условиях выбор расстояния z_1 ограничивается общим размером маятника.

3. Выражение ускорения силы тяжести g в измеряемых величинах

Как известно, период колебания физического маятника определяется равенством:

$$T = \pi \sqrt{\frac{I}{Mhg}}. \quad (23)$$

Для периодов колебания маятника при двух последовательных положениях центра тяжести подвижной массы m во взаимных точках, определяемых расстояниями z_1 и z_2 от оси вращения маятника, будем иметь:

$$\frac{gT_1^2}{\pi^2} = \frac{I_1}{MH_1}; \quad \frac{gT_2^2}{\pi^2} = \frac{I_2}{MH_2}, \quad (24)$$

где

H_1 — расстояние от центра тяжести маятника до оси вращения, когда подвижная масса m расположена на расстоянии z_1 от оси вращения;

H_2 — расстояние от центра тяжести маятника до оси вращения, когда подвижная масса m расположена на расстоянии z_2 от оси вращения.

Если бы центр тяжести подвижной массы m в обоих случаях точно совпадал со взаимными точками, то приведенная длина маятника в обоих случаях была бы одна и та же и периоды колебания T_1 и T_2 были бы равны, что в действительности никогда не бывает.

Для практического осуществления равенства периодов колебаний маятника при двух последовательных положениях подвижной массы m в маятнике должен быть подвешенный груз, посредством которого можно добиться, чтобы приближенно выбранные точки были взаимными.

Из равенств (24) получим:

$$\frac{M(T_1^2 H_1 - T_2^2 H_2)}{I_1 - I_2} = \frac{MH_2 T_2^2}{I_2} = \frac{\pi^2}{g}.$$

Отсюда

$$g = \pi^2 \frac{I_1 - I_2}{(T_1^2 H_1 - T_2^2 H_2)}.$$

Так как

$$I_1 = A + mz_1^2 \text{ и } I_2 = A + mz_2^2,$$

то последнее равенство примет вид:

$$g = \pi^2 \frac{m(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)}{M(T_1^2 H_1 - T_2^2 H_2)}. \quad (25)$$

Введем следующие обозначения:

\bar{m} — масса маятника без подвижной массы m ;

$M = \bar{m} + m$ — общая масса маятника;

x — расстояние от центра тяжести массы \bar{m} до оси вращения.

Из равенства нулю суммы статических моментов относительно центра тяжести получим:

$$H_1 = \frac{\bar{m}x + mz_1}{M}. \quad (26)$$

Для второго положения подвижной массы m на расстоянии z_2 от оси вращения будем иметь, аналогично первому случаю, равенство:

$$H_2 = \frac{\bar{m}x + mz_2}{M}. \quad (27)$$

Вычитая из равенства (26) равенство (27), получим:

$$H_1 - H_2 = \frac{m}{M}(z_1 - z_2). \quad (28)$$

Подставляя выражение (28) в равенство (25), получим:

$$g = \pi^2 \frac{(H_1 - H_2)(z_1 + z_2)}{(T_1^2 H_1 - T_2^2 H_2)}. \quad (29)$$

Обозначим:

$$T_{12}^2 = \frac{T_1^2 H_1 - T_2^2 H_2}{H_1 - H_2},$$

тогда формула (29) примет вид:

$$g = \pi^2 \frac{z_1 + z_2}{T_{12}^2} = \pi^2 \frac{L_1}{T_{12}^2}. \quad (30)$$

После изменения постоянных A и B на A_1 и B_1 , путем передвижения $(n-1)$ -й массы для точки, расположенной на расстоянии z_1 от оси вращения, соответствующая взаимная точка положения центра тяжести подвижной массы m будет на расстоянии z_2 от оси вращения.

Для данной пары взаимных точек, расположенных на расстояниях z_1 и z_2 от оси вращения маятника, можно написать, аналогично вышеизложенному, уравнение:

$$g = \pi^2 \frac{z_1 + z_2}{T_{34}^2} = \pi^2 \frac{L_2}{T_{34}^2}, \quad (31)$$

где

$$T_{34}^2 = \frac{T_3^2 H_3 - T_4^2 H_4}{H_3 - H_4} \quad \text{и} \quad L_2 = z_1 + z_2;$$

T_3 — период колебания маятника, когда центр тяжести подвижной массы m расположен на расстоянии z_1 от оси вращения;

T_4 — период колебания маятника, когда центр тяжести подвижной массы m расположен на расстоянии z_2 от оси вращения;

H_3, H_4 — расстояния от центра тяжести маятника до оси вращения, когда центр тяжести подвижной массы m расположен соответственно на расстояниях z_1 и z_2 от оси вращения.

Из равенств (30), (31) получим:

$$g = \pi^2 \frac{L_1 - L_2}{T_{12}^2 - T_{34}^2} = \pi^2 \frac{z_2 - z_1}{T_{12}^2 - T_{34}^2}. \quad (32)$$

Для определения ускорения силы тяжести g по формуле (32) необходимо измерить расстояние между двумя положениями центра тяжести подвижной массы m и определить периоды колебания маятника T_1, T_2, T_3, T_4 .

4. Конструкция дифференциального физического маятника с одной системой призма — подушка и методика наблюдения

На рис. 3. показаны четыре последовательных состояния одного и того же маятника, для которых определяются периоды колебания T_1, T_2, T_3, T_4 .

Как видно из рис. 3, маятник неизменно качается на одной и той же призме, опирающейся на одно и то же место опорной подушки во всех четырех положениях.

Маятник состоит из следующих частей: 1 — стержень маятника; 2 — подвижная масса m ; 3 — подгоночный груз для уравнивания попарно периодов колебания (T_1, T_2) и (T_3, T_4) ; 4 — призма, жестко скрепленная со стержнем маятника; 5 — опорная подушка под призмой; 6 — передвижной груз для изменения приведенной длины маятника с L_1 на L_2 .

Маятник имеет четыре окна; в верхнем окне закреплена призма, а в трех других окнах последовательно помещается подвижная масса m при определении периодов колебания T_1, T_2, T_3, T_4 .

В основании трех окон закреплены плоскопараллельные подушки, установленные параллельно между собою. На эти подушки ставится одной и той же стороной подвижная масса m .

В состоянии *I* (рис. 3) подвижная масса m находится в верхнем окне; расстояние от ее центра тяжести до оси вращения маятника — z_1 . В этом положении определяется период колебания T_1 .

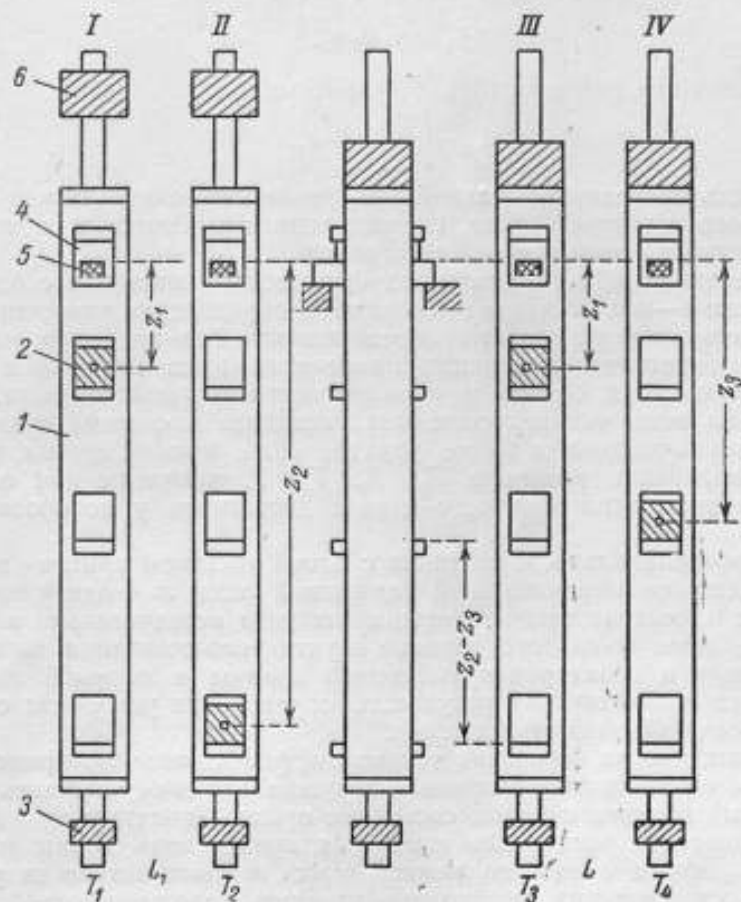


Рис. 5

В состоянии *II* подвижная масса m находится во втором окне; расстояние от ее центра тяжести до оси вращения маятника z_2 ; при этом наблюдается период колебания T_2 .

При последовательном качании маятника в состояниях *I* и *II*, посредством передвижения подгоночного груза 3, добиваемся требуемого равенства периодов колебания T_1 и T_2 . Для состояний маятника *I* и *II* на основании теоремы имеем:

$$L_1 = z_1 + z_2. \quad (33)$$

В состояниях *III* и *IV* изображен тот же самый маятник, у которого для изменения приведенной длины с L_1 на L_2 передвижной груз b перемещен в новое положение.

В состоянии III подвижная масса m в верхнем окне; расстояние от ее центра тяжести до оси вращения z_1 .

При качании маятника в состоянии III определяем период колебания T_3 .

В состоянии IV подвижная масса m находится в третьем окне; расстояние от ее центра тяжести до оси вращения маятника — z_2 . В этом случае определяем период колебания T_4 .

При последовательном качании маятника в состоянии III и IV, посредством передвижения подгоночного груза Z , добиваемся равенства периодов колебания маятника T_3 и T_4 . Для состояний маятника III и IV на основании теоремы имеем:

$$L_2 = z_1 + z_2. \quad (34)$$

На основании равенств (33), (34) имеем:

$$L_1 - L_2 = z_2 - z_1.$$

Разность приведенных длин $L_1 - L_2$ равна расстоянию между подушками второго и третьего окна, так как подвижная масса m помещается на эти подушки одной и той же стороной.

Применение дифференциального физического маятника с одной системой призма—подушка для абсолютного определения ускорения силы тяжести полностью устраняет неопределенность оси вращения маятника.

Во всех четырех состояниях маятник качается на одной и той же призме, касающейся одного и того же места опорной подушки, следовательно, во всех четырех состояниях маятника в системе призма—подушка возникают одни и те же упругие силы и силы трения, поэтому периоды колебания маятника T_1, T_2, T_3, T_4 уравниваются при одном и том же влиянии этих сил, чего нельзя достигнуть у поворотного маятника.

У дифференциального маятника с одной системой призма—подушка при перемещении незначительной подвижной массы m с одной площадки на другую изменение изгиба стержня маятника незначительно и им можно пренебречь. Кроме того, влияние неучтенного сокачания, зависящего от материала и геометрии применяемой призмы и опорной подушки, исключается полностью из результата определения ускорения силы тяжести с помощью данного маятника.

Заметим, что на основании теории дифференциального физического маятника с одной системой призма—подушка можно осуществить дифференциальный маятник с двумя системами призма—подушка.

Как показано выше, для изменения приведенной длины маятника с L_1 на L_2 , когда в нем подвижная масса m расположена на расстоянии z_1 от оси вращения, необходимо изменить положение одной из масс маятника относительно оси вращения. Однако это можно выполнить другим путем, а именно, перевесить маятник на другую систему призма—подушка, расположенную в другом месте маятника, тогда постоянные A и B примут новые значения A_1, B_1 . Это даст новую приведенную длину маятника.

5. Точность определения ускорения силы тяжести дифференциальным физическим маятником с одной системой призма—подушка

При практическом использовании формулы (32) для абсолютного определения ускорения силы тяжести необходимо из наблюдений определить значение периодов колебания T_1, T_2, T_3, T_4 и измерить разность приведенных длин $L_1 - L_2$, равную расстоянию между двумя опорными подушками, на которые кладется подвижная масса m . Для определения

разности приведенных длин маятника необходимо измерить только одну величину $z_2 - z_3$.

Обозначим $z_2 - z_3 = x$, тогда формула (32) примет вид:

$$g = \pi^2 \frac{x}{T_{12}^2 - T_{34}^2}. \quad (35)$$

Вероятная погрешность ξ_g определения ускорения силы тяжести, согласно равенству (35), будет:

$$\xi_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 \xi_x^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T_{12}}\right)^2 \xi_{T_{12}}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T_{34}}\right)^2 \xi_{T_{34}}^2}. \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\pi^2}{T_{12}^2 - T_{34}^2}; \\ \frac{\partial g}{\partial T_{12}} &= \frac{-2\pi^2 x T_{12}}{(T_{12}^2 - T_{34}^2)^2}; \\ \frac{\partial g}{\partial T_{34}} &= \frac{+2\pi^2 x T_{34}}{(T_{12}^2 - T_{34}^2)^2}; \end{aligned} \quad (37)$$

ξ_x — вероятная погрешность измерения x ;
 $\xi_{T_{12}}, \xi_{T_{34}}$ — вероятные погрешности определения периодов колебания T_{12} и T_{34} .

Из равенства (36), полагая

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \xi_x = \left(\frac{\partial g}{\partial T_{12}}\right) \xi_{T_{12}} = \left(\frac{\partial g}{\partial T_{34}}\right) \xi_{T_{34}},$$

получим

$$\xi_x = \frac{\xi_g}{\sqrt{3} \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)}; \quad \xi_{T_{12}} = \frac{\xi_g}{\sqrt{3} \left(\frac{\partial g}{\partial T_{12}}\right)}; \quad \xi_{T_{34}} = \frac{\xi_g}{\sqrt{3} \left(\frac{\partial g}{\partial T_{34}}\right)}. \quad (38)$$

Задаваясь вероятной погрешностью ξ_g , по равенствам (37), найдем соответствующие вероятные погрешности измерения длины и периодов колебания маятников.

Найдем эти погрешности для случая определения g с вероятной погрешностью $\xi_g = \pm 3 \cdot 10^{-3}$ см/сек² дифференциальным маятником, у которого

$$x = L_1 - L_2 = 18 \text{ см}; \quad T_{12} \approx 0,91 \text{ сек.}; \quad T_{34} \approx 0,82 \text{ сек.}$$

Согласно равенствам (37), (38) получим:

$$\xi_x = \pm 0,3 \text{ мк}, \quad \xi_{T_{12}} \approx \pm 5,2 \cdot 10^{-7} \text{ сек.}, \quad \xi_{T_{34}} \approx \pm 5,7 \cdot 10^{-7} \text{ сек.}$$

Формула (32) выведена в предположении, что при перемещении подвижной массы m относительно оси вращения маятника ее центр тяжести остается все время на одной вертикальной линии.

В реальных условиях эксперимента, при всей тщательности его выполнения, центр тяжести подвижной массы m отклонится от вертикали, что вызовет изменение момента инерций подвижной массы m относительно оси вращения маятника, а следовательно, изменение периода колебания T .

Задаваясь возможным изменением периода колебания T в пределах допустимой погрешности его определения $\Delta T = \pm 5 \cdot 10^{-7}$ сек., найдем

допустимые предельные отклонения Δy — центра тяжести подвижной массы m от вертикали.

При положении подвижной массы m на расстоянии z от оси вращения период колебания T , согласно равенству (5), будет:

$$T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{A + mz^2}{A + mz}}. \quad (39)$$

Дифференцируя равенство (39) по z , получим:

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\pi}{2\sqrt{gL}} Q(z),$$

где

$$Q(z) = \frac{2Bmz + m^2z^2 - Am}{(B + mz)^2}. \quad (40)$$

В качестве примера рассмотрим маятник, у которого:

$$\begin{aligned} A &= 2756061 \text{ г}\cdot\text{см}^2 & A_1 &= 2\cdot581\cdot385 \text{ г}\cdot\text{см}^2 \\ A &= 30\cdot199 \text{ г}\cdot\text{см} & B_1 &= 36\cdot328 \text{ г}\cdot\text{см} \\ L &= 84 \text{ см} & L_2 &= 66 \text{ см} \\ z_1 &= 17 \text{ см} & z_1 &= 17 \text{ см} \\ z_2 &= 67 \text{ см} & z_2 &= 49 \text{ см} \\ m &= 210 \text{ г} \end{aligned}$$

Для первого состояния маятника (см. стр. 13) имеем:

$$\left. \frac{dT_1}{dz} \right|_{z=17} = -0,00168. \quad (41)$$

Из равенства (41) найдем допустимое изменение расстояния z_1 от центра тяжести подвижной массы m до оси вращения, при котором изменение периода T_1 не превосходит допустимой погрешности $\Delta T_1 = \pm 5 \cdot 10^{-7}$ сек.

$$\Delta z = \frac{\pm 5 \cdot 10^{-7}}{-168 \cdot 10^{-6}} \approx \pm 3 \text{ мк}. \quad (42)$$

Если изменение расстояния z_1 на величину Δz обусловлено только горизонтальным смещением центра тяжести подвижной массы m от вертикали на величину Δy , то допустимая величина этого смещения будет равна:

$$\Delta y = \sqrt{(z + \Delta z)^2 - z^2} \approx \sqrt{2z \Delta z}. \quad (43)$$

Согласно равенствам (42), (43), получим:

$$\Delta y = \sqrt{2 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} \approx 0,1 \text{ см}.$$

При $z = z_2 = 67 \text{ см}$, равенство (39) будет:

$$\left. \frac{dT_2}{dz} \right|_{z=67} = 0,00131, \quad (44)$$

Из равенства (44), при $\Delta T_2 = \pm 5 \cdot 10^{-7}$ сек., получим:

$$\Delta z = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{131 \cdot 10^{-5}} \approx 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ см}. \quad (45)$$

Допустимая величина горизонтального смещения центра тяжести подвижной массы m от вертикали при $z=67$ см, согласно равенствам (43), (45), будет;

$$\Delta y = \sqrt{2 \cdot 67 \cdot 3,8 \cdot 10^{-4}} \approx 0,22 \text{ см.}$$

Установка на одно и то же место подвижной массы m на опорных подушках для нее с точностью от одного до двух миллиметров не представляет затруднений.

Следует заметить, что при соответствующем выборе параметров маятника A , B , m , можно достигнуть большего допуска на отклонение центра тяжести подвижной массы m от вертикали.

Поэтому определение ускорения силы тяжести g с данным маятником с погрешностью $\pm 3 \cdot 10^{-3}$ см·сек⁻² не представит практических затруднений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агалецкий П. И., Способ обнаружения и исключения систематических погрешностей при определении абсолютного значения ускорения силы тяжести с помощью маятниковой аппаратуры, Труды ВНИИМ, вып. 11 (71) Машгиз, 1950.
2. Сорокин Л. В., Гравиметрия и гравиметрическая разведка, Гостоптехиздат 1951.

ВЛИЯНИЕ ПРИЗМЫ И „ПОДУШКИ“ ПРИ АБСОЛЮТНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ УСКОРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ С ПОМОЩЬЮ МАЯТНИКОВ

При рассмотрении влияния системы призма—подушка на период колебания маятника недостаточно иметь в виду влияние только одного радиуса кривизны призмы. Как известно, если радиус кривизны призмы остается неизменным в процессе определения периодов колебания поворотного маятника, то его влияние исключается из результата определения ускорения силы тяжести.

В реальных условиях ребро призмы, как бы хорошо ни было обработано, не представляет правильную поверхность цилиндра. Оно имеет множество зубчиков, иногда сливающихся на отдельных участках в сплошную линию, поэтому соприкосновение призмы с опорной подушкой происходит в отдельных физических точках или по отдельным площадкам, ширина которых во много раз меньше радиуса кривизны призмы. Вследствие этого, несмотря на сравнительно небольшой вес маятника, лезвие призмы испытывает огромную удельную нагрузку, что вызывает упругие деформации как лезвия призмы, так и опорной подушки.

Обращая на это внимание, Д. И. Менделеев писал: „Нож при колебаниях изгибается, подушка же вместо плоской становится от надавливания вогнутой; оба тела зыблются при качаниях“. Вполне реально, что при малых углах колебания происходит не перекатывание призмы, а только упругие деформации призмы и опорной подушки в точках соприкосновения.

Упругие силы, возникающие в системе призма—подушка, при несовпадении их равнодействующей с мгновенной осью вращения маятника, создают дополнительный момент к восстанавливающему моменту силы тяжести.

Восстанавливающий момент упругих сил вызывает вращение, противоположное вращению призмы. Упругие силы стремятся восстановить равновесие. При наличии упругих деформаций ось вращения маятника не проходит через поверхность опорной подушки и не совпадает с ребром призмы.

Величина деформации призмы и опорной подушки зависит от величины нагрузки, от радиуса кривизны призмы, от физико-химической и механической неоднородности призмы и опорной подушки, от качества механической обработки их поверхностей и целого ряда других причин. Поэтому, естественно, в различных системах призма—подушка будут возникать различные упругие силы.

Обычный поворотный маятник имеет две различные системы „нож—опора“, а потому величина и характер упругих деформаций в них будут различными. Отсюда следует вывод, что период колебания поворотного маятника T , определяемый через периоды колебания маятника в прямом и перевернутом положении, кроме всех прочих ошибок, будет содер-

жать ошибку вызываемую различием упругих сил в системе призма — подушка. Вследствие различия упругих сил при колебании маятника в прямом и перевернутом положении, мы можем наблюдать равенство периодов, когда его нет в действительности.

Обычно влияние упругих сил в системе призма—подушка не учитывалось при составлении дифференциального уравнения движения маятника; впервые влияние упругих сил было учтено Коробочкиным [1] при составлении дифференциального уравнения колебаний весовых приборов. При этом им предполагалось, что момент упругих сил является функцией от реакции опоры и угла поворота призмы по отношению к опорной подушке и зависит от материала призмы и подушки, их геометрической поверхности, качества термической и механической обработки и целого ряда других причин. Согласно выводам Коробочкина, дифференциальное уравнение движения физического маятника будет:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g(H + \rho + K)}{i^2 + H^2} \varphi = 0, \quad (1)$$

где

- φ — угол отклонения маятника;
- ρ — радиус кривизны призмы;
- i — радиус инерции относительно прямой, проходящей через центр тяжести параллельно оси вращения;
- K — коэффициент упругости, имеющий размерность длины;
- H — расстояние от центра тяжести маятника до оси вращения;
- g — ускорения силы тяжести.

Согласно решению дифференциального уравнения (1), период колебания маятника T будет определяться равенством:

$$T = \pi \sqrt{\frac{i^2 + H^2}{g(H + \rho + K)}} = \pi \sqrt{\frac{i^2 + H^2}{gH}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta H}{H}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \frac{\Delta H}{H}}}, \quad (2)$$

где

$$\Delta H = \rho + K;$$

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{i^2 + H^2}{gH}}.$$

T_0 — период колебания маятника, свободный от влияния радиуса кривизны призмы и упругих сил в системе призма—подушка.

Для маятника $H \gg \Delta H$, поэтому отношение $\frac{\Delta H}{H}$ есть малая величина; пренебрегая членами с квадратом этой величины из равенства (2) получим:

$$T = T_0 \left(1 - \frac{\Delta H}{2H}\right) \quad (2a)$$

$$\frac{gT^2 H}{\pi^2} = (i^2 + H^2) \left(1 - \frac{\Delta H}{H}\right). \quad (3)$$

Согласно выражению (3) для периодов колебания поворотного маятника T_1 и T_2 , будем иметь следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{gT_1^2 H_1}{\pi^2} (i^2 + H_1^2) \left(1 - \frac{\Delta H_1}{H_1}\right); \\ \frac{gT_2^2 H_2}{\pi^2} (i^2 + H_2^2) \left(1 - \frac{\Delta H_2}{H_2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$\Delta H_1 = \rho_1 + K_1; \quad \Delta H_2 = \rho_2 + K_2.$$

Из равенств (4), учитывая, что для поворотного маятника $i^2 = H_1 H_2$, легко получить следующее выражение:

$$\frac{g}{\pi^2} (T_1^2 H_1 - T_2^2 H_2) = H_1^2 - H_2^2 - (H_1 + H_2) (\Delta H_1 - \Delta H_2).$$

Отсюда

$$\frac{g T^2}{\pi^2} = (H_1 + H_2) \left(1 - \frac{\Delta H_1 - \Delta H_2}{H_1 - H_2} \right) = L \left(1 - \frac{\Delta H_1 - \Delta H_2}{H_1 - H_2} \right), \quad (5)$$

где

$$T^2 = \frac{T_1^2 H_1 - T_2^2 H_2}{H_1 - H_2}; \quad L = H_1 + H_2.$$

Из равенства (5) получим:

$$g = \pi^2 \frac{L \left(1 - \frac{\Delta H_1 - \Delta H_2}{H_1 - H_2} \right)}{T^2} = \pi^2 \frac{L \left(1 - \frac{(\rho_1 - \rho_2) + (K_1 - K_2)}{H_1 - H_2} \right)}{T^2}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что влияние кривизны поверхности лезвия призмы и влияние упругих сил в системе призма—подушка исключается только в том случае, если радиус кривизны ρ и коэффициент упругости K остаются неизменными при колебании поворотного маятника в прямом и перевернутом положении.

Из практики известно, что радиус кривизны лезвия обкатанной призмы при наблюдениях меняется весьма медленно.

Рассмотрим в качестве примера какое влияние может оказать непостоянство коэффициента упругости K в системе призма—подушка на результат определения ускорения силы тяжести с маятником, у которого приведенная длина $L = 50$ см и $H_1 - H_2 = 27$ см. Допустим, что при перевешивании маятника из прямого положения (период T_1) в перевернутое положение (период T_2) коэффициент упругости в системе призма—подушка изменился на 1 мк, т. е. $K_1 - K_2 = 1$ мк.

Тогда погрешность Δg при определении ускорения силы тяжести, согласно равенству (6) при $\rho_1 - \rho_2 = 0$, будет:

$$\Delta g = g \frac{K_1 - K_2}{H_1 - H_2} = 981 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-4}}{27} \approx 0,004 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}.$$

Непостоянство коэффициента упругости K в системе призма—подушка у поворотного маятника при определении периодов колебания (в прямом и перевернутом положении) может оказать главное влияние на возможную точность определения ускорения силы тяжести.

Взяв дифференциал от равенства (2а), получим:

$$dT = -T_0 \frac{d(\Delta H)}{2H} = -T_0 \frac{d\rho + dK}{2H}.$$

Отсюда

$$dK = -2H \cdot \frac{dT}{T_0} - d\rho. \quad (7)$$

Зная $d\rho$ и dT , по формуле (7) можно определить изменение коэффициента упругости K в зависимости от изменения радиуса кривизны призмы.

Для иллюстраций приведем данные об абсолютном определении ускорения силы тяжести в Теддингтоне [3] (табл. 1, табл. XV).

При подсчете ΔK взяты расстояния от центра тяжести маятника до опорных плоскостей $H_1 = 73,93$ см (период T_1 , груз вниз); $H_2 = 26,05$ см (период T_2 , груз вверх).

Таблица 1

№ пп.	ρ	T_2	$\Delta \rho$	ΔK	T_1	$\Delta \rho$	ΔK	Материал призмы
1	11	1,0028784	—	—	1,0028875	—	—	Закаленная сталь
2	77,5	7387	66,5	+ 6,1	8361	66,5	+ 9,3	
3	173,0	5668	162,0	— 0,1	7744	162,0	+ 4,8	
4	282,0	3815	271,0	— 12,9	7057	271	— 2,9	
5	—	—	—	—	1,0028447	—	—	Пушечный металл
6	—	1,0027550	—	—	8280	11	+ 13,6	
7	—	6780	27	+ 13,0	—	—	—	

Сопоставление в табл. 1 подсчитанных приращений ΔK не дает возможности судить о характере изменения коэффициента упругости K в зависимости от износа призмы. Однако следует отметить, что с износом призмы изменение коэффициента упругости может быть больше, чем изменение радиуса кривизны призмы. Так, например, для призмы из пушечного металла при изменении радиуса кривизны призмы на 11 мк, коэффициент упругости изменился на 13,6 мк.

Однако изменение коэффициента упругости в системе призма—подушка в большой степени обуславливается качеством опорной подушки под призмой.

Таблица 2

Маятниковые приборы	Номер маятника	Периоды колебания			ΔT		
		до перестановки T_1	после перестановки T_2	после перестановки на другой штатив T_3			
Маятниковый прибор № 62	207	0,4936466	0,4936461		5		
	208	6538	6504		34		
	209	6370	6380		10		
	210	6375	6466		91		
Маятниковый прибор № 64	219	0,4937574	0,4937541	0,4937596	33	22	55
	220	7080	7094	7088	14	8	6
	221	6548	7494	7529	54	19	35
	222	7070	7050	7144	20	74	94
Маятниковый прибор № 68	223	0,4933556	0,4933539	0,4933519	17	37	20
	224	4899	4720	4966	179	67	246
	225	3550	3557	3563	7	13	6
	226	4794	4878	5015	84	221	137
$\Delta T_{cp} = 57 \cdot 10^{-7}$ сек.							

В табл. 2 приведены результаты наблюдений по определению периодов на трех, четырех маятниковых приборах для относительного определения ускорения силы тяжести. Наблюдения были произведены во ВНИИМ В. П. Малышевым и В. И. Старцевым. Эксперимент заключается в том, что определялись периоды колебания маятников после перевешивания их с одной опорной подушки на другую как внутри одного прибора, так и между приборами. У всех трех маятниковых приборов опорные площадки изготовлены из агата, причем агатовые подушки имеют совершенно плоскую полированную поверхность.

Таблица 3

I серия			II серия		
амплитуда колебания в радианах в ед. 10^{-6}	наблюдаемый период колебания $T_{\text{наб}}$ в сек.	ΔH	амплитуда колебания в радианах в ед. 10^{-6}	наблюдаемый период колебания $T_{\text{наб}}$ в сек.	ΔH
17360	5,80218	12,13	16809	5,80725	11,93
16860	210	12,13	16382	703	11,94
16112	166	12,15	15988	675	11,95
14434	5,79832	12,28	11955	394	12,06
9615	712	12,33	11403	381	12,06
9563	664	12,35	9553	238	12,12
8628	618	12,37	9064	164	12,15
6528	411	12,45	6549	5,79928	12,24
6341	5,79396	12,45	6216	900	12,25
—	—	—	5884	579848	12,27
III серия			IV серия		
17214	5,81146	11,76	17879	5,80274	12,10
16320	112	11,77	16840	254	12,12
15904	058	11,80	16424	210	12,13
12245	5,80836	11,88	16008	179	12,14
11403	753	11,92	11590	5,79909	12,25
9536	618	11,97	9563	678	12,33
9345	595	11,98	6143	469	12,42
8659	544	12,00	6019	440	12,44
6164	317	12,09	5821	5,79380	12,46
6029	5,80298	12,10	—	—	—

Как видно из табл. 2, при перевешивании маятника с одних опорных подушек на другие, изменение периодов колебания происходит от $\Delta T = 5 \cdot 10^{-7}$ сек. до $\Delta T = 246 \cdot 10^{-7}$ сек. Среднее значение $\Delta T = 57 \cdot 10^{-7}$ сек. Этому изменению периода согласно формуле (7) соответствует изменение коэффициента упругости $\Delta K = 5,7$ мк (при вычислении ΔK приняты $H = 25$ см и $T_0 \approx 0,5$ сек, $\Delta \rho = 0$).

Изменение периода колебаний маятника при качании его на различных опорных подушках из одного и того же материала является следствием того, что для различных опорных подушек в системе призма—

подушка возникают различные упругие силы. Это особенно заметно у агатовых подушек, вследствие волокнистого строения агата.

С целью проверки изменения коэффициента упругости K в системе призма—подушка маятника в зависимости от качества термомеханической обработки опорной пластины, автором был произведен опыт с коромыслом [2]. Были проведены четыре серии наблюдений, соответствующие трем различным положениям коромысла на одной и той же опорной пластине.

Для проверки воспроизводимости результата коромысло после трех серий наблюдений ставилось в первоначальное положение, соответствующее первой серии наблюдений.

Результаты наблюдений приведены в табл. 3.

Следует отметить, что во всех четырех сериях коромысло качалось на одной и той же призме ($\rho = \text{const}$) и наблюдаемые периоды исправлены за счет влияния амплитуды колебания обычной поправкой.

Значения ΔH вычислялись по формуле:

$$\Delta H = \frac{(T_0^2 - T_{\text{наб.}}^2) H}{T_{\text{наб.}}^2}.$$

Как видно из табл. 3, при перестановке коромысла с участка, соответствующего первой серии наблюдений, на участок второй и третьей серии наблюдений значение коэффициента упругости K в системе нож—опора меняется в первом случае на 0,2 мк, во втором случае на 0,4 мк. При повторении первой серии значение коэффициента упругости K в системе призма—подушка остается неизменным. Отсюда можно сделать следующие выводы:

1. При отсутствии изменения радиуса кривизны призмы за счет износа значение коэффициента упругости K в системе призма—подушка остается неизменным, если призма ложится на одно и то же место опорной подушки.

2. Значение коэффициента упругости K в системе призма—подушка может существенно измениться при перестановке призмы с одного участка опорной подушки на другой участок той же самой подушки.

3. Если коэффициент упругости K может значительно измениться при перестановке призмы с одного участка на другой участок одной и той же опорной подушки, то тем более нет оснований полагать, что у маятника при колебании в прямом и перевернутом положении коэффициент упругости K в системе призма—подушка остается неизменным.

Поэтому основным условием точного определения ускорения силы тяжести с помощью поворотных маятников является постоянство ΔH при колебании маятника в прямом и перевернутом положении. Невыполнение этого условия дает систематическую погрешность в определении ускорения силы тяжести, равную:

$$\Delta g = g \frac{\Delta H_1 - \Delta H_2}{H_1 - H_2}.$$

Неравенство ΔH_1 и ΔH_2 при колебании поворотного маятника в прямом и перевернутом положении является главным фактором, влияющим на точность абсолютного определения ускорения силы тяжести.

4. Как видно из наблюдений, приводимых в табл. 3, значение коэффициента упругости K меняется с изменением амплитуды колебания.

5. К числу поправок, которые необходимо вводить в наблюдаемый период, надо добавить поправку на изменение ΔH с изменением амплитуды колебания.

В практике абсолютных определений ускорения силы тяжести с помощью поворотных маятников периоды колебания в прямом и перевер-

нудом положении наблюдаются не всегда при одних и тех же амплитудах колебания маятника.

Введение обычной поправки в наблюдаемый период для приведения к нулевой амплитуде еще не полностью исправляет наблюдаемые периоды, так как от амплитуды колебания зависит значение ΔH .

Проведенный анализ показал, что зависимость ΔH от амплитуды колебания можно представить уравнением:

$$\Delta H = a + b\varphi + c\varphi^2.$$

Зная вид функции ΔH от амплитуды, можно период T_β , наблюдаемый при амплитуде колебания β , привести к значению при амплитуде колебания α по формуле:

$$T_\alpha = T_\beta + \frac{b(\beta - \alpha) + c(\beta^2 - \alpha^2)}{2H},$$

которая следует из равенства (2а).

Постоянные b , c подлежат экспериментальному определению.

Непостоянство ΔH при колебании поворотного маятника в прямом и перевернутом положении является главным фактором, влияющим на точность абсолютного определения ускорения силы тяжести. Как нами отмечено выше, непостоянство ΔH обуславливается двумя причинами:

1. Различием приемов термомеханической обработки и различным качеством исходных материалов, применяемых для изготовления подушек маятника.

В самых лучших маятниковых приборах для относительных определений ускорения силы тяжести, по исследованиям Ю. Д. Буланже в Геодезическом институте АН СССР, при перевешивании маятников с одной подушки на другую, наблюдалось изменение периодов для некоторых маятников до $1 \cdot 10^{-5}$ сек.

2. Влиянием износа призмы и опорной подушки при наблюдении периодов колебания маятника в прямом и перевернутом положении. Влияние изменения ΔH вследствие износа при переходе от наблюдения периода T_1 к T_2 можно исключить соответствующим методом определения периодов T_1 и T_2 . Если за каждое определение периода величина ΔH изменяется на $\delta(\Delta H)$, то при наблюдении периодов T_1 и T_2 по схеме $T_1 - T_2 - T_1$ будет иметь место следующее изменение величины ΔH :

$$\begin{aligned} T_1 \Delta H + \delta(\Delta H), \\ T_2 \Delta H + 2\delta(\Delta H), \\ T_1 \Delta H + 3\delta(\Delta H). \end{aligned}$$

Среднее значение ΔH при определении периода T_1 равно значению ΔH при определении периода T_2 .

Для исключения систематической ошибки, происходящей от неравенства ΔH вследствие различного качества двух опорных подушек маятника, необходимо сделать перестановку местами опорных подушек, аналогично тому, как это делалось у поворотных маятников с призмами для исключения влияния радиуса кривизны призмы.

Следует отметить, что тот же эффект будет достигнут, если не переставлять подушки, а переместить добавочный груз, закрепленный на одном из концов маятника, на другой конец.

Согласно равенству (5), период T до перестановки опорных подушек будет:

$$T_1^2 = \frac{\pi^2 L}{g} \left(1 - \frac{\Delta H_1 - \Delta H_2}{H_1 - H_2} \right),$$

а после перестановки местами опорных подушек период T будет:

$$T_2^2 = \frac{\pi^2 L}{g} \left(1 - \frac{\Delta H_1 - \Delta H_2}{H_1 - H_2} \right).$$

Из этих равенств получим:

$$g = \pi^2 \frac{L}{T^2},$$

где

$$T^2 = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2}.$$

Однако, после перестановки местами опорных подушек (или перестановки добавочного груза на другой конец маятника) мы не будем уверены, что призма будет соприкасаться с опорными подушками в тех участках, в которых она соприкасалась до перестановки подушек. Поэтому при определении ускорения силы тяжести с помощью поворотных маятников желательно иметь большую группу пар поворотных маятников с равными массами и различными приведенными длинами, для которых можно применить дифференциальный метод. При большом числе маятников маловероятно, чтобы у всех маятников разности $\Delta H_1 - \Delta H_2$ были одного знака. Если имеется несколько пар, для которых знаки различны, то получим значения ускорения силы тяжести как завышенные, так и заниженные. Среднеарифметическое из этих значений при большом числе пар маятников будет в большей степени свободно от влияния систематической погрешности, вызываемой неравенством ΔH_1 и ΔH_2 .

Следует заметить, что в реальных условиях сохранить постоянство ΔH при определении периодов T_1 и T_2 возможно только у дифференциального физического маятника с одной системой призма—подушка, предложенного автором.

Колебания такого маятника при определении периодов T_1 и T_2 происходят на одной и той же призме, опирающейся на одну и ту же опорную подушку. Это обеспечивает равенство ΔH_1 и ΔH_2 , следовательно, результат определения ускорения силы тяжести будет свободен от влияния системы призма—подушка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробочкин И. В., Колебания несоизмерительных приборов, Машгиз, 1947.
2. Агаецкий П. Н. и Егоров К. Н., Коромысло как инструмент для исследования системы „пож—опора“ маятниковых приборов, Труды ВНИИМ, вып. 11 (71), Машгиз, 1950.
3. Clark J. S., An Absolute Determination of the Acceleration due to Gravity, *Philosoph Trans. of the R. Soc. of London, ser. A.*, vol. 238, 1939.

ИСКЛЮЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ СОКАЧАНИЯ ШТАТИВА ПРИ АБСОЛЮТНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ УСКОРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ С ПОМОЩЬЮ ПОВОРОТНЫХ МАЯТНИКОВ

При применении поворотных маятников для абсолютного определения ускорения силы тяжести имеет место ряд источников систематических погрешностей различного характера. От полноты исключения этих погрешностей зависит точность определения ускорения силы тяжести.

В начале XIX в. для нитяных маятников был предложен дифференциальный метод абсолютного определения ускорения силы тяжести, как один из приемов исключения равновеликих систематических погрешностей [1]. Как известно [2], дифференциальный метод также применим и для обычных поворотных маятников.

Из наблюдений с двумя маятниками, приведенные длины которых L и l и периоды колебания соответственно T и t , ускорение силы тяжести может быть найдено из выражений:

$$g = \pi^2 \frac{L}{T^2} \quad (1)$$

$$g = \pi^2 \frac{l}{t^2}, \quad (2)$$

где

$$T^2 = \frac{T_1^2 H_1 - T_2^2 H_2}{H_1 - H_2}; \quad t^2 = \frac{t_1^2 h_1 - t_2^2 h_2}{h_1 - h_2};$$

T_1, T_2, t_1, t_2 — периоды колебания маятников в прямом и перевернутом положениях;

H_1, H_2, h_1, h_2 — расстояния от центров тяжести маятников до осей вращения.

Из равенств (1) и (2) для определения g легко получить формулу, в которую величины, подлежащие измерению, входят в виде разностей:

$$g = \pi^2 \frac{L - l}{T^2 - t^2}. \quad (3)$$

При наличии неисключенных систематических погрешностей $\Delta L, \Delta l$ и $\Delta T, \Delta t$ равенства (1), (2), (3) примут вид:

$$g_1 = \pi^2 \frac{L \pm \Delta L}{T^2 \pm 2T\Delta T} = \pi^2 \frac{L_1}{T_1^2}; \quad (4)$$

$$g_2 = \pi^2 \frac{l \pm \Delta l}{t^2 \pm 2t\Delta t} = \pi^2 \frac{l_1}{t_1^2}; \quad (5)$$

$$g_3 = \pi^2 \frac{L - l + (\pm \Delta L \mp \Delta l)}{T^2 - t^2 + 2(\pm T\Delta T \mp t\Delta t)} = \pi^2 \frac{L_1 - l_1}{T_1^2 - t_1^2}. \quad (6)$$

Таким образом, из наблюдений с двумя поворотными маятниками, при наличии неисключенных систематических погрешностей, получим,

согласно равенств (4), (5), (6), три значения ускорения силы тяжести g_1, g_2, g_3 .

Следует отметить, что если ΔL и Δl — суммы всех поправок, вводимых в приведенные длины маятников L и l , а ΔT и Δt — суммы всех поправок, вводимых в периоды колебания T_1 и t_1 , и если эти поправки учитывают все причины, влияющие на приведенные длины и периоды колебания маятников, то значения ускорения силы тяжести g_1, g_2, g_3 будут равны. Это обстоятельство дает возможность контролировать на сколько полно учтены все систематические погрешности, влияющие на точность определения ускорения силы тяжести, так как несовпадение значений g_1, g_2 и g_3 будет указывать или на неполный учет источников систематических погрешностей, или недостаточно точное определение величин самих погрешностей, или, наконец, на то и другое одновременно.

Для удобства вычисления g_3 , автором вместо формулы (6) получена тождественная формула

$$g_3 = \frac{Pg_1 - g_2}{P - 1}, \quad (7)$$

в которой

$$P = \frac{T^2}{t^2}.$$

На основании формулы (7) можно определять g_3 , непосредственно через полученные из наблюдений с маятниками значения ускорения силы тяжести g_1 и g_2 . Это значительно упрощает вычисление g_3 . При $P = 2$ формула (7) будет:

$$g_3 = 2g_1 - g_2.$$

Дифференциальный метод абсолютного определения ускорения силы тяжести, предложенный как один из приемов исключения равновеликих систематических погрешностей в приведенные длины маятников, не компенсирует все погрешности сразу. Только при тождественности некоторых условий наблюдения с маятниками исключается часть систематических погрешностей полностью; поэтому применению дифференциального метода к поворотным маятникам должен предшествовать теоретический анализ, с целью выявления какие погрешности можно исключить и при каких условиях опыта будет осуществляться частичное или полное исключение систематических погрешностей.

В данной работе автор не ставил цели исследовать влияния всевозможных систематических погрешностей, имеющих место при определении ускорения силы тяжести с помощью поворотных маятников, а ограничился рассмотрением одной наиболее важной, с точки зрения автора, погрешности, вносимой сокачением штатива.

1. Влияние сокачения штатива

Теория движения маятника на упругом штативе, приводимая в руководствах по гравиметрии [3], показывает, что маятник массы M при амплитуде колебания θ , вызывает горизонтальное перемещение штатива, а следовательно, горизонтальное перемещение оси вращения маятника на величину σ_y , равную:

$$\sigma_y = \frac{MgH\theta}{\varepsilon L}, \quad (8)$$

где

ε — упругая постоянная [MT^{-2}], характеризующая устойчивость штатива;

H — расстояние от центра тяжести маятника до оси вращения;

L — приведенная длина маятника.

Влияние горизонтального перемещения оси вращения маятника эквивалентно увеличению приведенной длины маятника на величину:

$$d = \frac{MgH}{zI}. \quad (9)$$

Согласно выражениям (8) и (9), будем иметь:

$$d = \frac{\sigma y}{\theta}.$$

Как известно [3], для поворотного маятника приведенная длина L определяется равенством:

$$L = \frac{I}{MH}, \quad (10)$$

где I — момент инерции маятника относительно оси вращения.

На основании равенства (10) увеличение приведенной длины L маятника будет:

$$d = \frac{MgH}{zI} MH. \quad (11)$$

Периоды колебания T_1 и T_2 поворотного маятника определяются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{gT_1^2}{\pi^2} &= \frac{I_1}{MH_1} = \frac{M(i^2 + H_1^2)}{MH_1}; \\ \frac{gT_2^2}{\pi^2} &= \frac{I_2}{MH_2} = \frac{M(i^2 + H_2^2)}{MH_2}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где

i — радиус инерции маятника относительно прямой, проходящей через центр тяжести параллельно оси вращения.

При влиянии сокачания штатива расстояния H_1 и H_2 от центра тяжести маятника до осей вращения увеличиваются соответственно на величины d_1 и d_2 , определяемые формулой (11), поэтому равенства (12) будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{gT_1^2}{\pi^2} &= \frac{M[i^2 + (H_1 + d_1)^2]}{M(H_1 + d_1)}; \\ \frac{gT_2^2}{\pi^2} &= \frac{M[i^2 + (H_2 + d_2)^2]}{M(H_2 + d_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из этих равенств, пренебрегая членами, содержащими d^2 , получим:

$$\begin{aligned} \frac{gT_1^2}{\pi^2} &= \frac{I_1 + 2MH_1d_1}{MH_1\left(1 + \frac{d_1}{H_1}\right)} = \frac{I_1 + 2MH_1d_1}{MH_1} \left(1 - \frac{d_1}{H_1}\right) = \frac{I_1 + 2MH_1d_1 - I_1 \frac{d_1}{H_1}}{MH_1}; \\ \frac{gT_2^2}{\pi^2} &= \frac{I_2 + MH_2d_2}{MH_2\left(1 + \frac{d_2}{H_2}\right)} = \frac{I_2 + 2MH_2d_2}{MH_2} \left(1 - \frac{d_2}{H_2}\right) = \frac{I_2 + 2MH_2d_2 - I_2 \frac{d_2}{H_2}}{MH_2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из равенств (14), после умножения первого на MH_1 , а второго на MH_2 , получим:

$$\frac{Mg}{\varepsilon} (T_1^2 H_1 - T_2^2 H_2) = I_1 - I_2 + 2M(H_1 d_1 - H_2 d_2) - \left(I_1 \frac{d_1}{H_1} - I_2 \frac{d_2}{H_2} \right). \quad (15)$$

После деления равенства (15) на $H_1 - H_2$ получим:

$$\frac{gT^2}{\varepsilon} = \frac{I_1 - I_2 + 2M(H_1 d_1 - H_2 d_2) - \left(I_1 \frac{d_1}{H_1} - I_2 \frac{d_2}{H_2} \right)}{M(H_1 - H_2)}. \quad (16)$$

Согласно выражениям (11), (12) имеем:

$$\left. \begin{aligned} I_1 - I_2 &= M(H_1^2 - H_2^2); \\ d_1 &= \frac{g}{\varepsilon} MH_1 \frac{MH_1}{I_1} = \frac{g}{\varepsilon} MH_1 \frac{MH_1}{M(i^2 + H_1^2)} = \frac{g}{\varepsilon} \frac{MH_1}{H_1 + H_2}; \\ d_2 &= \frac{g}{\varepsilon} MH_2 \frac{MH_2}{I_2} = \frac{g}{\varepsilon} MH_2 \frac{MH_2}{M(i^2 + H_2^2)} = \frac{g}{\varepsilon} \frac{MH_2}{H_1 + H_2}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

На основании этих равенств будет:

$$\begin{aligned} H_1 d_1 - H_2 d_2 &= H_1 \frac{g}{\varepsilon} \frac{MH_1}{H_1 + H_2} - H_2 \frac{g}{\varepsilon} \frac{MH_2}{H_1 + H_2} = \\ &= \frac{g}{\varepsilon} \frac{M}{H_1 + H_2} (H_1^2 - H_2^2) = \frac{g}{\varepsilon} M(H_1 - H_2) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d_1}{H_1} - I_2 \frac{d_2}{H_2} &= M(i^2 + H_1^2) \frac{g}{\varepsilon} \frac{MH_1}{H_1 + H_2} \cdot \frac{1}{H_1} - \\ &- M(i^2 + H_2^2) \frac{g}{\varepsilon} \frac{MH_2}{H_1 + H_2} \cdot \frac{1}{H_2} = \\ &= \frac{g}{\varepsilon} \frac{M^2}{H_1 + H_2} (H_1^2 - H_2^2) = \frac{g}{\varepsilon} M(H_1 - H_2). \end{aligned}$$

После подстановки в равенство (16) соответствующих выражений, полученных выше, будем иметь:

$$\frac{gT^2}{\varepsilon} = L + \frac{Mg}{\varepsilon} = L + \Delta L_c, \quad (19)$$

где

ΔL_c — систематическая погрешность в значении приведенной длины маятника, вызываемая сокачанием штатива.

Равенство (19) показывает, что вследствие сокачания штатива приведенная длина поворотного маятника как бы увеличивается на величину

$$\Delta L_c = \frac{Mg}{\varepsilon}.$$

Если M есть масса поворотного маятника с приведенной длиной L , а m — масса поворотного маятника с приведенной длиной l , то при на-

личии сокачания штатива равенства (4), (5), (6) при наблюдениях с маятниками на одном и том же штативе, будут:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \pi^2 \frac{L + \frac{Mg}{\varepsilon}}{T^2}; \\ g_2 &= \pi^2 \frac{l + \frac{mg}{\varepsilon}}{t^2}; \\ g_3 &= \pi^2 \frac{L - l + \frac{g}{\varepsilon} (M - m)}{T^2 - t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Как следует из равенств (20), в случае применения дифференциального метода к двум поворотным маятникам с равными массами ($M = m$), влияние сокачания штатива исключается полностью из результата определения силы тяжести.

В случае неравенства масс маятника ($M \neq m$) происходит частичная компенсация, величина которой зависит от разности масс маятника $M - m$ и разности приведенных длин $L - l$.

Согласно равенству (9), увеличение приведенной длины L поворотного маятника при колебании в прямом и перевернутом положении будет:

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \frac{Mg}{\varepsilon} \frac{H_1}{L}; \\ d_2 &= \frac{Mg}{\varepsilon} \frac{H_2}{L}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Сложив эти равенства, получим:

$$d_1 + d_2 = \frac{Mg}{\varepsilon} = \Delta L_c. \quad (22)$$

Следовательно, эффективное увеличение приведенной длины L поворотного маятника, вызываемое влиянием сокачания штатива, равно сумме увеличений приведенной длины маятника при качании в прямом и перевернутом положении.

Из равенств (21), имеем:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{H_1}{H_2} \quad \text{или} \quad d_1 = d_2 \frac{H_1}{H_2}. \quad (23)$$

Для поворотного маятника $H_1 > H_2$, следовательно, увеличение приведенной длины L маятника при колебании в прямом положении не будет равно увеличению приведенной длины L при колебании маятника в перевернутом положении. Это обстоятельство особенно важно и его следует иметь в виду при определении поправки на влияние сокачания штатива методом резонанса с помощью двух вспомогательных маятников. Для вспомогательных маятников еще недостаточно, чтобы они имели, по сравнению с поворотным маятником, равную массу и приведенную длину L . Необходимо также, чтобы они имели расстояние H от центра тяжести до оси вращения такое, как у поворотного маятника.

Для иллюстрации рассмотрим учет влияния сокачания штатива при абсолютном определении ускорения силы тяжести в Вашингтоне [4].

Для определения поправки на влияние сокачания штатива применялся интерференционный метод. Вспомогательное зеркальце воском за-

крепилось на ноже, скрепленном со штативом. Специально построенным интерферометром определялся горизонтальный сдвиг зеркала при колебаниях маятника. Применявшиеся в работе маятники имели: $H_1 = 70$ см; $H_2 = 30$ см.

Увеличение приведенной длины маятника было найдено равным 0,5 мк.

К сожалению в отчете не указано в каком положении при опытах колебался маятник, поэтому рассмотрим два случая:

I случай. Маятник колебался в перевернутом положении, следовательно

$$d_2 = 0,5 \text{ мк.}$$

Согласно равенству (23), увеличение приведенной длины маятника при колебании в прямом положении будет:

$$d_1 = d_2 \frac{H_2}{H_1} = 0,5 \frac{70}{30} \approx 1,2 \text{ мк.}$$

Таким образом, для первого случая эффективная поправка ΔL_c к приведенной длине маятника на влияние сокачания штатива в этих опытах, согласно равенству (22), будет не 0,5 мк, как указано в отчете, а 1,7 мк.

II случай. Маятник при опытах колебался в прямом положении, следовательно, $d_1 = 0,5$ мк. Увеличение приведенной длины маятника при колебании в перевернутом положении будет:

$$d_2 = d_1 \frac{H_2}{H_1} = 0,5 \frac{30}{70} \approx 0,2 \text{ мк.}$$

Для второго случая эффективная поправка ΔL_c на влияние сокачания штатива, согласно равенству (22), будет равна 0,7 мк.

Следовательно, поправка на влияние сокачания штатива при абсолютном определении ускорения силы тяжести в Вашингтоне была взята меньшей, чем следовало. Допущенная погрешность лежит в пределах 0,2—1,2 мк, в зависимости от того в каком положении колебался маятник при определении поправки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов А. А., Курс гравиметрии и теории фигуры земли, ГУКГ при СНК СССР, 1939.
2. Агалецкий П. Н., Способ обнаружения и исключения систематических погрешностей при определении абсолютного значения ускорения силы тяжести с помощью маятниковой аппаратуры, Труды ВНИИМ, вып. 11 (71), Машгиз, 1950.
3. Сорокин Л. В., Гравиметрия и гравиметрическая разведка, Гостоптехиздат, 1951.
4. Heyl and Cook, Report an absolute value of gravity at Washington, Transactions of the American Geophysical Union, 1936, part 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ МАЯТНИКА ПРИ НАЛИЧИИ ТЕМПЕРАТУРНОЙ СЛОИСТОСТИ ВО ВНЕШНЕЙ СРЕДЕ

В последнее время стали придавать большое значение вопросу о влиянии температурной слоистости воздуха на маятниковые наблюдения. При всей тщательности определения температурной слоистости во внешней среде все же, в настоящее время, в период маятника вводится поправка за такую температуру, которая не соответствует той, от которой зависит изменение приведенной длины маятника.

При вычислении поправки периода маятника за влияние температурной слоистости воздуха, обычно принимают за температуру маятника осредненное значение температуры окружающей среды, что не соответствует действительности.

Совершенно очевидно, что температурная слоистость внутри маятника не соответствует расслоенности температуры во внешней среде. Теплопроводность маятника значительно больше теплопроводности воздуха; поэтому температурная слоистость внутри маятника всегда будет выражаться гораздо слабее, чем во внешней среде.

Для того чтобы судить о степени различия теплопроводности в маятнике и во внешней среде, укажем, что коэффициент теплопроводности для неподвижного воздуха $\lambda = 0,02 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{час} \cdot \text{град}}$ тогда, как для меди $\lambda = 350 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{час} \cdot \text{град}}$, т. е. теплопроводность меди, приблизительно, в 18 000

раз больше теплопроводности воздуха. При наличии температурной слоистости во внешней среде массивная чечевица маятника находится в других температурных условиях, чем тонкий стержень. Температурное состояние стержня будет определяться не только температурой окружающей среды, но и температурным состоянием чечевицы. Отсюда следует, что температура маятника не будет совпадать со средней температурой воздуха.

Для правильного учета влияния температурной слоистости на период маятника нужно сначала по известному распределению температуры во внешней среде найти распределение температуры внутри маятника. Затем, указать такой способ осреднения температур, соответствующих найденному распределению, который давал бы наивероятнейшее значение температуры маятника.

1. Эффективная температура маятника

В самом общем случае следует считать, что распределение температуры в теле маятника неравномерное, т. е.

$$t = t(x, y, z, \tau). \quad (1)$$

где t — действительная температура в какой-либо точке P внутри маятника;

x, y, z — текущие координаты точки P ;

τ — время.

Заметим, что температура маятника при равномерном распределении ее имеет определенный физический смысл и не требует никаких дополнительных пояснений. В этом случае температура всего тела совпадает с действительным ее значением во всех частях маятника.

При неравномерном распределении температура всего тела представляет собою сложную совокупность различных действительных значений температуры. В этом случае о каком-либо определенном значении температуры тела нельзя говорить, не определив предварительно, что следует понимать под температурой тела при ее неравномерном распределении.

Температура оказывает влияние на период маятника не непосредственно, как, например, плотность воздуха, а через изменение приведенной длины маятника. Поэтому нас, в конечном счете, интересует не действительная температура t_i в отдельных точках маятника, а та температура θ , от изменения которой, в соответствии с температурным коэффициентом, зависят изменения приведенной длины. Конечно, такая температура θ будет зависеть от характера распределения температур t_i по всему объему маятника и будет являться результатом какого-то осреднения этих температур t_i . Таким образом, для определения температуры θ нужно знать закон распределения температуры $t = t(x, y, z, \tau)$ по телу маятника и указать тот способ осреднения температур θ , который давал бы наименее вероятнейшее значение температуры θ .

Известно, что длина маятника при изменении температуры меняется непрерывно. На основании этого, при любом неравномерном распределении температуры по телу маятника, можно выбрать такое значение температуры θ , что длина L_0 маятника, соответствующая этой температуре в условиях равномерного температурного распределения, будет в точности равна длине L маятника в данный момент времени τ при неравномерном распределении температуры.

Полученную таким образом температуру будем называть эффективной температурой маятника и обозначать буквой θ .

Из определения эффективной температуры следует, что:

1. Температура маятника при равномерном распределении температуры является частным, предельным случаем эффективной температуры, так же, как равномерное температурное распределение является частным, предельным случаем общего, неравномерного распределения.

2. Эффективная температура не зависит от координат точек тела.

3. При установившемся неравномерном температурном состоянии эффективная температура будет величиной постоянной.

4. При неустановившемся состоянии эффективная температура, в общем случае, будет функцией времени. Но в том случае, когда перераспределение температуры в теле маятника не вызывает изменения приведенной длины, эффективная температура должна оставаться постоянной величиной.

Для решения вопроса об определении эффективной температуры допустимо считать, что для обычных полусекундных маятников центр качания достаточно точно совпадает с геометрическим центром чечевицы. Это обстоятельство позволяет выбрать систему координат с началом в центре чечевицы и осью z , совпадающей с геометрической осью стержня маятника, и отсчитывать приведенную длину маятника по оси z .

Выбранная система координат позволяет получить удобные формулы для определения эффективной температуры маятника.

Обозначим:

K — момент инерции маятника относительно оси y (ось y проходит через центр качания и параллельна оси подвеса маятника);

a — расстояние от начала координат до центра тяжести маятника.

Тогда приведенная длина L маятника выразится формулой:

$$L = \frac{K}{a \cdot M}, \quad (2)$$

где

M — масса маятника.

В формуле (2) все величины, кроме M , зависят от температуры. Выясним характер этой зависимости сначала для случая равномерного распределения температуры в теле маятника.

Пусть θ и t_0 обозначают, соответственно, начальную и конечную температуры маятника; θ — температуру окружающей среды. K_{t_0} ; K_θ ; a_{t_0} ; a_θ ; L_{t_0} ; L_θ — значения величин формулы (2) при температуре, соответственно, t_0 и θ , тогда

$$K_{t_0} = \int (x_{t_0}^2 + z_{t_0}^2) dm;$$

$$K_\theta = \int (x_\theta^2 + z_\theta^2) dm,$$

где dm — элемент массы в теле маятника.

Но так как

$$x_{t_0} = x_\theta [1 + \alpha (t_0 - \theta)];$$

$$z_{t_0} = z_\theta [1 + \alpha (t_0 - \theta)],$$

где α — температурный коэффициент, то после подстановки этих значений в выражение для K_{t_0} , получим:

$$K_{t_0} = K_\theta [1 + \alpha (t_0 - \theta)]^2. \quad (3)$$

Для величины a_{t_0} будем иметь

$$a_{t_0} = a_\theta [1 + \alpha (t_0 - \theta)]. \quad (4)$$

Следует заметить, что мы считаем температурный коэффициент α независящим от направления. Кроме того, для упрощения математических выкладок мы не вводим квадратичного температурного коэффициента, понимая под α эквивалентный температурный коэффициент, определяемый формулой:

$$\alpha = \alpha_0 + 2\beta\theta,$$

где

α_0 — линейный температурный коэффициент, отнесенный к начальной температуре θ_0 ;

β — квадратичный температурный коэффициент.

Подставляя величины K_{t_0} из формулы (3) и a_{t_0} из выражения (4) в формулу (2), получим:

$$L_{t_0} = \frac{K_\theta}{a_\theta M} [1 + \alpha (t_0 - \theta)]$$

или

$$L_{t_0} = L_\theta [1 + \alpha (t_0 - \theta)]. \quad (5)$$

Перепишем уравнение (5) в виде:

$$L_{t_0} = L_\theta (1 + \alpha t_0) - \alpha L_\theta \theta. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь случай неравномерного распределения температуры.

Разобьем приведенную длину L на такие элементы, чтобы распределение температуры для каждого из них можно было бы считать равномерным. Тогда, на основании предыдущих рассуждений, можно написать формулу:

$$dL_{t_0} = dL [1 + \alpha (t_0 - t)], \quad (7)$$

где

dL_{t_0} — величина элемента приведенной длины при температуре t_0 ;

dL — величина того же самого элемента приведенной длины при температуре t .

Заметим, что именно начальное состояние считаем неравномерным. Это ближе соответствует действительности, так как с течением времени температура маятника выравнивается с температурой окружающей среды и конечное распределение температуры приближается к равномерному. Интегрируя уравнение (7), получим:

$$L_{t_0} = L + \alpha \int (t_0 - t) dL$$

или

$$L_{t_0} = L (1 + \alpha t_0) - \alpha \int t dL. \quad (8)$$

Сравнивая формулы (6) и (8) и принимая во внимание, что $L_0 = L$ на основании принятого определения эффективной температуры, получим:

$$\theta = \frac{\int t dL}{L}. \quad (9)$$

При выбранной системе координат формула (9) переходит в формулу:

$$\theta = \frac{\int_0^L t dz}{L}. \quad (10)$$

Формула (10) выражает способ определения эффективной температуры θ путем осреднения температур по приведенной длине маятника.

Заметим, что формула (10) для нашего случая равносильна формуле:

$$\theta = \frac{r \theta_{\text{чеч}} + l \theta_{\text{ст}}}{L}, \quad (11)$$

где

r — часть приведенной длины L , которая заключена в чечевице маятника;

l — часть приведенной длины, заключенной в стержне маятника;

$\theta_{\text{чеч}}$ — средняя объемная температура чечевицы маятника.

Средняя объемная температура чечевицы маятника определяется следующей формулой:

$$\theta_{\text{чеч}} = \frac{\int t dV}{V_{\text{чеч}}}, \quad (12)$$

где

$V_{\text{чеч}}$ — объем чечевицы.

Через $\theta_{\text{ст}}$ — обозначена средняя объемная температура стержня маятника, которая определяется формулой:

$$\theta_{\text{ст}} = \frac{\int t dV}{V_{\text{ст}}}, \quad (13)$$

где

$V_{\text{ст}}$ — объем стержня.

Величина dV является не температурным изменением объема, а результатом деления его на такие элементы, для которых допустимо считать, что внутри каждого из них температурные градиенты в направлении приведенной длины отсутствуют, т. е. на такие слои, которые обеспечивают равномерное распределение температуры на данном элементе приведенной длины.

Для определения эффективной температуры θ по формуле (11) не обязательно знать значение величины r , l , а также $V_{\text{чеч}}$ и $V_{\text{ст}}$ при различной температуре. Достаточно взять среднее или приближенное значение этих величин, так как ошибка даже в 1% не внесет в эффективную температуру погрешность, выходящую за пределы $\pm 0,005^\circ\text{C}$, что вполне достаточно для наблюдений с маятниками.

Покажем, что формула (11) для нашего случая равносильна формуле (10), определяющей эффективную температуру маятника. Дальнейшие рассуждения будем относить к маятникам с шаровой чечевицей (маятники типа „Астрономического института“).

Заметим, что название „чечевица маятника“ в настоящее время не всегда соответствует чечевицеобразной форме груза. Это несоответствие получилось потому, что форма груза у маятников менялась, а название сохранялось старым.

Перепишем формулу (11) в следующем виде:

$$\theta = \frac{r \frac{\int t dV}{V_{\text{чеч}}} + l \frac{\int t dV}{V_{\text{ст}}}}{L}$$

Преобразуем входящие в эту формулу интегралы. Для первого интеграла воспользуемся сферическими координатами. Формулы перехода к прямоугольным координатам будут:

$$x = \rho \cdot \sin \psi \cdot \cos \varphi;$$

$$y = \rho \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi;$$

$$z = \rho \cdot \cos \psi.$$

Элемент объема в сферических координатах определяется выражением:

$$dV = \rho^2 \sin \psi \, d\varphi \cdot d\psi \cdot d\rho.$$

Для преобразования второго интеграла воспользуемся цилиндрическими координатами:

$$x = \rho \cos \varphi;$$

$$y = \rho \sin \varphi;$$

$$z = z.$$

$$dV = \rho \, d\varphi \cdot d\rho \cdot dz.$$

Тогда

$$\theta = \frac{\frac{2r}{V_{\text{чеч}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^r t \rho^2 \sin \psi \, d\varphi \cdot d\psi \cdot d\rho + \frac{l}{V_{\text{ст}}} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^r t \cdot \rho \, d\varphi \cdot d\rho \cdot dz}{L}.$$

Интегрируя и переходя к прямоугольным координатам, получим:

$$\theta = \frac{r \int_0^r t \, dz + \frac{l}{r} \int_0^L t \, dz}{L}$$

или

$$\theta = \frac{\int_0^L t dz}{L}. \quad (10)$$

Таким образом, формулу (10) мы получили из формулы (11) при условии, что $t = t(z)$. Это и доказывает равносильность формул (10) и (11) для нашего случая.

2. Распределение температуры внутри маятника

Для определения характера распределения температуры внутри маятника по известному распределению температуры во внешней среде нужно выбрать, прежде всего, те начальные и граничные условия, которые наиболее близко соответствовали бы действительным условиям. Кроме того, желательно выбрать такие условия, чтобы определение эффективной температуры не являлось бы математически сложным.

Под начальными условиями мы понимаем такие условия, которым должно удовлетворять температурное состояние маятника в начальный момент времени. Под граничными условиями понимаем те условия, в которых находится поверхность раздела двух физически различных сред. В нашем случае это будут условия на поверхности маятника.

Заметим, что наши крайние условия как начальные, так и граничные, с точки зрения математического анализа, являются предельными условиями, т. е. допускающими получение крайних значений функции при переходе к пределу.

Для рассматриваемого случая допустим сначала, что температура чечевицы совпадает с температурой того слоя внешней среды, в котором она находится (качается). В этом случае температуру той части приведенной длины маятника, которая заключена в чечевице, можно считать постоянной и известной величиной.

Кроме того, будем считать общее температурное состояние маятника установившимся, что освобождает нас от выбора начальных условий.

Заметим, что установившееся температурное состояние маятника не исключает теплообмена с внешней средой. Для того чтобы учесть влияние теплообмена маятника, нужно, для нашего случая, рассматривать температуру окружающей среды как функцию z .

Будем считать температуру окружающей среды линейной функцией z следующего вида:

$$\theta_z = \gamma z, \quad (14)$$

где

$$\gamma = \frac{\partial \theta}{\partial z} = \text{const} \text{ для данного стационарного состояния внешней среды.}$$

За начало отсчета температуры окружающей среды принимаем условно, для данного случая, плоскость $z = 0$, где считаем $\theta = 0$.

Сделаем, наконец, последнее предположение о том, что в любом поперечном сечении стержня можно считать распределение температуры равномерным.

Возьмем в стержне элемент объема, заключенный между двумя перпендикулярными к оси z сечениями, находящимися на расстоянии z и $z + dz$ от начала координат.

Изменение количества тепла за единицу времени в элементе объема выразится разностью между поступающим и выходящим теплом, а именно:

$$\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} F dz,$$

где

λ — коэффициент теплопроводности сплава маятника;
 F — площадь поперечного сечения стержня.

Потеря тепла в элементе объема за счет теплообмена с внешней средой будет:

$$h(t - \theta_z) \cdot 2\pi r_{cr} \cdot dz,$$

где

h — коэффициент теплоотдачи;
 θ_z — температура окружающей среды на расстоянии z от начала координат.

Общее изменение тепла в элементе объема за единицу времени будет:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} c \delta F dz,$$

где

c — удельная теплоемкость;
 δ — плотность вещества.

Следовательно:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c\delta} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} - \frac{2\pi r_{cr} h}{c\delta F} (t - \theta_z). \quad (15)$$

Для установившегося температурного состояния будет:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$$

и, следовательно, уравнение (15) примет вид:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} - \frac{2\pi r_{cr} h}{\lambda F} (t - \theta_z) = 0, \quad (16)$$

или, принимая во внимание, что $F = \pi r_{cr}^2$, получим:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} - \frac{2}{r_{cr}} \cdot \frac{h}{\lambda} (t - \theta_z) = 0. \quad (17)$$

Обозначая

$$\frac{2}{r_{cr}} \cdot \frac{h}{\lambda} = \mu^2, \quad (18)$$

будем иметь:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} - \mu^2 (t - \theta_z) = 0. \quad (19)$$

Добавляя сюда краевые условия:

$$\begin{aligned} t &= 0 \quad \text{при} \quad z = r; \\ t &= \theta_z \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (20)$$

получим все необходимое для решения нашей задачи.

Следует заметить, что последнее из условий (20) для стержня маятника вполне реально, хотя он и имеет ограниченную длину. Дело в том, что тело маятника не ограничивается величиной $z = L$, а имеет продолжение по металлу в головку маятника. Это создает такие условия, что поток тепла через сечение $z = L$ отводится не в окружающую среду, а в среду из того же металла, что и оправдывает возможность использования указанного условия при решении уравнения (19).

Приведем уравнение (19) к более удобному для интегрирования виду: Пусть

$$t = \theta_z + U, \quad (21)$$

тогда получим

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - \mu^2 U = 0. \quad (22)$$

Краевые условия примут вид:

$$\begin{aligned} U &= \theta_z \quad \text{при } z = r; \\ U &= 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнение (22) является обыкновенным линейным и однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Для интегрирования этого уравнения полагаем

$$U = e^{m(z-r)}, \quad (24)$$

где m — постоянная.

Подставляя значение U из уравнения (24) в уравнение (22), найдем, что

$$m_1 = +\mu; \quad m_2 = -\mu.$$

В соответствии с этим получим два интеграла

$$U_1 = e^{\mu(z-r)}, \quad U_2 = e^{-\mu(z-r)}.$$

Умножая эти интегралы на произвольные постоянные и складывая, найдем общий интеграл уравнения (22)

$$U = Ae^{\mu(z-r)} + Be^{-\mu(z-r)}. \quad (25)$$

Постоянные A и B легко определяются из условий (23).

Первое условие дает

$$A + B = \theta_z.$$

Из второго условия следует, что

$$A = 0,$$

следовательно,

$$B = \theta_z.$$

Подставляя найденные значения A и B в общий интеграл (25), получим:

$$U = \theta_z e^{-\mu(z-r)}.$$

Или, заменяя значение U его выражением из уравнения (21), будем иметь:

$$t = \theta_z [1 - e^{-\mu(z-r)}], \quad (26)$$

где

$$\theta_z = \gamma z.$$

Формула (26) является искомой. Она определяет характер распределения температуры внутри маятника по известному распределению температуры во внешней среде.

3. Количественная оценка величины возможного несовпадения эффективной температуры маятника со средней температурой окружающего воздуха

Определим сначала эффективную температуру маятника. Воспользуемся для этого формулой (11), которая при выбранных условиях ($\theta_{\text{веч}} = 0$) имеет вид:

$$\theta = \frac{l}{L} \theta_{\text{ст}}. \quad (27)$$

Температура θ_{cr} определяется формулой (13). Для случая $t = t(z)$ формула (13) равносильна формуле

$$\theta_{cr} = \frac{\int_0^L t dz}{l}. \quad (28)$$

Подставляя в эту формулу значение t из уравнения (26), интегрируя и учитывая, что $L - r = l$, получим:

$$\theta_{cr} = \frac{\gamma L + \gamma r}{2} - \frac{\gamma}{L \mu^2} [(\mu r + 1) - (\mu L + 1) e^{-\mu(L-r)}].$$

Подставляя это значение для θ_{cr} в формулу (27), будем иметь:

$$\theta = \gamma \left[\frac{1}{2} \frac{l}{L} (L + r) - \frac{(\mu r + 1) - (\mu L + 1) \cdot e^{-\mu(L-r)}}{L \mu^2} \right]. \quad (29)$$

Известно, что наблюдения над колебаниями полусекундных маятников производятся на малых амплитудах, порядка $30' - 40'$, скорость изменения амплитуды незначительна. Нарушений стационарного состояния воздуха под колпаком прибора не происходит. Это дает основание считать коэффициент μ постоянной величиной. Таким образом, выражение в квадратных скобках формулы (29) является величиной постоянной для данного маятника.

Обозначая эту величину через p , получим:

$$\theta = p \gamma, \quad (30)$$

где

$$p = \frac{1}{2} \frac{l}{L} (L + r) - \frac{(\mu r + 1) - (\mu L + 1) \cdot e^{-\mu(L-r)}}{L \mu^2}. \quad (31)$$

Значение коэффициента p должно определяться с такой точностью, чтобы не нарушить заметным образом ту точность, которая предъявляется к определению температуры маятника. Известно, что для бронзовых и латунных маятников температура должна определяться с погрешностью не более чем $\pm 0,02$ градуса, что соответствует погрешности $\pm 1 \cdot 10^{-7}$ сек. периода маятника при значении его температурного коэффициента $\alpha = 50 \cdot 10^{-7}$ сек/град. В этом случае, при величине температурного градиента γ от 0,01 град/см до 0,05 град/см значение коэффициента p , как это следует из формулы (30), достаточно знать с погрешностью от $\pm 0,4$ до $\pm 2,0$.

Заметим, что если величина отношения $\frac{h}{\lambda}$ коэффициента теплообмена к коэффициенту теплопроводности для маятников известна, то значение коэффициента p легко определить путем вычисления по формуле (31).

Произведенные расчеты погрешностей величин, входящих в формулу (31), показали, что точность значений коэффициентов h и λ для маятников требуется приблизительно в 100 раз меньше той, которую могут дать применяемые в теплотехнике способы определения этих коэффициентов.

Из этого следует, что определение коэффициентов h и λ с необходимой для маятников точностью не представляет никаких трудностей. Определение линейных размеров маятника, входящих в формулу (31), также не является трудным, так как знание их с погрешностью $\pm 0,1$ см вполне достаточно для определения коэффициента p с необходимой точностью.

Для того чтобы показать возможные границы несовпадения эффективной температуры маятника со средней температурой окружающего воздуха, можно воспользоваться приближенно известными значениями коэффициентов h и λ , взятыми хотя бы из определений для других, аналогичных маятникам, физических тел.

Определим сначала наибольшее и наименьшее значение коэффициента p .

Для полусекундных маятников типа „Астрономического института“ примем:

$$\begin{aligned} L &= 24,2 \text{ см}; \\ r &= 3,1 \text{ см}; \\ l &= 21,1 \text{ см}; \\ r_{\text{ст}} &= 0,5 \text{ см}. \end{aligned}$$

Для коэффициентов h и λ возьмем такие наименьшие и наибольшие значения, чтобы их действительное значение для маятников не выходило за пределы принятых величин.

За наименьшее и наибольшее значение коэффициента теплообмена примем:

$$\begin{aligned} h_1 &= 19,44 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}; \\ h_2 &= 55,56 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}. \end{aligned}$$

Это соответствует значению коэффициента теплообмена для тонкого металлического стержня, находящегося, соответственно, в спокойном и неспокойном воздухе.¹

Для коэффициента теплопроводности λ примем следующие значения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,265 \frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}; \\ \lambda_2 &= 0,892 \frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}, \end{aligned}$$

что соответствует значению коэффициента теплопроводности для цинка и меди.²

На основании принятых значений коэффициентов h и λ будем иметь:

$$\frac{h_2}{\lambda_1} = 2,06 \cdot 10^{-3}; \quad \frac{h_1}{\lambda_2} = 0,22 \cdot 10^{-3}.$$

Используя формулу (18) для коэффициента p , получим следующее значение:

$$p_1 = 90,8 \cdot 10^{-3}; \quad p_2 = 29,0 \cdot 10^{-3}.$$

Подставляя в формулу (31) соответствующие значения величин, получим:

$$p_1 = 7,8; \quad p_2 = 3,7.$$

Формула (30) при известном значении коэффициента p и определенной величине температурного градиента γ дает соответствующее значение эффективной температуры θ маятника.

¹ Т. М. Бродович, Роль инерции в температурных измерениях, ВНИИМ, 1948.

² „Сборник физических констант“ под редакцией проф. Я. Г. Дорфмана и проф. С. Э. Фриша, 1937.

До сих пор считалось, что для правильного учета влияния температурной слоистости воздуха на маятниковые наблюдения нужно определять температуру воздуха на средней высоте внутри маятникового прибора или приводить температуру окружающей среды на середину длины маятника и в соответствии с этой температурой исправлять период.

Для проверки справедливости этого положения зададимся значением температурного градиента γ , определим эффективную температуру θ и сравним ее значение со значением температуры $\theta_{\text{ср}}$ на средней высоте.

Близость этих значений друг к другу укажет на степень достоверности применяемого в настоящее время способа учета температурной слоистости.

Величина вертикального температурного градиента под колпаком маятникового прибора „Аэрогеоприбор“ по результатам исследований, которые производились в лаборатории МАГП зимой 1944 г. Фроловым А. И., может достигать иногда величины

$$\gamma = 0,05 \text{ град/см.}^2$$

Значение эффективной температуры при указанной величине γ и вычисленных выше коэффициентах ρ_1 и ρ_2 будет

$$\theta_1 = 7,8 \cdot 0,05^\circ = 0,39^\circ;$$

$$\theta_2 = 3,7 \cdot 0,05^\circ = 0,18^\circ.$$

Значение температуры окружающего маятник воздуха на средней высоте будет

$$\theta_{\text{ср}} = 0,62^\circ.$$

Сравнение θ и $\theta_{\text{ср}}$ дает

$$\theta_{\text{ср}} - \theta_1 = 0,62^\circ - 0,39^\circ = 0,23^\circ$$

$$\theta_{\text{ср}} - \theta_2 = 0,62^\circ - 0,18^\circ = 0,44^\circ.$$

Это показывает, что эффективная температура маятника, при наличии температурной слоистости во внешней среде, не совпадает со средней температурой воздуха. В том случае, если бы маятник имел равномерное распределение однородной массы по приведенной длине, как, например, минимальный маятник, имеющий форму цилиндра, то тогда, очевидно, его температура совпала бы со средней температурой окружающего воздуха. Массивная чечевица в обычных полусекундных маятниках, при наличии температурной слоистости в окружающей среде, является для стержня маятника дополнительным источником (поглотителем) тепла, что приводит к смещению температуры маятника в сторону чечевицы относительно средней температуры воздуха.

Полученные результаты показывают, что обычно применяемый способ учета температурной слоистости, основанный на отождествлении температуры маятника со средней температурой окружающей среды, не является достоверным, так как в период маятника вводится поправка за такую температуру, которая не соответствует его эффективной температуре.

На основании произведенной количественной оценки легко видеть, что для бронзовых и латунных маятников несовпадение эффективной и средней температуры воздуха может дать ошибку периода маятника, заключенную в пределах от $11,5 \cdot 10^{-7}$ сек. до $22,0 \cdot 10^{-7}$ сек.

¹ Доклады IV Всесоюзной конференции по гравиметрии, СИАИ, Москва, 1947.

4. Определение эффективной температуры маятника

Температура чечевицы качающегося маятника, как мы допускали ранее, совпадает с температурой того слоя внешней среды, в котором она движется. Это допущение имело целью упростить математические выкладки и сделать возможным количественную оценку изучаемого явления, не прибегая к постановке специального эксперимента.

Для более строгого учета температурной слоистости необходимо принимать во внимание, что в действительности, особенно при больших температурных градиентах, температура чечевицы не совпадает с температурой того слоя окружающей среды, в котором она находится. Температура чечевицы, как правило, будет несколько выше температуры соответствующего слоя окружающей среды. Это объясняется тем, что в действительности, поскольку масса чечевицы соизмерима с массой стержня и головки маятника, то не только чечевица является дополнительным источником (поглотителем) тепла для стержня маятника, но и сам стержень вместе с головкой маятника может являться для чечевицы маятника дополнительным источником тепла.

Для того чтобы учесть указанные обстоятельства, примем при решении уравнения (19) следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} t &= \theta^0 \text{ при } z = z_0 \\ t &= \theta_z \text{ при } z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (32)$$

где

θ^0 — значение температуры окружающей среды на средней высоте

$$z_{\text{ср}} = \frac{L}{2};$$

z_0 — высота того сечения стержня, где температура в точках этого сечения равна θ^0 (для маятников, как правило, $z_0 > \frac{L}{2}$);

θ_z — значение температуры окружающей среды на высоте z .

Заметим, что в отличие от принятых ранее обозначений, целесообразнее не связывать начало отсчета температуры окружающей среды с выбранной нами координатной системой (x, y, z). В этом случае значение температуры окружающей среды на высоте z будет определяться выражением:

$$\theta_z = \theta^0 + \gamma \left(z - \frac{L}{2} \right). \quad (33)$$

Решая уравнение (19) при выбранных условиях, получим:

$$t = \theta_z - (\theta_z - \theta^0) \cdot e^{-\mu(z-z_0)}, \quad (34)$$

или, подставляя значение θ_z из выражения (33), будем иметь:

$$t = \theta^0 + \gamma \left(z - \frac{L}{2} \right) (1 - e^{-\mu(z-z_0)}). \quad (35)$$

Подставляя найденное значение t из выражения (35) в формулу (10) и интегрируя, получим:

$$\theta = \theta^0 + \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{L\mu} \right) e^{\mu z_0} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{L\mu} \right) \cdot e^{-\mu(L-z_0)} \right] \cdot \gamma \quad (36)$$

или

$$\theta = \theta^0 + p \cdot \gamma, \quad (37)$$

где

$$p = \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{L\mu} \right) \cdot e^{\mu z_0} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{L\mu} \right) \cdot e^{-\mu(L-z_0)} \right]. \quad (38)$$

Значение p , определяемое выражением (38), в отличие от значения p , определяемого выражением (31), не может быть получено путем вычисления, так как величина z_0 для нас неизвестна. Однако, пользуясь зависимостью (37), можно определить довольно точное значение коэффициента p экспериментально, например, из наблюдений над колебанием маятника при различных искусственно созданных температурных градиентах. В этом случае система условных уравнений будет иметь следующий вид:

$$S_i = S_0 + z\theta_i^0 + \alpha p\gamma_i, \quad (39)$$

где

S_0 — период маятника при $\gamma = 0$;

S_i — период маятника при заданном температурном градиенте γ_i ;

α — эквивалентный температурный коэффициент.

Решение системы условных уравнений (39) по способу наименьших квадратов даст наимвероятнейшее значение коэффициента p . Значение коэффициента p можно определить также и другим способом, а именно: определяя с помощью системы дифференциальных терморпар температуру тела маятника и температуру окружающей среды, можно составить условные уравнения вида:

$$\theta_i = \theta_i^0 + p\gamma_i. \quad (40)$$

Решая условные уравнения (40) по способу наименьших квадратов, легко получить значение коэффициента p .

Таким образом, зная коэффициент p , можно получать точное значение эффективной температуры θ маятника по средней температуре θ^0 окружающей среды и измеренной величине γ .

Несмотря на то, что изменение температуры по высоте происходит по параболическому закону, тем не менее для определения эффективной температуры маятника по температуре окружающей среды допустимо, как показывают эксперименты, пользоваться линейной зависимостью. В этом случае можно считать, что

$$\theta^0 = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2); \quad \gamma = \frac{\theta_2 - \theta_1}{L},$$

где

θ_1 и θ_2 — температура окружающей среды, соответственно в нижней и верхней части прибора;

L — длина маятника (или высота прибора).

Следовательно, формулу для определения эффективной температуры маятника можно написать в следующем виде:

$$\theta = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) + q (\theta_2 - \theta_1), \quad (41)$$

где

$$q = \frac{p}{L}. \quad (42)$$

Таким образом, для определения эффективной температуры маятника, величина q которого известна, достаточно измерить температуру воздуха в нижней и верхней части прибора.

Значение эффективной температуры маятника можно даже оценивать на основании измерения температуры окружающей среды всего лишь в одной точке. Действительно, зная коэффициент p , легко определить на какой высоте z нужно измерять температуру окружающей среды.

чтобы эта температура соответствовала бы эффективной температуре маятника.

Полагая в этом случае $\theta = \theta_2$ и пользуясь формулами (33) и (37), найдем, что

$$z_0 = \frac{L}{2} + p. \quad (43)$$

Таким образом, измеряя температуру воздуха на высоте $z_0 = \frac{L}{2} + p$, можно получать температуру соответствующую эффективной температуре маятника.

Проведенные эксперименты полностью подтвердили правильность изложенных выше теоретических соображений.

Для проведения экспериментов был взят бронзовый маятник общей длиной около 28 см. Температура маятника и окружающей среды измерялась в различных местах с помощью медь-константановых дифференциальных термопар. Маятник вешался в вертикальном положении на специальную стойку. К верхней и нижней части маятника присоединялись термопары. Одновременно с этим, на такой же высоте в воздухе, рядом с маятником, помещались другие термопары. Вся эта система покрывалась картонным колпаком с отверстием для ввода термопар.

Градуировка медь-константановых дифференциальных термопар производилась по образцовым ртутным термометрам первого разряда (№ 16679, 15658, 11146, 11147). Результаты градуировки оказались следующими (табл. 1):

Показания термопар отсчитывались по шкале зеркального гальванометра (№ 1689). Шкала находилась от зеркала гальванометра на расстоянии 213 см. В термостате с холодными спаями термопар были установлены образцовые ртутные термометры первого разряда (№ 16679 и 15658).

С помощью термопар удавалось довольно точно оценивать температуру в различных местах как на теле маятника, так и в окружающей среде при различных температурных градиентах γ .

Различные температурные градиенты мы получали путем небольших изменений температуры в верхней части картонного колпака.

Наблюдения производились при наиболее установившихся значениях температурного градиента γ .

Результаты наблюдений приводятся в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что среднее значение температуры θ маятника не совпадает со средней температурой θ^0 окружающего воздуха. Температура θ маятника как бы смещается в сторону чечевицы относительно средней температуры θ^0 воздуха. Кроме того, температура чечевицы и температура головки маятника также не совпадает с температурой тех слоев воздуха, в которых они находятся. Температура θ_1 чечевицы оказывается несколько больше температуры θ_1 соответствующего слоя окружающей среды, а температура θ_2 головки маятника меньше температуры θ_2 соответствующего слоя окружающей среды. При этом для чечевицы маятника несовпадение ее температуры с соответствующей температурой окружающего воздуха значительно меньше, чем для головки маятника

Таблица 1

№ термопар	Цена деления шкалы гальванометра в градусах	Погрешность результата
1	0,00547	$\pm 4 \cdot 10^{-5}$
2	0,00539	$\pm 3 \cdot 10^{-5}$
3	0,00537	$\pm 3 \cdot 10^{-5}$
4	0,00540	$\pm 4 \cdot 10^{-5}$
5	0,00536	$\pm 6 \cdot 10^{-5}$
6	0,00539	$\pm 6 \cdot 10^{-5}$
7	0,00541	$\pm 4 \cdot 10^{-5}$
8	0,00532	$\pm 5 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2

Температура чечевицы θ_1 в град.	Температура головки (верхняя часть стержня) θ_2 в град.	Температура стержня в средней части маятника θ в град.	Температура воздуха на уровне чечевицы θ_1 в град.	Температура воздуха на уровне головки (верхняя часть стержня) θ_2 в град.	Температура воздуха на средней высоте θ' в град.	$\theta - \theta'$ в град.	$\gamma = \frac{\theta_2 - \theta_1}{28}$	Температура воздуха на высоте, равной $1/4$ дл. маятника θ'' в град.
19,118	19,366	19,242	18,965	19,877	19,421	-0,179	0,0326	19,269
19,031	19,216	19,124	18,912	19,573	19,242	-0,118	0,0236	19,132
18,936	19,092	19,014	18,844	19,408	19,126	-0,112	0,0202	19,032
18,939	19,093	19,016	18,844	19,364	19,104	-0,088	0,0186	19,017
18,930	19,352	19,141	18,875	19,638	19,256	-0,115	0,0272	19,129
19,095	19,208	19,152	18,948	19,542	19,245	-0,093	0,0212	19,146
19,040	19,150	19,095	18,780	19,714	19,247	-0,152	0,0334	19,091
19,092	19,258	19,175	18,949	19,571	19,260	-0,085	0,0222	19,156
19,119	19,302	19,210	18,959	19,699	19,329	-0,119	0,0264	19,206
19,034	19,778	19,406	19,039	20,186	19,612	-0,206	0,0410	19,421
19,150	19,266	19,208	19,117	19,369	19,243	-0,035	0,0090	19,201

(масса чечевицы больше массы стержня и головки маятника вместе взятых).

Эти обстоятельства подтверждают правильность изложенных выше теоретических выводов о том, что температура тела зависит от распределения массы по его длине, расположенной в вертикальном направлении.

По данным табл. 2, принимая условно среднюю температуру маятника за эффективную температуру θ_e , а среднюю температуру окружающей среды за θ_i^0 и составляя для каждого γ_i условные уравнения вида

$$\gamma_i p = \Delta \theta_i,$$

где

$$\Delta \theta_i = \theta_i - \theta_i^0,$$

можно легко получить следующее нормальное уравнение:

$$[\gamma\gamma] p = [\gamma \Delta \theta],$$

откуда

$$p = \frac{[\gamma \Delta \theta]}{[\gamma\gamma]}. \quad (44)$$

Средняя квадратичная ошибка величины $\Delta \theta$ при одном измерении, т. е. ошибка единицы веса, определяется формулой:

$$\sigma = \sqrt{\frac{[v\bar{v}]}{n-1}}, \quad (45)$$

где

$$[v\bar{v}] = [\Delta \theta \cdot \Delta \theta] - [\gamma \cdot \Delta \theta] \cdot p;$$

n — число уравнений.

Средняя квадратичная ошибка среднего арифметического значения величины $\Delta \theta$ определяется по формуле:

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (46)$$

Если принять во внимание, что значение p определяется с весом, равным $[\gamma\gamma]$, то среднюю квадратичную ошибку значения коэффициента p следует вычислять по формуле:

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{\sqrt{[\gamma\gamma]}}. \quad (47)$$

Подставляя в формулы (44), (45), (46) и (47) численные значения соответствующих величин, получим:

$$\begin{aligned} p &= -4,8 \text{ см}; \\ \sigma &= \pm 0,01^\circ; \\ \sigma_{\text{ср}} &= \pm 0,003^\circ; \\ \sigma_p &= \pm 0,1 \text{ см}. \end{aligned}$$

Сравнительно небольшая величина полученных погрешностей в данном случае говорит о постоянстве коэффициента p в довольно широких пределах изменения температурного градиента γ . Если погрешности были бы большими, то судить о постоянстве коэффициента p нельзя, так как причиной больших погрешностей могли быть и изменчивость коэффициента p и плохое качество наблюдений.

Подставляя в выражение (42) значение $p = -4,8 \text{ см}$ и $L = 28 \text{ см}$, получим значение коэффициента q , входящего в формулу (41):

$$q = \frac{p}{L} = -0,171.$$

Погрешность полученного значения коэффициента q будет:

$$\sigma_q = \frac{1}{L} \sigma_p = \pm 0,004.$$

Определим теперь для нашего случая ту высоту z_0 , на которой следует измерять температуру окружающей среды, ближе всего соответствующую эффективной температуре маятника.

Подставляя в выражение (43) значение соответствующих величин, получим:

$$z_0 = \frac{L}{2} + p = \frac{28,0}{2} - 4,8 = 9,2 \text{ см}.$$

Таким образом, для получения эффективной температуры маятника по температуре окружающей среды, мы должны измерять температуру воздуха на высоте $z_0 = 9,2 \text{ см}$, что соответствует приблизительно $\frac{1}{3}$ длины маятника.

Произведенные нами эксперименты показали весьма близкое совпадение температуры θ маятника с температурой θ' воздуха на высоте, равной $\frac{1}{3}$ длины маятника (см. табл. 2).

Это обстоятельство еще раз показывает ошибочность установившегося в гравиметрии мнения о том, что для определения температуры маятника при наличии температурной слоистости в окружающей среде нужно определять температуру воздуха на средней высоте маятника или несколько выше. Правильнее будет в этом случае оценивать темпера-

туру маятника, измеряя температуру окружающего воздуха на высоте, равной приблизительно $\frac{1}{3}$ длины маятника. А еще лучше определять эффективную температуру маятника, пользуясь формулой (41).

Температурная слоистость воздуха во время наблюдений с маятниками существует всегда. Освободиться от нее полностью почти невозможно, и в то же время погрешности, вносимые ею в результаты наблюдений, не обнаруживаются по внутренней сходимости периодов маятников. Поэтому вопросы правильного учета влияния температурной слоистости на результаты наблюдений требуют к себе особого внимания. Кроме того, температурная слоистость воздуха не остается постоянной, она изменяется с изменением температуры. В связи с этим при определении температурных коэффициентов вопрос об определении эффективной температуры тела приобретает особо важное значение.

Вопрос об определении эффективной температуры тел мы рассмотрели на примере гравиметрических маятников для частного случая. Однако полученные выводы имеют более широкое значение. Эти выводы необходимо учитывать при определении температуры во время точных измерений вертикальных длин всевозможных тел, а также при определении температурных коэффициентов различных приборов. Так например, при температурных исследованиях маятниковых астрономических часов разность между средней температурой воздуха и эффективной температурой будет различной при различных температурных состояниях. Обычные методы обработки наблюдений не учитывают этого обстоятельства, что может привести к получению ошибочного значения остаточного температурного коэффициента маятниковых астрономических часов.

Применение указанных способов определения эффективной температуры к данному случаю даст более правильное значение конечных результатов.

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКОВ ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ С СИНХРОЧАСАМИ

При определении ускорения силы тяжести значение периода колебания маятников обычно получают с помощью хронометра.

При работе с хронометром, из-за больших вариаций суточного хода и невозможности фиксирования малых долей секунды, наблюдения над колебанием маятников на пункте продолжаются не менее восьми часов. Только при такой продолжительности наблюдений удастся получить значение периода маятника с требуемой точностью. Однако за это время сам маятник под влиянием различных трудно учитываемых причин может значительно изменить свой период и снизить тем самым точность конечных результатов.

Для сокращения времени наблюдений, а следовательно, и повышения их точности, в своей работе, начиная с 1948 г., мы применяем для определения периода маятника вместо хронометра синхрочасы со стробоскопическим отсчетом, питаемые переменным током, частота которого задается рабочим эталоном частоты Всесоюзного научно-исследовательского института метрологии (ВНИИМ). Синхрочасы были разработаны и изготовлены во ВНИИМ.¹

Использование эталона частоты позволило за несколько минут наблюдений получать значения периода маятников с такой точностью, которая является недостижимой при восьмичасовых наблюдениях с хронометром.

В настоящее время имеется полная возможность изготовлять синхрочасы переносного типа, а эталонные частоты транслировать по проводам и передавать по радио. Правда, применение транслируемых по радио эталонных частот для работы синхрочасов встречает некоторые трудности, но эти трудности могут быть легко преодолены. Таким образом, сейчас имеется возможность при относительных определениях силы тяжести заменить хронометр синхрочасами и сократить тем самым время наблюдений на пункте в 10—12 раз, при значительном повышении точности наблюдений.

Ниже дается краткое описание определения периодов обычных полусекундных маятников из наблюдений с синхрочасами.

1. Аппаратура и работа с ней

При работе был использован обычный четырехмаятниковый прибор с необходимой вспомогательной аппаратурой. Вместо хронометра и обычного счетчика были использованы синхрочасы и фотореле со счетчиком импульсов.

¹ А. Д. Вейсброт. Аппаратура для измерения малых промежутков времени и методы ее проверки, ВНИИМ, 1947.

В синхрочасах имеется два прозрачных циферблатных диска, которые приводятся в строго равномерное вращение синхронным мотором, питаемым переменным током, частота которого задается эталоном. Скорость вращения дисков относительно друг друга различна. Первый диск делает 10 оборотов в секунду. Второй диск вращается медленнее и делает один оборот за 10 сек.

Каждый из дисков разбит на 100 больших делений, которые оцифрованы от 0 до 99. Каждое большое деление на быстро вращающемся диске разбито на 5 равных частей. При мгновенном освещении дисков вспышкой строботрона (двухсеточная газосветная лампа с холодным катодом), можно наблюдать через соответствующую зрительную трубу неподвижно стоящее четырехзначное число, составленное из двузначных чисел вращающихся дисков. Прочитанное во время наблюдений четырехзначное число представляет собою определенный момент времени.

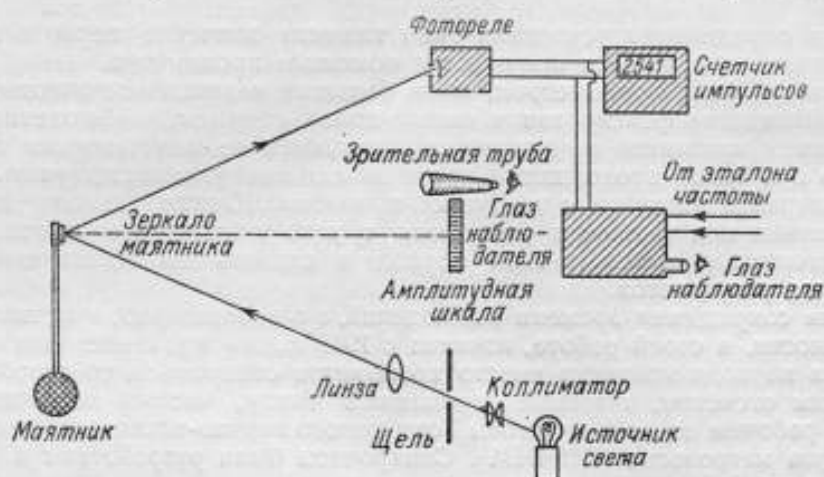


Рис. 1.

Разность между начальным и конечным отсчетом будет выражать собою продолжительность измеряемого интервала времени. Наибольший интервал времени, получаемый из отсчетов по циферблатным дискам, равен 10 сек. Но имеющийся в синхрочасах электромагнитный счетчик, управляемый секундным контактом, позволяет непосредственно измерять интервалы до 3600 сек., а практически измеряемые промежутки времени можно расширять до любых пределов.

Для повышения точности визуальных наблюдений синхрочасы имеют две зрительные трубы, которые дают возможность двум наблюдателям производить наблюдение одновременно. Кроме того, синхрочасы имеют фоторегистрирующее устройство, позволяющее значительно повысить точность измерения интервалов времени.

Определение периодов колебания маятников производилось следующим образом: от источника света, находящегося под амплитудной шкалой, на оптический мостик маятникового прибора направлялся узкий пучок света, который, отразившись от зеркала качающегося маятника, в моменты прохождения среднего положения попадал через узкую щель на светочувствительный слой фотозлемента, расположенного немного выше амплитудной шкалы. Импульсы от фотореле подавались одновременно на синхрочасы и на счетчик импульсов. На синхрочасах происходила вспышка строботрона и фиксировался соответствующий отсчет момента времени, а счетчик импульсов автоматически регистрировал число колебаний маятника. Отсчет амплитуды колебания маятников, изме-

рение температуры, влажности и атмосферного давления производились обычными способами.

На рис. 1 схематически показано расположение аппаратуры для определения периода колебания маятников.

2. Точность определения периода колебаний маятника

Методы определения абсолютного значения частоты были разработаны П. Н. Агалецким и получили дальнейшее развитие в лаборатории токов высокой частоты ВНИИМ.¹

Не останавливаясь на этих вопросах, укажем лишь только то, что величина погрешности воспроизведения абсолютного значения единицы времени по эталону частоты в настоящее время зависит в основном от погрешности астрономических наблюдений звездных прохождений, так как неустойчивость частоты кварцевого эталона значительно меньше этой погрешности. Для рабочего эталона частоты ВНИИМа погрешность воспроизведения абсолютного значения единицы времени оценивается сейчас величиной предельной относительной погрешности $\pm 3 \cdot 10^{-8}$. Исходя из этого, найдем промежуток времени, необходимый для определения периода колебания полусекундного маятника с указанной погрешностью из наблюдений с синхрочасами.

Допустим, что моменты времени на синхрочасах можно уверенно отсчитывать с погрешностью ρ .

В этом случае любой измеряемый интервал времени, являющийся разностью между конечным и начальным отсчетами, будет определяться с одной и той же абсолютной погрешностью:

$$\xi = \rho \sqrt{2}. \quad (1)$$

Среднее значение периода колебания маятника определяется по числу колебаний, совершенных маятником в измеренном интервале времени, т. е.

$$T = \frac{\tau}{k}, \quad (2)$$

где

τ — продолжительность в секундах измеренного интервала времени;
 k — число колебаний маятника в измеренном интервале времени.

Если в течение измеряемого интервала времени произошло k колебаний маятника, то среднее значение периода колебания T будет иметь абсолютную погрешность в k раз меньшую, чем погрешность всего интервала, т. е.

$$\eta = \pm \frac{\xi}{k}. \quad (3)$$

Из выражения (3) видно, что повышение точности определения периода маятника может быть достигнуто или увеличением k числа колебаний маятника за счет увеличения интервала времени, или уменьшением погрешности измерения последнего.

Излишнее увеличение интервала времени нежелательно из-за возможности изменения периода маятника под влиянием изменения воздействующих на него причин. Поэтому гораздо целесообразнее стре-

¹ П. Н. Агалецкий, Методы определения абсолютного значения частоты высокостабильных генераторов, Труды ВНИИМ, вып. 3 (45), Л-д, 1940.

миться не к увеличению интервала, а к повышению точности его измерения.

Для получения более точного значения измеряемого интеграла времени, как видно из выражения (1), необходимо уменьшить погрешность определения начального и конечного моментов времени.

Это можно осуществить двумя путями:

1. Повышением разрешающей способности измерительной аппаратуры.
2. Увеличением числа отсчетов начального и конечного моментов времени и получением из них средних значений.

Первый путь не всегда является доступным. Второй путь легко осуществим, конечно, при условии независимости определения отдельных интервалов и тождественности процесса колебания маятника в этих интервалах. Последнее требует, чтобы необходимое число n измерений производилось бы за наименьшее время. В этом случае погрешность средних значений начального и конечного моментов времени будет в \sqrt{n} раз меньше погрешности отдельного отсчета t . е.

$$\mu_s = \frac{\mu}{\sqrt{n}}, \quad (4)$$

следовательно, погрешность ξ_s среднего значения измеряемых интервалов времени будет:

$$\xi_s = \mu_s \sqrt{2} = \frac{\mu}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{2}. \quad (5)$$

В этом случае период колебания маятника будет определяться с погрешностью

$$\eta_k = \frac{\xi_s}{k} = \frac{\mu \sqrt{2}}{k \sqrt{n}}. \quad (6)$$

Если погрешность η_k задана, то число колебаний k , необходимое для нахождения периода колебания маятника с заданной точностью, будет определяться выражением

$$k = \frac{\mu \sqrt{2}}{\eta_k \sqrt{n}}. \quad (7)$$

Зная число колебаний маятника и приближенное значение периода, промежуток времени, необходимый для получения периода с заданной точностью, найдется из выражения (2).

$$\tau = T \cdot k.$$

На основании изложенного произведем количественную оценку ожидаемых погрешностей и найдем продолжительность времени, необходимого для определения периода с требуемой точностью.

Зная число делений и скорость вращения дисков синхроскопов, легко показать, что цена наименьшего деления шкалы быстрого диска равна $2 \cdot 10^{-4}$ сек. Следовательно, моменты времени можно отсчитывать, по крайней мере, с погрешностью не более чем

$$\mu = \pm 2 \cdot 10^{-4} \text{ сек.}$$

В этом случае при $n=16$ и $\eta_k = \pm 3 \cdot 10^{-8}$ сек. пользуясь формулой (7), получим:

$$k = \frac{2 \cdot 10^{-4} \sqrt{2}}{3 \cdot 10^{-8} \cdot 4} = 2357 \text{ колебаний,}$$

тогда, при $T = 0,493$ сек. время, необходимое для определения периода маятника с погрешностью $\pm 3 \cdot 10^{-8}$ сек. найдем из выражения (2)

$$\tau = 0,493 \cdot 2357 = 1162 \text{ сек.} \approx 20 \text{ мин.}$$

Заметим, что для определения ускорения силы тяжести с точностью до 1 миллигала вполне достаточно определить период полусекундного маятника с погрешностью $\pm 1 \cdot 10^{-7}$ сек. В этом случае будем иметь

$$k = \frac{2 \cdot 10^{-4} \sqrt{2}}{1 \cdot 10^{-7} \cdot 4} = 706 \text{ колебаний.}$$

что соответствует интервалу наблюдений:

$$\tau = 0,493 \cdot 706 = 348 \text{ сек.} \approx 6 \text{ мин.}$$

Таким образом, синхрочасы позволяют за шесть минут наблюдений совершенно уверенно получать значение периода полусекундного маятника с погрешностью $\pm 1 \cdot 10^{-7}$ сек., что при работе с хронометром, конечно, невозможно. При увеличении времени наблюдений и при использовании фоторегистрирующего устройства погрешность определения периода маятника может быть значительно уменьшена. Следует сказать, что в том случае, когда необходимо измерять период маятника в абсолютных единицах времени, как например, при определении ускорения силы тяжести, то точность определения периода будет ограничиваться погрешностью воспроизведения абсолютного значения единицы времени по эталону частоты. Несмотря на то, что вероятная погрешность определения периода полусекундного маятника в абсолютных единицах времени при наблюдениях с синхрочасами принята завышенной, $\pm 3 \cdot 10^{-8}$ сек., что фактически соответствует точности, получающейся из интервала наблюдений, равного 15—20 мин. тем не менее такая точность приблизительно в 5—10 раз выше той точности, которая получается из наблюдений с хронометром, при значительно большей продолжительности наблюдений. Эта точность определения периода маятника является вполне достаточной для точного определения ускорения силы тяжести g .

В том случае, когда нет необходимости измерять период колебания маятника в абсолютных единицах времени, как, например, при изучении причин нестабильности самих маятников, то устойчивость частоты кварцевого эталона позволяет получать значения периодов маятника с чрезвычайно высокой точностью. Это обстоятельство открывает большие возможности для глубокого изучения причин, влияющих на период колебания маятника, а также позволяет использовать маятник, как прибор для изучения целого ряда физических явлений.

3. Порядок наблюдений

Наблюдения производились в следующем порядке. После пуска всех четырех маятников отсчитывалась температура в приборе и амплитуда первого маятника. Затем через каждое строго определенное число секунд или число колебаний маятника на синхрочасах брались отсчеты. Эти отсчеты, как указывалось выше, соответствовали моментам прохождения луча через щель фотореле. Когда необходимое количество отсчетов для первого маятника оказывалось набранным, то температура в приборе и амплитуда первого маятника записывалась снова. После этого отсчитывалась амплитуда второго маятника и с ним производились аналогичные наблюдения.

Закончив первую группу наблюдений, переходили ко второй группе, где наблюдения производились в том же порядке, что и в первой. Наблюдения

первой и второй групп составляли одну серию наблюдений для определения периодов парных маятников.

Давление и влажность воздуха записывались один раз в середине серии. Коэффициент сокачания σ определялся обычным способом.

Заметим, что неточность установки щели фотореле в среднее положение относительно отклонений луча не вносила погрешностей в измерения, так как при помощи специального прерывателя брались отсчеты из одинаковых направлений движения луча.

В своей работе для записи наблюдений мы применяли две различные схемы наблюдений.

В первой схеме отсчеты на синхрочасах приурочивались к определенным заранее установленным моментам времени.

Во второй схеме отсчеты на синхрочасах приурочивались к заранее предусмотренным четным показаниям счетчика импульсов.

Первая схема дает возможность вести наблюдения без счетчика импульсов. Но ее недостатком является то, что в моменты совпадений колебания маятника с ритмом секундной стрелки синхрочасов наблюдения затрудняются и иногда попадают отсчеты из другого направления отклонения луча. Правда, эти отсчеты легко обнаруживаются по изменению разности приблизительно на 0,5 сек., но тем не менее, такие отсчеты приходится выбрасывать из наблюдений.

Вторая схема полностью исключает появление отсчетов из другого направления, так как отсчеты в моменты четных показаний счетчика импульсов всегда соответствуют отсчетам из одинаковых направлений движения луча.

Кроме того, эта схема дает возможность вместо дорогостоящих синхрочасов использовать обычный хроноскоп серийного производства, так как наблюдения по этой схеме не нуждаются в отсчетах целых и даже десятых долей секунды, а необходимые для определения периода маятника сотые, тысячные и десятитысячные доли секунды можно получать с таким же успехом на хроноскопах серийного производства.

Приведенные ниже примеры иллюстрируют способы определения периодов маятников из наблюдений с синхрочасами, а также показывают реальную точность визуальных наблюдений одного наблюдателя (см. пример 1, схема I и пример 2, схема II с соответствующими к ним пояснениями).

Пример 1

Схема I

Маятник № 1

Дата 19/IV 1949 г.

Серия I

Наблюдатель: Медведев

Время по синхрочасам	Отсчеты по дискам		Время по синхрочасам	Отсчеты по дискам		Разность отсчетов (интервал наблюдений)	$\sqrt{2} \cdot 10^{-4}$	$\sqrt{2} \cdot 10^{-8}$
	М	Б		М	Б			
$t = 20,60^{\circ}$ $A = 3,2 - 4,0$			$t = 20,63^{\circ}$ $A = 2,3 - 3,0$					
$10^6 5^{00}$	70	86	$10^6 25^{00}$	71	50	$20^{00}, 0$	64	
10	69	56	10	70	21		65	
20	73	15	20	73	80		65	
30	71	83	30	72	48		65	
40	70	53	40	71	17		64	
50	74	19	50	74	84		65	

Продолжение

Время по синхро-часам	Отсчеты по дискам		Время по синхро-часам	Отсчеты по дискам		Разность отсчетов (интервал наблюдений)	$v \cdot 10^{-4}$	$v^2 \cdot 10^{-8}$
	М	Б		М	Б			
7 ^m 00 ^s		91,9	27 ^m 00 ^s		56,0	1200 ^s ,0641	-1	1
10		58,0	10		22,0	640	-2	4
20		26,7	20		91,0	643	+1	1
30		96,1	30		60,2	641	-1	1
40		54,2	40		18,5	643	+1	1
50		23,0	50		87,1	641	-1	1
8 ^m 00 ^s		91,5	28 ^m 00 ^s		55,8	643	+1	1
10		59,5	10		23,5	640	-2	4
20		28,0	20		92,0	640	-2	4
30		97,6	30		61,9	643	+1	1
40		66,8	40		31,1	643	+1	1
50		36,4	50		0,6	642	0	0
$A = 2,9 - 3,8$			$A = 2,0 - 3,0$			1200 ^s ,06417 [v^2] = 20		
$t = 20,60^s$			$t = 20,65^s$			$k = 2432$		
						$T = 0^s,49344743$		

Влажность	Давление	Температура	Время
$t_{\text{наз}} = 18,60^s$ $t_{\text{сух}} = 20,60^s$	$B = 760,2 \text{ мм}$	$t = 21,1^s$	$\tau = 10^s 20^m$

Средняя квадратичная погрешность арифметического среднего определяется, как известно, по формуле:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} = \pm 3,9 \cdot 10^{-5} \text{ сек.},$$

следовательно,

$$\Delta T = \frac{m}{k} = \pm 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ сек.},$$

таким образом,

$$T = (0,49344743 \pm 2 \cdot 10^{-8}) \text{ сек.}$$

Маятник № 3

Дата 19/IV 1949 г.

Серия I

Наблюдатель: Медведь.

Время по синхро-часам	Отсчеты по дискам		Время по синхро-часам	Отсчеты по дискам		Разность отсчетов (интервал наблюдений)	$v \cdot 10^{-4}$	$v^2 \cdot 10^{-8}$
	М	Б		М	Б			
$t = 20,60^s$ $A = 3,3 - 4,0$			$t = 20,65^s$ $A = 2,5 - 3,2$					
10 ^h 14 ^m 00 ^s	74	02	10 ^h 34 ^m 00 ^s	74	70	20 ^m 0 ^s ,068		
10	72	71	10	73	39	68		
20	71	40	20	72	08	68		
30	70	10	30	70	78	68		
40	73	75	40	74	43	68		
50	72	45	50	73	13	68		

Время по синхрочасам	Отсчеты по дискам		Время по синхрочасам	Отсчеты по дискам		Разность отсчетов интервал-наблюдений	$\gamma \cdot 10^{-4}$	$\gamma^2 \cdot 10^{-8}$	
	М	Б		М	Б				
16 ⁰⁰		15,0	36 ⁰⁰		83,1	1200 ⁰ ,0681	-2	4	
10		84,5	10		52,6	681	-2	4	
20		53,5	20		21,6	681	-2	4	
30		22,0	30		90,0	680	-3	9	
40		80,5	40		48,5	680	-3	9	
50		49,8	50		18,0	682	-1	1	
17 ⁰⁰		18,9	37 ⁰⁰		86,9	680	-3	9	
10		85,8	10		54,0	682	-1	1	
20		54,2	20		22,7	685	+2	4	
30		23,6	30		92,1	685	+2	4	
40		91,6	40		60,3	687	+4	16	
50		50,1	50		18,8	687	+4	16	
$A = 2,9 - 3,8$ $A = 2,0 - 2,9$ $1200^0,06826$ $ \gamma^2 = 81$ $t = 20,62''$ $t = 20,65''$ $k = 2432$ $T = 0^0,49344912$									

$$m = \sqrt{\frac{|\gamma^2|}{n(n-1)}} = \pm 7,8 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}$$

$$\Delta T = \frac{m}{k} = \pm 3,2 \cdot 10^{-8} \text{ сек.,}$$

следовательно,

$$T = (0,49344912 \pm 3 \cdot 10^{-8}) \text{ сек.}$$

Пояснение к схеме I. В схеме I отсчеты моментов времени по дискам синхрочасов берутся через каждые целые 10 сек., записанные до наблюдений в графу „время по синхрочасам“.

В те моменты, когда секундная стрелка электромагнитного счетчика отсчитывает каждую десятую секунду, включается фотореле и в момент вспышки газосветной лампы (строботрона) берется отсчет по дискам синхрочасов.

При первых шести отсчетах в каждой полусерии берутся четырехзначные числа, составленные из отсчетов по большим делениям медленного и быстрого дисков.

При последующих 12 отсчетах главное внимание уделяется быстрому диску, с которого берутся отсчеты до половины наименьшего деления его шкалы, т. е. с погрешностью $\pm 1 \cdot 10^{-4}$ сек.

После окончания наблюдений, для определения интервала времени, из отсчетов, полученных во второй полусерии, вычисляются отсчеты, полученные в первой полусерии. При этом первые шесть отсчетов берутся с целью контроля последних целых секунд, даваемых секундной стрелкой электромагнитного счетчика и для получения приближенного интервала времени до тысячных долей секунды.

Последующие 12 отсчетов берутся для уточнения интервала времени до десятитысячных долей секунды.

Для определения периода маятника составляют среднее значение интервала времени и делят его на число колебаний, совершенных маятником в этом интервале.

Число колебаний легко определяется по приближенно известному периоду маятника или же берется со счетчика импульсов.

Остальные вычисления и записи схемы I ясны из описания порядка наблюдений и не требуют дополнительных пояснений.

Пример II

Схема II

Маятник № 2

Дата 25/IV 1949 г.

Серия III

Наблюдатель: Медведев.

Показания счетчика	Отсчеты по дискам		Показания счетчика	Отсчеты по дискам		Число колебаний	Разность отсчетов (интервал наблюдений)	$\nu \cdot 10^{-4}$	$\nu^2 \cdot 10^{-8}$
	М	Б		М	Б				
	$t = 19,80^\circ$ $A = 5,3 - 4,9$		$t = 19,80^\circ$ $A = 4,3 - 4,2$						
400	94,6	3 000	76,3	2 600	1282 ² ,9817	+ 2	4		
20	63,4	20	45,0	2 600	816	+ 2	1		
40	33,5	40	15,0	2 600	815	0	0		
60	02,0	60	83,3	2 600	813	- 2	4		
80	71,5	80	53,2	2 600	817	+ 2	4		
500	40,5	3 100	22,2	2 600	817	+ 2	4		
20	9,8	20	91,3	2 600	815	0	0		
40	78,9	40	60,3	2 600	814	- 1	1		
60	48,0	60	29,5	2 600	815	0	0		
80	17,6	80	98,8	2 600	812	- 3	9		
$A = 5,2 - 4,7$ $t = 19,80^\circ$		$A = 4,2 - 4,0$ $t = 19,80^\circ$		$1282^2,98151 [\nu^2] - 27$ $k = 2600$ $T = 0^s,49345442$					

Влажность	Давление	Температура	Время
$t_{\text{на}} = 16,7^\circ$ $t_{\text{сух}} = 20,0^\circ$	$B = 760,4 \text{ мм}$	$t = 20,0^\circ$	$\tau = 18^h 30^m$

$$m = \sqrt{\frac{[\nu^2]}{n(n-1)}} = \pm 5,1 \cdot 10^{-5} \text{ сек.},$$

$$\Delta T = \frac{m}{k} = \pm 2,1 \cdot 10^{-8} \text{ сек.},$$

следовательно,

$$T = (0,49345442 \pm 2 \cdot 10^{-8}) \text{ сек.}$$

Дата 25/IV 1949 г.

Наблюдатель: Медведев.

Показан- ния счетчи- ка	Отсчеты по дискам		Показа- ния счетчи- ка	Отсчеты по дискам		Число колеба- ний	Разность отсчетов (интервал наблюде- ний)	$v \cdot 10^{-4}$	$v^2 \cdot 10^{-8}$
	М	Б		М	Б				
$t = 19,80^\circ$ $A = 5,3-4,8$	$t = 19,80^\circ$ $A = 4,4-4,1$								
1 200	55,1	3 800	36,4	2 600	1282 ^o ,9813	0	0		
20	24,8	20	5,9	2 600	811	-2	4		
40	93,7	40	75,4	2 600	817	+4	16		
60	63,1	60	44,4	2 600	813	0	0		
80	32,5	80	13,6	2 600	811	-2	4		
1 300	1,7	3 900	82,9	2 600	812	-1	1		
20	70,8	20	52,0	2 600	812	-1	1		
40	39,8	40	21,2	2 600	814	+1	1		
60	8,9	60	90,2	2 600	813	0	0		
80	78,4	80	59,6	2 600	812	-1	1		
$A = 5,0-4,5$ $t = 19,80^\circ$						$A = 4,0-3,8$ $t = 19,80^\circ$		$1282^o,98128$ $[v^2] = 28$ $k = 2600$ $T = 0^o49345433$	

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} = \pm 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ сек.},$$

$$\Delta T = \frac{m}{k} = \pm 2,1 \cdot 10^{-8} \text{ сек.},$$

следовательно,

$$T = (0,49345433 \pm 2 \cdot 10^{-8}) \text{ сек.}$$

Пояснение к схеме II. В схеме II, в графе „Показания счетчика“ записывается до наблюдений каждое двадцатое колебание маятника.

Во время наблюдений, перед каждым двадцатым колебанием, регистрируемым счетчиком импульсов, включается фотореле и в момент вспышки газосветной лампы, который соответствует записанному (двадцатому) колебанию маятника, берется отсчет по шкале быстрого диска. Заметим, что наблюдения по этой схеме не нуждаются в отсчетах медленного диска, так как приближенное значение интервала времени легко определяется по заданному числу колебаний, заключенных в этом интервале и приближенно известному периоду маятника.

Отсчеты по быстрому диску необходимы для уточнения интервала времени между начальными и заключительными наблюдениями. Разность между этими отсчетами определяет сотые, тысячные и десятитысячные доли секунды интервала наблюдений.

Для определения периода маятника составляют среднее значение интервала времени и делят его на число колебаний маятника.

Число колебаний, совершенных маятником в измеренном интервале времени, задается до наблюдений и контролируется после наблюдений по разности показаний счетчика в первой и во второй полусериях.

Остальные вычисления и записи аналогичны схеме I и не нуждаются в пояснениях.

В заключение следует сказать, что методика определения периода колебания маятников из наблюдений с синхросами, разработанная в начале 1949 г., широко и успешно применяется в работах ВНИИМа.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
1. С. И. Торопин, Дифференциальный физический маятник с одной системой призма—подушка	5
2. С. И. Торопин, Влияние призмы и „подушки“ при абсолютном определении ускорения силы тяжести с помощью маятников	18
3. С. И. Торопин, Исключение влияния сокачания штатива при абсолютном определении ускорения силы тяжести с помощью поворотных маятников	26

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
6	6 снизу	$\dots + I_{n-1}^0 + m_{n-1} h_{n-1}^2;$	$\dots I_{n-1}^0 + m_{n-1} h_{n-1}^2 + I_n^0.$	Авт.
38	1 снизу	$t = \vartheta_z U,$	$t = \vartheta_z - U.$	Тип.

Труды ВНИИМ, вып. 23

Технический редактор Л. В. Соколова

Корректор В. М. Хорошенина

Слито и набор 19/X.1953 г. Подписано к печати 26/I.1954 г. М-16839. Формат бумаги 70 × 108²/₁₆.
 Печ. листов 5,13. Уч.-изд. листов 5,7. Тираж 600 экз. Заказ 2435.

Типография № 2 Ленгполиграфиздата. Ленинград, Социалистическая, 14.

Дата 25/IV 1949 г.

Наблюдатель: Медведев.

Показан- ния счетчи- ка	Отсчеты по дискам		Показа- ния счетчи- ка	Отсчеты по дискам		Число колеба- ний	Разность отсчетов (интервал наблюда- ний)	$\nu \cdot 10^{-4}$	$\nu^2 \cdot 10^{-8}$
	М	Б		М	Б				
$t = 19,80^\circ$ $A = 5,3 - 4,8$		$t = 19,80^\circ$ $A = 4,4 - 4,1$							
1 200		55,1	3 800		36,4	2 600	1282,9813	0	0
20		24,8	20		5,9	2 600	811	-2	4
40		93,7	40		75,4	2 600	817	+4	16
60		63,1	60		44,4	2 600	813	0	0
80		32,5	80		13,6	2 600	811	-2	4
1 300		1,7	3 900		82,9	2 600	812	-1	1
20		70,8	20		52,0	2 600	812	-1	1
40		39,8	40		21,2	2 600	814	+1	1
60		8,9	60		90,2	2 600	813	0	0
80		78,4	80		59,6	2 600	812	-1	1

с
е

Этот отсчет соответствует записанному (двадцатому) колебанию маятника, берется отсчет по шкале быстрого диска. Заметим, что наблюдения по этой схеме не нуждаются в отсчетах медленного диска, так как приближенное значение интервала времени легко определяется по заданному числу колебаний, заключенных в этом интервале и приближенно известному периоду маятника.

Отсчеты по быстрому диску необходимы для уточнения интервала времени между начальными и заключительными наблюдениями. Разность между этими отсчетами определяет сотые, тысячные и десятитысячные доли секунды интервала наблюдений.

Для определения периода маятника составляют среднее значение интервала времени и делят его на число колебаний маятника.

Число колебаний, совершенных маятником в измеренном интервале времени, задается до наблюдений и контролируется после наблюдений по разности показаний счетчика в первой и во второй полусериях.

Остальные вычисления и записи аналогичны схеме I и не нуждаются в пояснениях.

В заключение следует сказать, что методика определения периода колебания маятников из наблюдений с синхросами, разработанная в начале 1949 г., широко и успешно применяется в работах ВНИИМа.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
1. С. И. Торопин, Дифференциальный физический маятник с одной системой призма—подушка	5
2. С. И. Торопин, Влияние призмы и „подушки“ при абсолютном определении ускорения силы тяжести с помощью маятников	18
3. С. И. Торопин, Исключение влияния сокачания штатива при абсолютном определении ускорения силы тяжести с помощью поворотных маятников	26
4. Н. Н. Медведев, Определение температуры маятника при наличии температу- ратурной слоистости во внешней среде	32
5. Н. Н. Медведев, Методика определения периода колебания маятников из наблюдений с синхросами	49

Технический редактор *Л. В. Соколова*

Корректор *В. М. Хорошилова*

Слано в набор 19/X 1953 г.

Подписано к печати 26/1 1954 г.

М-16859.

Формат бумаги 70 × 108¹/₁₆

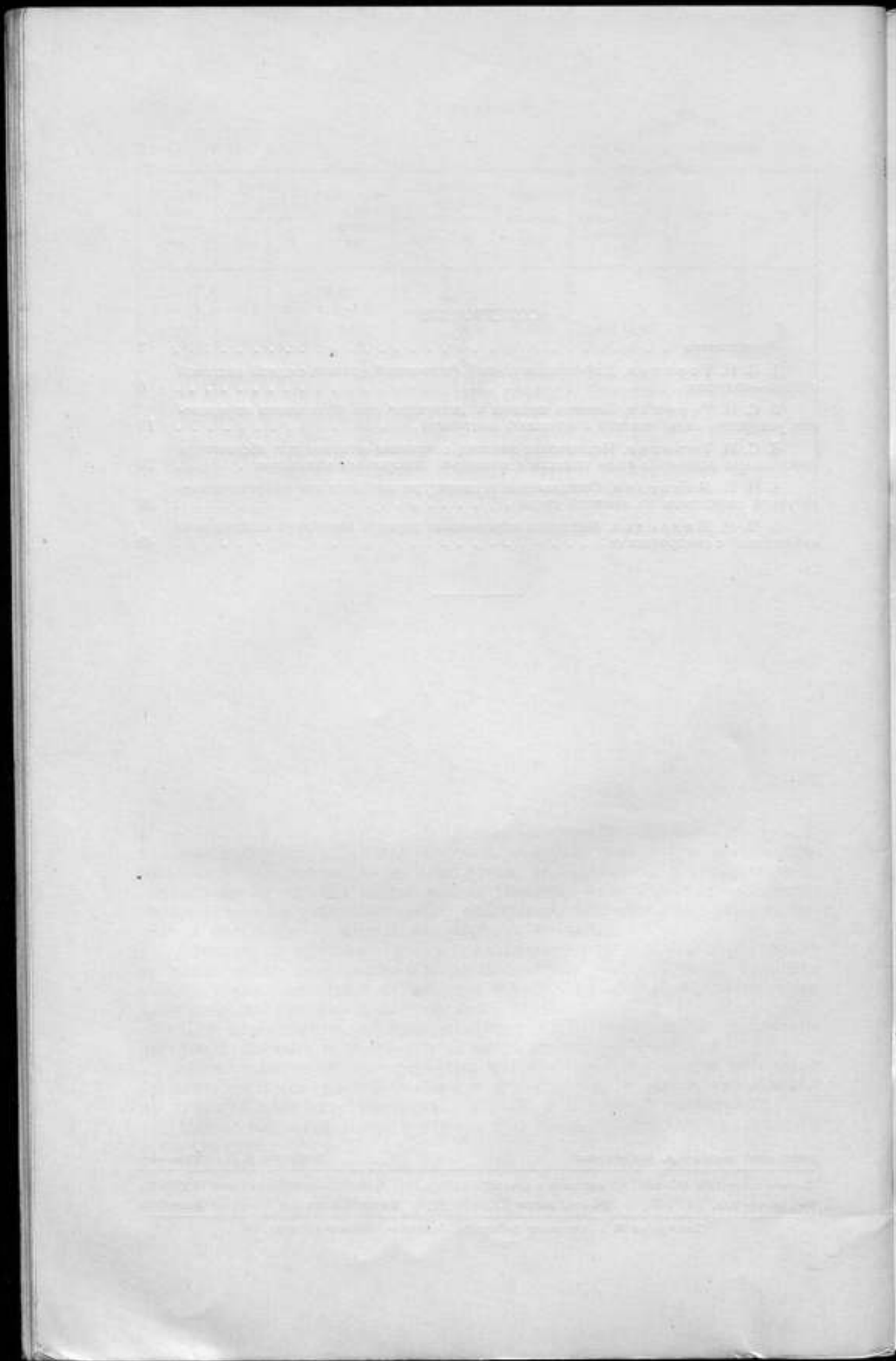
Печ. листов 5,13.

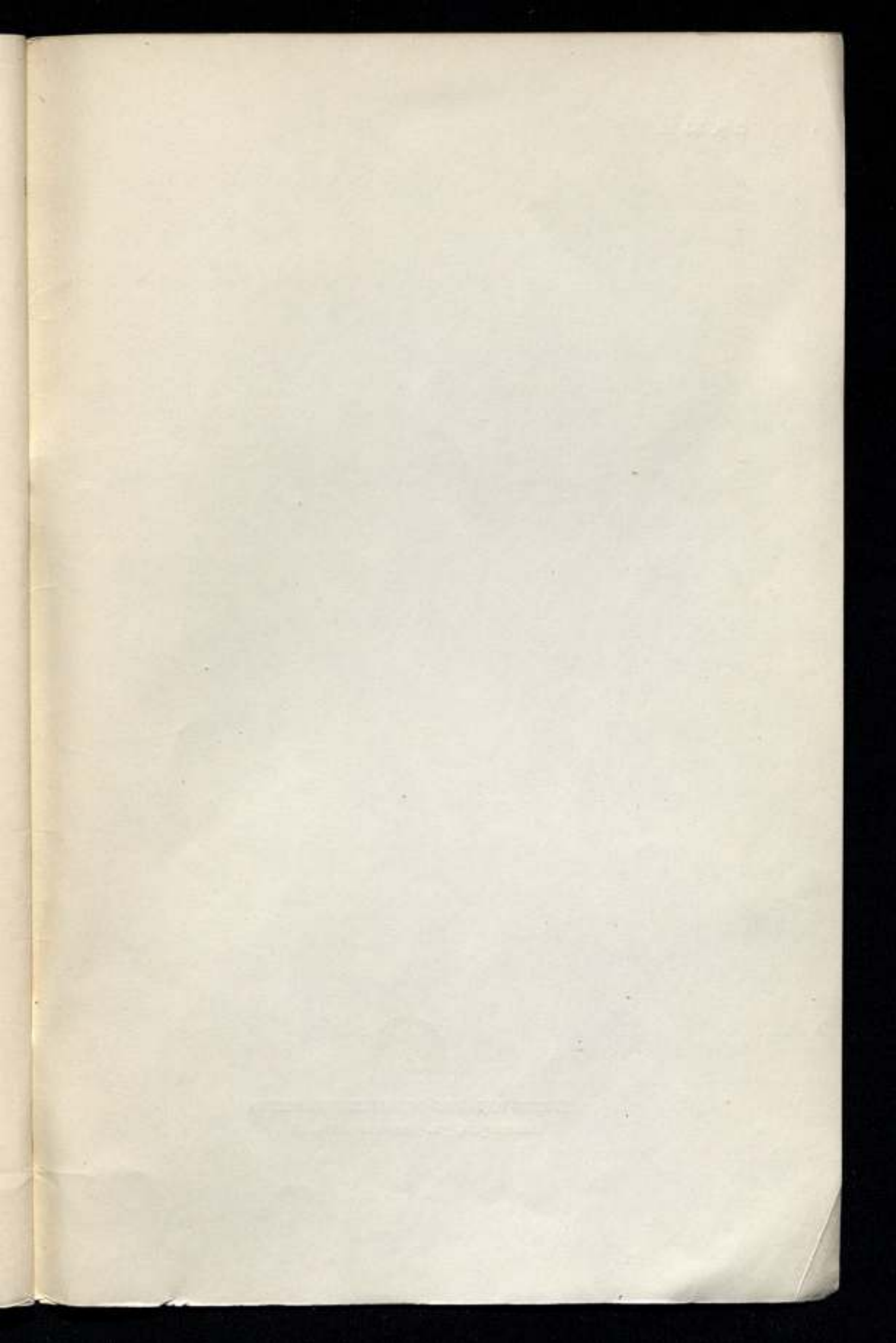
Уч.-изд. листов 5,7.

Тираж 600 экз.

Заказ 2435.

Типография № 2 Ленгортполиграфиздата, Ленинград, Социалистическая, 14.





2 р. 85 к.



МАШГИЗ

ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МАШГИЗА
Ленинград, ул. Дзержинского, 10