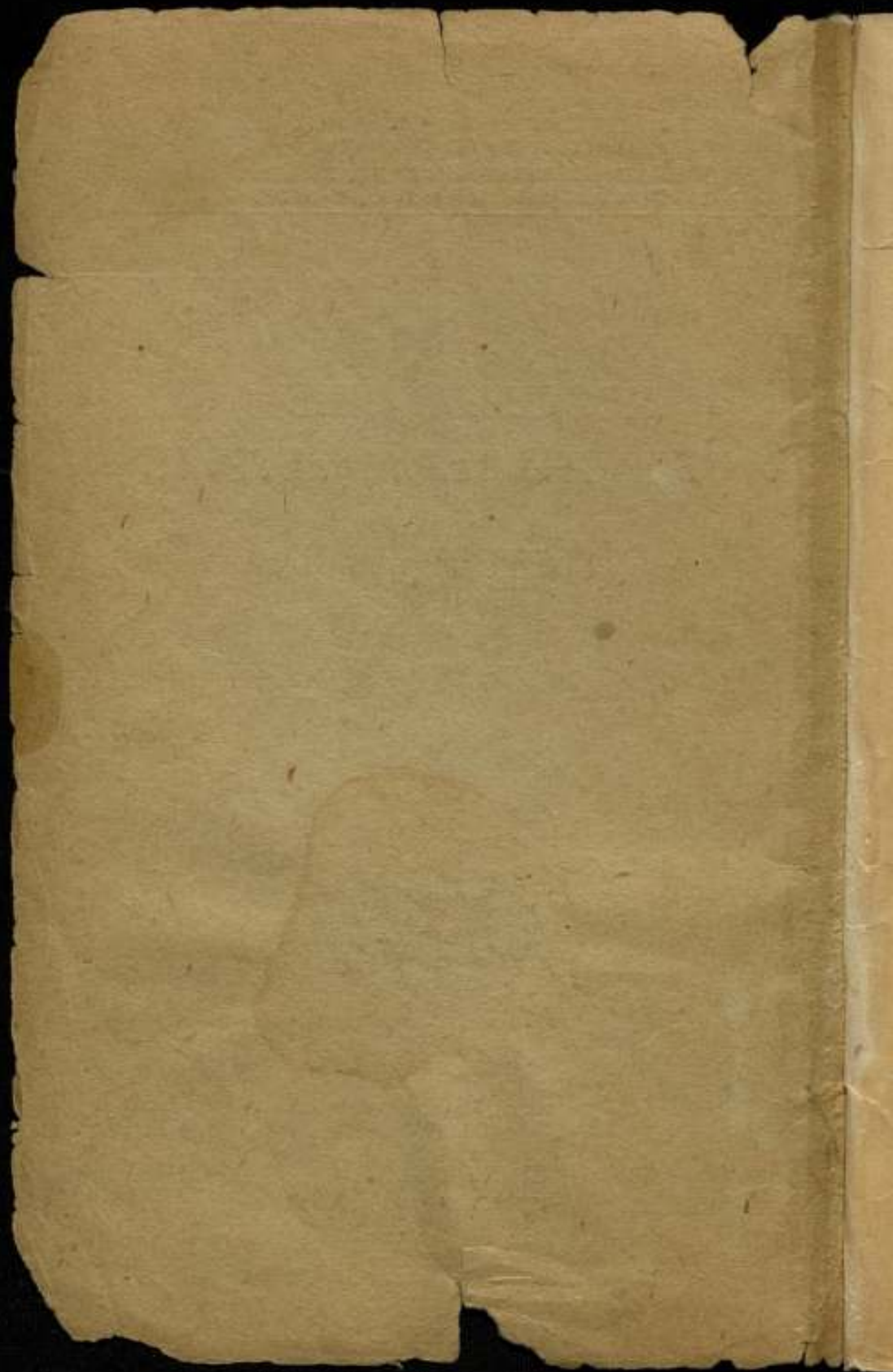


КОМИТЕТ ПО ДЕЛАМ МЕР И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ  
при СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР  
ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ им. Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

# ИССЛЕДОВАНИЕ В ОБЛАСТИ ТЕРМОМЕТРИИ

ТРУДЫ ВНИИМ  
ВЫПУСК 4(64)

ИЗДАНИЕ ВНИИМ  
ЛЕНИНГРАД—1948



КОМИТЕТ ПО ДЕЛАМ МЕР И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ  
при СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ им. Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

# ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ТЕРМОМЕТРИИ

ТРУДЫ ВНИИМ  
ВЫПУСК 4(64)

Под редакцией  
*проф. Г. М. Кондратьева*



ИЗДАНИЕ ВНИИМ  
ЛЕНИНГРАД — 1948

ЛУК

РА

ин-

на

ках

по-

али

ер-

ова-

ре-

ния

мо-

ется

мул

ри-

цем

ра-

всти

(1)

дру-

(2)

$R_0$

димо

ний.

ивле-

ачая

**ВОЗВРАТИТЕ КНИГУ НЕ ПОЗЖЕ  
обозначенного здесь срока**


РПМ БАН. в. 42, т. 1 000 000, 26-12-89 г.

## ОШИБКИ ЭТАЛОНИРОВАНИЯ ПЛАТИНОВОГО ТЕРМОМЕТРА СОПРОТИВЛЕНИЯ

Для решения поставленной задачи — анализа влияния ошибок эталонирования платиновых термометров сопротивления на точность определения температур в промежуточных точках шкалы — необходимо прежде всего так преобразовать интерполяционные формулы М. Ш. Т.<sup>1</sup>, чтобы они явно содержали экспериментально измеряемые величины — сопротивления термометра и температуры, наблюдавшиеся во время эталонирования в реперных точках.

Первый параграф настоящей работы посвящается этому преобразованию, во втором параграфе даны примеры применения преобразованных формул к решению некоторых задач термометрии. Вопрос о распределении ошибок вдоль шкалы решается исчерпывающим образом при помощи преобразованных формул в третьем параграфе. В четвертом параграфе приведены примеры использования общих формул, выведенных в предыдущем параграфе. Пятый параграф содержит краткое резюме всей работы.

### § 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ М. Ш. Т.

а) Возьмем прежде всего формулу, применяемую в области температур от 0° до 660°:

$$R_t = R_0 (1 + At + Bt^2) \quad (1)$$

Вводя обозначения  $a = R_0 A$  и  $b = R_0 B$ , мы придадим ей другой вид:

$$R_t = R_0 + at + bt^2 \quad (2)$$

В это уравнение второй степени входят три константы:  $R_0$ ,  $a$  и  $b$ . Для определения трех неизвестных величин необходимо и достаточно иметь систему из трех совместных уравнений. Систему из трех уравнений мы получим, измеряя сопротивления термометра при трех различных температурах. Обозначая

<sup>1</sup> Начальные буквы русских слов — международная шкала температур.

эти температуры буквами  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ , а соответствующие сопротивления буквами  $R_1$ ,  $R_2$ , и  $R_3$ , мы можем написать:

$$bt_1^2 + at_1 + R_0 = R_1$$

$$bt_2^2 + at_2 + R_0 = R_2$$

$$bt_3^2 + at_3 + R_0 = R_3$$

Для определенности мы будем предполагать, что выбранные температуры расположены в возрастающей последовательности, т. е., что  $t_1 < t_2 < t_3$ .

Вычислим определитель нашей системы уравнений:

$$D = \begin{vmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо столбца прибавить (в алгебраическом смысле) элементы любого другого столбца, умноженные на один и тот же множитель. Из элементов 1-го столбца нашего определителя  $D$ , являющегося определителем Вандермонда, вычтем элементы 2-го столбца, умноженные на  $t_1$ , а из элементов 2-го столбца вычтем элементы 3-го, также умноженные на  $t_1$ .

Путем последовательных преобразований получим:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} t_1^2 - t_1^2 & t_1 - t_1 & 1 \\ t_2^2 - t_2 t_1 & t_2 - t_1 & 1 \\ t_3^2 - t_3 t_1 & t_3 - t_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t_2(t_2 - t_1) & t_2 - t_1 & 1 \\ t_3(t_3 - t_1) & t_3 - t_1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (t_2 - t_1)(t_3 - t_1) \begin{vmatrix} t_2 & 1 \\ t_3 & 1 \end{vmatrix} = (t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_2 - t_3) \end{aligned}$$

По условию все три температуры различны, следовательно, определитель  $D \neq 0$  и общее решение системы уравнений можно написать по формулам Крамера в следующем виде:

$$b = \frac{\begin{vmatrix} R_1 & t_1 & 1 \\ R_2 & t_2 & 1 \\ R_3 & t_3 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{R_1(t_2 - t_3) + R_2(t_3 - t_1) + R_3(t_1 - t_2)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_2 - t_3)}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} t_1^2 & R_1 & 1 \\ t_2^2 & R_2 & 1 \\ t_3^2 & R_3 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{R_1(t_3^2 - t_2^2) + R_2(t_1^2 - t_3^2) + R_3(t_2^2 - t_1^2)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_2 - t_3)}$$

$$R_0 = \frac{\begin{vmatrix} t_1^2 & t_1 & R_1 \\ t_2^2 & t_2 & R_2 \\ t_3^2 & t_3 & R_3 \end{vmatrix}}{D} = \frac{R_1 t_2 t_3 (t_2 - t_3) + R_2 t_3 t_1 (t_3 - t_1) + R_3 t_1 t_2 (t_1 - t_2)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

Если подставим полученные выражения констант  $R_0$ ,  $a$  и  $b$  в формулу (2) и соберем отдельно все члены, содержащие  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , мы получим следующую формулу:

$$R_t = R_1 \frac{(t - t_2)(t - t_3)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} + R_2 \frac{(t - t_3)(t - t_1)}{(t_2 - t_3)(t_2 - t_1)} + R_3 \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \quad (3)$$

В этой формуле экспериментально определяемые величины — сопротивления термометра в трех реперных точках  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  — имеют множителями функции второй степени относительно температуры. Примем обозначения:

$$\varphi_1(t) = \frac{(t - t_2)(t - t_3)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} \quad (4)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{(t - t_3)(t - t_1)}{(t_2 - t_3)(t_2 - t_1)} \quad (5)$$

$$\varphi_3(t) = \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \quad (6)$$

Теперь формулу (3) можно переписать в сокращенном виде:

$$R_t = R_1 \varphi_1(t) + R_2 \varphi_2(t) + R_3 \varphi_3(t) = \sum_{i=1}^3 R_i \varphi_i(t) \quad (7)$$

Функции  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ , входящие в состав формулы (7) и определенные выражениями (4) — (6), мы будем в дальнейшем, для краткости речи, называть функциями влияния. Заметим, кстати, что выражение любой из этих функций  $\varphi_i$  можно получить из выражения любой другой функции  $\varphi_k$ , путем циклической перестановки индексов.

Сумма трех функций влияния равна тождественно единице, в чем нетрудно убедиться непосредственным вычислением и что мы ниже докажем иным способом.

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t) = 1 \quad (8)$$

Благодаря наличию этого тождественного соотношения, из числа трех функций влияния, независимыми являются только две из них. Заменяя поочередно каждую из них ее выражением через две других, мы можем получить наряду с формулой (7) три другие, содержащие разности сопротивлений термометра в точках эталонирования — интервалы.

Так, заменяя в ур-нии (7) функцию  $\varphi_1$  ее выражением через две других:  $\varphi_1 = 1 - \varphi_2 - \varphi_3$ , получим сначала ур-ние:

$$R_t = R_1 + (R_2 - R_1)\varphi_2 + (R_3 - R_1)\varphi_3$$

Переноса  $R_1$  в левую часть, получим уравнение, содержащее интервалы, вычисленные от сопротивления  $R_1$ :

$$R_t - R_1 = (R_2 - R_1)\varphi_2 + (R_3 - R_1)\varphi_3 \quad (9)$$

Аналогично можно вывести соотношения между другими интервалами:

$$R_t - R_2 = (R_1 - R_2)\varphi_1 + (R_3 - R_2)\varphi_3 \quad (10)$$

$$R_t - R_3 = (R_1 - R_3)\varphi_1 + (R_2 - R_3)\varphi_2 \quad (11)$$

Ниже мы остановимся на некоторых из этих ур-ний в связи с выводом формул Каллендара и Ван Дюзена.

Прежде чем перейти к рассмотрению значений функций влияния, вытекающих из принятых в настоящее время числовых значений для температур реперных точек, сделаем важное замечание: при выводе ур-ния (7) мы не наложили никаких ограничений на величины  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ . Формула (7) и вытекающие из нее формулы (9) — (11) могут служить поэтому для интерполяции при любом выборе этих величин.

Предполагая, например,  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ , убедимся, что благодаря существованию тождества (8), формула (7) дает  $R_t = R$  — постоянной величине во всех промежуточных точках между точками эталонирования.

Предполагая затем, что сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  являются линейными функциями температуры, мы убедимся, что и в этом случае формула (7) послушно воспроизведет для промежуточных значений аргумента линейный закон изменения сопротивления.

Формула (7) может, таким образом, служить для представления функциональной зависимости не выше второй степени.

Согласно „Положению о международной температурной шкале“, принятому в 1933 г. VIII Генеральной конференцией по мерам и весам, в качестве точек эталонирования платинового термометра сопротивления, в области температур от 0° до 660°, служат следующие реперные точки:

1. Точка плавления льда,  $t_1 = 0^\circ$ .
2. Точка кипения воды,  $t_2 = 100^\circ$  (при нормальном атмосферном давлении).
3. Точка кипения серы,  $t_3 = 444,60^\circ$  (при нормальном атмосферном давлении).

В дальнейшем изложении мы всюду будем пользоваться новыми индексами „0“, „100“ и „S“, вместо прежних индексов 1, 2 и 3.

Формула (1) после этой замены индексов получает окончательно такой вид:

$$R_t = R_0(1 + At + Bt^2) \equiv R_0 \cdot \varphi_0(t) + R_{100} \cdot \varphi_{100}(t) + R_s \cdot \varphi_s(t) \quad (12)$$



Сопротивление термометра при любой температуре является линейной функцией его сопротивлений  $R_0$ ,  $R_{100}$  и  $R_s$  в точках эталонирования. Коэффициенты при этих сопротивлениях, однако, не постоянные величины, а безразмерные функции температуры второй степени — функции влияния.

Дифференцируя по  $t$  ур-ние (12), получим выражение производной сопротивления по температуре, построенное аналогично ур-нию (12):

$$\frac{dR_t}{dt} = R_0(A + 2Bt) = R_0 \cdot \varphi'_0(t) + R_{100} \cdot \varphi'_{100}(t) + R_s \cdot \varphi'_s(t) \quad (13)$$

(Штрих здесь и в дальнейшем обозначает дифференцирование по  $t$ ).

Отметим некоторые важные свойства функций влияния.

1) Функции  $\varphi_0$ ,  $\varphi_{100}$  и  $\varphi_s$  являются универсальными функциями для всех термометров, не зависящими от индивидуальных свойств термометра, которые находят свое отражение согласно формулам (12) и (13), только в величинах  $R_0$ ,  $R_{100}$  и  $R_s$ . Функции  $\varphi_0$ ,  $\varphi_{100}$  и  $\varphi_s$  определены формулами:

$$\varphi_0(t) = \frac{(t-100)(t-444,60)}{44460} \quad (14)$$

$$\varphi_{100}(t) = -\frac{(t-444,60) \cdot t}{34460} \quad (15)$$

$$\varphi_s(t) = \frac{t(t-100)}{153209,16} \quad (16)$$

2) Справедливы равенства:

$$\varphi_0(t) = \frac{\partial R_t}{\partial R_0}, \quad \varphi_{100}(t) = \frac{\partial R_t}{\partial R_{100}}, \quad \varphi_s(t) = \frac{\partial R_t}{\partial R_s} \quad (17)$$

При дифференцировании по сопротивлению термометра в любой реперной точке, остальные сопротивления, в двух других реперных точках, считаются постоянными, как это следует из понятия частной производной. Строго говоря, следовало бы писать, например:

$$\varphi_0(t) = \left( \frac{\partial R_t}{\partial R_0} \right)_{R_{100}, R_s}$$

Однако можно сохранить упрощенные обозначения формул (17), если условиться помнить, какие именно переменные рассматриваются как постоянные при частном дифференцировании.

Формулы (17) оправдывают терминологию, принятую нами для обозначения функций  $\varphi$ : каждая из них характеризует влия-

ние сопротивления в реперной точке на сопротивление термометра при любой температуре.

Внося выражения (17) в формулу (12), мы получим формулировку теоремы Эйлера об однородных функциях в применении ее к частному случаю однородной функции первой степени от трех переменных:

$$R_t(R_0, R_{100}, R_s) = R_0 \frac{\partial R_t}{\partial R_0} + R_{100} \frac{\partial R_t}{\partial R_{100}} + R_s \frac{\partial R_t}{\partial R_s}$$

3) В точках эталонирования функции влияния принимают следующие значения:

$$\begin{array}{lll} \varphi_0(0) = 1 & \varphi_{100}(0) = 0 & \varphi_s(0) = 0 \\ \varphi_0(100) = 0 & \varphi_{100}(100) = 1 & \varphi_s(100) = 0 \\ \varphi_0(444,60) = 0 & \varphi_{100}(444,60) = 0 & \varphi_s(444,60) = 1 \end{array}$$

4) По теореме Роля между двумя корнями однозначной, конечной и непрерывной функции, обладающей непрерывной производной, находится по крайней мере один корень её производной. Легко найти, что

$$\begin{array}{ll} \varphi_0'(272,3^\circ) = 0 & \text{точка минимума, т. к. } \varphi_0'' > 0 \\ \varphi_{100}'(222,3^\circ) = 0 & \text{точка максимума, т. к. } \varphi_{100}'' < 0 \\ \varphi_s'(50) = 0 & \text{точка минимума, т. к. } \varphi_s'' > 0 \end{array}$$

5) Имеет место важное тождество:

$$\varphi_0(t) + \varphi_{100}(t) + \varphi_s(t) = 1 \quad (18)$$

Сумма всех трех функций влияния для любого значения температуры равна единице.

Чтобы обнаружить это свойство функций влияния, обратимся к рис. 1, изображающему зависимость  $R_t$  от температуры  $t$ .

Перенесем ось абсцисс параллельно самой себе на отрезок  $\Delta$  вниз, тогда в новой системе координат сопротивления в реперных точках будут  $R'_0$ ,  $R'_{100}$  и  $R'_s$ , причем:

$$\left. \begin{array}{l} R'_0 = R_0 + \Delta \\ R'_{100} = R_{100} + \Delta \\ R'_s = R_s + \Delta \\ R'_t = R_t + \Delta \end{array} \right\} \quad (19)$$

и вообще

Уравнение кривой в старой системе координат было:

$$R_t = R_0 \cdot \varphi_0 + R_{100} \cdot \varphi_{100} + R_s \cdot \varphi_s \quad (20)$$

Ур-ние кривой в новой системе координат будет:

$$R'_t = R'_0 \cdot \varphi_0 + R'_{100} \cdot \varphi_{100} + R'_s \cdot \varphi_s \quad (21)$$

Заменяя в уравнении (21) величины  $R'_0$ ,  $R'_{100}$ ,  $R'_s$  и  $R'_t$  их выражениями по формулам (19), получим:

$$R_t + \Delta = R_0 \cdot \varphi_0 + R_{100} \cdot \varphi_{100} + R_s \cdot \varphi_s + \Delta(\varphi_0 + \varphi_{100} + \varphi_s)$$

Отсюда, если принять во внимание ур-ние (20) и произвольность выбора температуры, и вытекает существование тождества (18).

Из трех функций влияния независимыми являются, таким образом, только две из них. Выберем в качестве независимых функций  $\varphi_{100}$  и  $\varphi_s$ . Тогда  $\varphi_0 = 1 - \varphi_{100} - \varphi_s$  и ур-ние (12) получит, после переноса  $R_0$  в левую часть, такой вид:

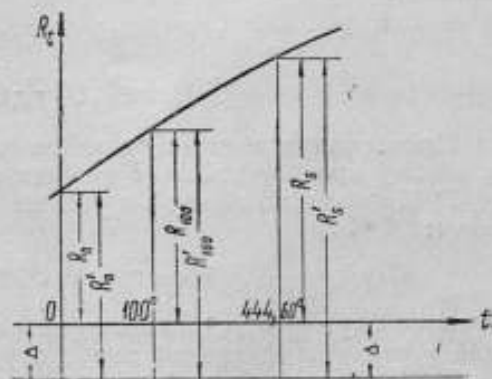


Рис. 1.

$$R_t - R_0 = (R_{100} - R_0) \varphi_{100} + (R_s - R_0) \varphi_s$$

Разделим обе части уравнения на  $\frac{R_{100} - R_0}{100}$ , получим

$$\frac{R_t - R_0}{R_{100} - R_0} 100 = 100 \varphi_{100} + \frac{R_s - R_0}{R_{100} - R_0} 100 \varphi_s \quad (22)$$

Выражение  $\frac{R_t - R_0}{R_{100} - R_0} 100$  принято называть платиновой темпе-

ратурой. Дробь  $\frac{R_s - R_0}{R_{100} - R_0} 100$  является, очевидно, платиновой температурой точки кипения серы.

Обозначим эти платиновые температуры соответственно буквами  $t_p$  и  $t_{ps}$  и подставим в ур-ние (22) выражения функций  $\varphi_{100}$  и  $\varphi_s$  (формулы 14 и 15). Тогда

$$t_p = \frac{100(t - 444,60)t}{34460} + t_{ps} \frac{t(t - 100)}{444,60 \cdot 344,60}$$

После некоторых преобразований получим

$$t_p = t + \frac{t_{ps} - 444,60}{344,60 \cdot 444,60} \cdot t(t - 100)$$

Обозначая дробь  $\frac{444,60 - t_{ps}}{344,60 \cdot 444,60}$  буквой  $\delta \cdot 10^{-4}$ , получим формулу Каллендара [1]:

$$t = t_p + 10^{-4} \delta t(t - 100) \quad (23)$$

6) Дифференцируя тождество (18) дважды по  $t$ , получим соотношения между первыми и вторыми производными функции влияния:

$$\varphi'_0(t) + \varphi'_{100}(t) + \varphi'_s(t) = 0 \quad (24)$$

$$\varphi''_0(t) + \varphi''_{100}(t) + \varphi''_s(t) = 0 \quad (25)$$

Производные высших порядков функций влияния равны нулю и потому продолжать этот ряд нет смысла.

7) Производные одной и той же функции связаны соотношением:

$$\varphi'(t) - t \cdot \varphi''(t) = \text{const},$$

которое служит простым следствием того, что каждая из функций  $\varphi$  является функцией температуры второй степени.

8) Константы  $A$  и  $B$  можно выразить через производные функций влияния. Дифференцируя ур-ние (13), получим:

$$\frac{dR_t}{dt} = 2R_0 B = R_0 \cdot \varphi''_0(t) + R_{100} \cdot \varphi''_{100}(t) + R_s \varphi''_s(t)$$

Отсюда

$$B = \frac{1}{2} [\varphi''_0(t) + W_{100} \cdot \varphi''_{100}(t) + W_s \cdot \varphi''_s(t)]$$

если буквами  $W_{100}$  и  $W_s$  обозначить соответственно отношения

$$\frac{R_{100}}{R_0} \text{ и } \frac{R_s}{R_0}.$$

Зная  $B$ , из ур-ния (13), находим  $A$

$$A = \frac{1}{R_0} \frac{dR_t}{dt} - 2Bt = \left\{ \varphi'_0(t) - t\varphi''_0(t) \right\} + W_{100} \left\{ \varphi'_{100}(t) - t\varphi''_{100}(t) \right\} + \\ + W_s \left\{ \varphi'_s(t) - t\varphi''_s(t) \right\}$$

Вычислив производные, найдем:

$$10^3 A = 12,901\,9153 (W_{100} - 1) - 0,652\,702\,5 (W_s - 1) \quad (26)$$

$$10^2 B = -290,191\,526 (W_{100} - 1) + 65,270\,249 (W_s - 1) \quad (27)$$

б) Займемся теперь аналогичным преобразованием формулы М. Ш. Т. для области от  $0^\circ$  до  $-190^\circ$ :

$$R_t = R_0 [1 + At + Bt^2 + C(t-100)t^2] \quad (28)$$

Константы  $A$  и  $B$ , входящие в формулу, те же, что и выше (см. раздел "а"), остается определить дополнительную константу  $C$ , используя результаты измерения сопротивления термометра в точке кипения кислорода. Обозначим буквой  $t_{0_2}$  температуру кипения кислорода при нормальном атмосферном давлении (согласно "Положению"  $t_{0_2} = -182,97$ ). Мы можем написать:

$$R_{0_2} = R_0 \cdot \varphi_0(t_{0_2}) + R_{100} \cdot \varphi_{100}(t_{0_2}) + R_s \cdot \varphi_s(t_{0_2}) + CR_0 t_{0_2}^2 (t_{0_2} - 100)$$

Отсюда:

$$CR_0 = \frac{R_{0_2} - R_0 \cdot \varphi_0(t_{0_2}) - R_{100} \cdot \varphi_{100}(t_{0_2}) - R_s \varphi_s(t_{0_2})}{t_{0_2}^2 (t_{0_2} - 100)}$$

Внося это значение  $CR_0$  в формулу (28) и группируя отдельно члены, содержащие сопротивления в реперных точках, получим необходимое для нас выражение:

$$\begin{aligned} R_t = R_0 & \left\{ \varphi_0(t) - \varphi_0(t_{0_2}) \frac{t^2(t-100)}{t_{0_2}^2(t_{0_2}-100)} \right\} + \\ & + R_{100} \left\{ \varphi_{100}(t) - \varphi_{100}(t_{0_2}) \frac{t^2(t-100)}{t_{0_2}^2(t_{0_2}-100)} \right\} + \\ & + R_s \left\{ \varphi_s(t) - \varphi_s(t_{0_2}) \frac{t^2(t-100)}{t_{0_2}^2(t_{0_2}-100)} \right\} + R_{0_2} \frac{t^2(t-100)}{t_{0_2}^2(t_{0_2}-100)} \end{aligned}$$

Обозначим функцию температуры 4-й степени, входящую в это выражение множителем при  $R_{0_2}$ , символом  $\Psi_{0_2}(t)$ , затем выражения в фигурных скобках обозначим так:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0(t) &= \varphi_0(t) - \varphi_0(t_{0_2}) \cdot \Psi_{0_2}(t) \\ \Psi_{100}(t) &= \varphi_{100}(t) - \varphi_{100}(t_{0_2}) \cdot \Psi_{0_2}(t) \\ \Psi_s(t) &= \varphi_s(t) - \varphi_s(t_{0_2}) \cdot \Psi_{0_2}(t) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

С этими обозначениями формула М. Ш. Т. для области температур от  $0^\circ$  до  $-190^\circ$  получит вид:

$$\begin{aligned} R_t = R_0 [1 + At + Bt^2 + C(t-100)t^2] = R_0 \Psi_0(t) + R_{100} \cdot \Psi_{100}(t) + \\ + R_s \Psi_s(t) + R_{0_2} \cdot \Psi_{0_2}(t) \end{aligned} \quad (30)$$

Функции температуры 4-й степени  $\Psi_0$ ,  $\Psi_{100}$ ,  $\Psi_s$  и  $\Psi_{0_2}$  не зависят от индивидуальных свойств термометра, которые находят свое выражение в величинах  $R_0$ ,  $R_{100}$ ,  $R_s$  и  $R_{0_2}$ . Эти функции мы также назовем функциями влияния.

Отметим некоторые их свойства, аналогичные свойствам функций  $\varphi$ :

1) Каждая из функций может быть определена, как частная производная сопротивления термометра по сопротивлению термометра в соответствующей этой функции реперной точке.

$$\Psi_0(t) = \frac{\partial R_t}{\partial R_0}, \quad \Psi_{100}(t) = \frac{\partial R_t}{\partial R_{100}}, \quad \Psi_s(t) = \frac{\partial R_t}{\partial R_s}, \quad \Psi_{0_2}(t) = \frac{\partial R_t}{\partial R_{0_2}}$$

Напомним, что при этом дифференцировании все остальные „реперные“ сопротивления рассматриваются как постоянные.

2) В реперных точках функции влияния  $\Psi$  принимают следующие частные значения:

$$\Psi_0(0) = 1 \quad \Psi_{100}(0) = 0 \quad \Psi_s(0) = 0 \quad \Psi_{0_2}(0) = 0$$

$$\Psi_0(t_{0_2}) = 0 \quad \Psi_{100}(t_{0_2}) = 0 \quad \Psi_s(t_{0_2}) = 0 \quad \Psi_{0_2}(t_{0_2}) = 1$$

Функции влияния  $\varphi$  в точке кипения кислорода не равны нулю, так как эта точка для них является посторонней, не участвует в их определении. Это надо помнить, вычисляя функции по формулам (29).

3) При любой температуре имеет силу тождество:

$$\Psi_0(t) + \Psi_{100}(t) + \Psi_s(t) + \Psi_{0_2}(t) = 1 \quad (31)$$

Проще всего в этом убедиться, подставляя значения функций  $\Psi$  из формул (29) и принимая во внимание ранее доказанное тождество (18).

Существование этого тождества позволяет из 4 функций рассматривать, как независимые, только 3. Выберем, например, в качестве независимых функции  $\Psi_{100}$ ,  $\Psi_s$  и  $\Psi_{0_2}$ . Тогда из уравнения (30) получим сначала уравнение в интервалах:

$$R_t - R_0 = (R_{100} - R_0) \Psi_{100} + (R_s - R_0) \Psi_s + (R_{0_2} - R_0) \Psi_{0_2} \quad (32)$$

Деля это уравнение на сотую часть основного интервала  $R_{100} - R_0$ , получим уравнение, содержащее платиновые температуры (ср. стр. 9).

$$t_p = 100 \Psi_{100} + t_{ps} \cdot \Psi_s + t_{p0_2} \cdot \Psi_{0_2}$$

Подставим сюда выражения функций  $\Psi$  по (29). Теперь будем иметь:

$$t_p = 100 \varphi_{100} + t_{ps} \cdot \varphi_s + \Psi_{0_2} [t_{p0_2} - 100 \varphi_{100}(t_{0_2}) - t_{ps} \varphi_s(t_{0_2})]$$

Сумма первых двух членов в правой части может быть, как мы уже показали выше, представлена в виде:

$$t - 10^{-4} \delta t (t - 100)$$

Если мы вспомним определение  $\Psi_{0_2}$ , используем его для подстановки в уравнение (33) и введем обозначение:

$$\frac{t_{p_{0_2}} - 100 \varphi_{100}(t_{0_2}) - t_{p_s} \cdot \varphi_s(t_{0_2})}{t_{0_2}^2 (t_{0_2} - 100)} = -10^{-8} \beta \quad (33)$$

мы придем в результате всех преобразований к формуле:

$$t = t_p + 10^{-4} \delta t (t - 100) + 10^{-8} \beta t^3 (t - 100) \quad (34)$$

известной под названием формулы Ван Дюзена [4].

Часто эту формулу пишут несколько иначе:

$$t = t_p + \delta \left( \frac{t}{100} - 1 \right) \cdot \frac{t}{100} + \beta \left( \frac{t}{100} - 1 \right) \cdot \left( \frac{t}{100} \right)^3$$

Мы показали, что формулы Каллендара и Ван Дюзена являются частными случаями формул в интервалах, при выборе в качестве основного интервала интервала  $F = R_{100} - R_0$  и в качестве зависимых функций — функций  $\varphi_0$  и  $\Psi_0$ .

4) Дифференцируя тождество (31) по температуре четыре раза, получим тождественные соотношения между производными функций  $\Psi$ :

$$\Psi_0^{(i)}(t) + \Psi_{100}^{(i)}(t) + \Psi_s^{(i)}(t) + \Psi_{0_2}^{(i)}(t) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Производные функций  $\Psi$  выше четвертого порядка равны нулю и продолжать дифференцирование дальше нет смысла, так как при этом получим выражение тривиального факта, что производная любого порядка от суммы постоянных количеств  $\Psi^{IV}$  равна нулю.

5) Производные одной и той же функции связаны равенством

$$\Psi_k^{(i)} - t \cdot \Psi_k^{(i-1)} = \text{const}$$

которое вытекает из того, что любая функция  $\Psi$  является функцией температуры четвертой степени.

6) Легко выразить константу  $C$  в формуле М. Ш. Т. (28) через высшие производные функций  $\Psi$ . Дифференцируя равенство (30) четыре раза, найдем:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 R_t}{dt^4} = 4! \cdot R_0 C = R_0 \Psi_0^{(IV)}(t) + R_{100} \cdot \Psi_{100}^{(IV)}(t) + R_s \cdot \Psi_s^{(IV)}(t) + \\ + R_{0_2} \cdot \Psi_{0_2}^{(IV)}(t) \end{aligned}$$

Отсюда

$$C = \frac{1}{24} [\Psi_0^{IV} + W_{100} \Psi_{100}^{IV} + W_s \cdot \Psi_s^{(IV)} + W_{02} \cdot \Psi_{02}^{IV}]$$

Примечание: Нетрудно заметить, что выведенная в этом параграфе формула (3) является известной интерполяционной формулой Лагранжа [2]. Автор предпочел ее вывести, не воспользовавшись ею в готовом виде, потому что во всех известных ему математических руководствах интерполяционная формула Лагранжа преподносится догматически или обосновывается крайне искусственно (например, заранее исходят из возможности построить функции  $\varphi_i$  с теми свойствами

$$\varphi_i(t_k) = z_{ik} \begin{cases} = 0 & i \neq k \\ = 1 & i = k \end{cases}$$

которые на принятом в этом параграфе пути явились простым следствием структуры формул). Вычисляя в общем виде константы полинома  $n$ -степени по заданным значениям его для  $(n+1)$  значений аргумента, можно получить формулу Лагранжа, без всяких произвольных допущений или предположений и этот путь ее вывода имеет поэтому большой дидактический интерес.

Формула (30) уже не является формулой Лагранжа. Применение формулы Лагранжа 4-й степени для преобразования интерполяционной формулы (28) невозможно, потому что при определении констант  $A$  и  $B$  константа  $C$  не принимается во внимание.

## § 2 ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

На двух чертежах рис. 2 и рис. 3 изображены введенные в предыдущем параграфе функции влияния, отдельно для каждой из двух областей применения платинового термометра. Одновременно на этих же чертежах представлена зависимость от температуры отношения  $W_t = \frac{R_t}{R_0}$ , вычисленная по следующим значениям этого отношения в реперных точках:

$$W_{02} = 0,246 \quad W_{100} = 1,391 \quad W_s = 2,651$$

Функции влияния могут быть применены для решения ряда задач платиновой термометрии: они позволяют составить таблицы  $R_t$  и  $\frac{dR_t}{dt}$  для любого термометра и дают возможность анализировать влияние ошибок в точках эталонирования на результаты измерения любой температуры. Ниже мы приводим несколько числовых примеров и воспользуемся для вычислений таблицами 1 и 2. В этих таблицах даны числовые значения функций влияния с 7 десятичными знаками, что позволяет пользоваться табличными данными при вычислениях для термометров с сопротивлением  $R_0$ , не превышающим 26 омов. Погрешность результата при соблюдении этого условия не будет превосходить  $5 \cdot 10^{-5}$  ома.

Возможность вычислить  $R_t$  и  $\frac{dR_t}{dt}$  для любого термометра, не прибегая к вычислению его констант, бывает особенно ценна при использовании для сравнения результатов работ другого автора. Необходимой предпосылкой таких вычислений является



наличие данных о сопротивлении термометра в реперных точках (или данных об отношениях  $W_t = R_t : R_0$  в этих точках). В условиях эталонирования, если для осуществления точек кипения

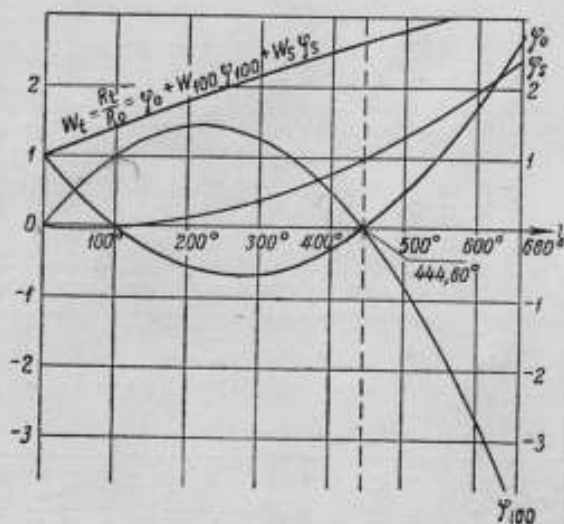


Рис. 2

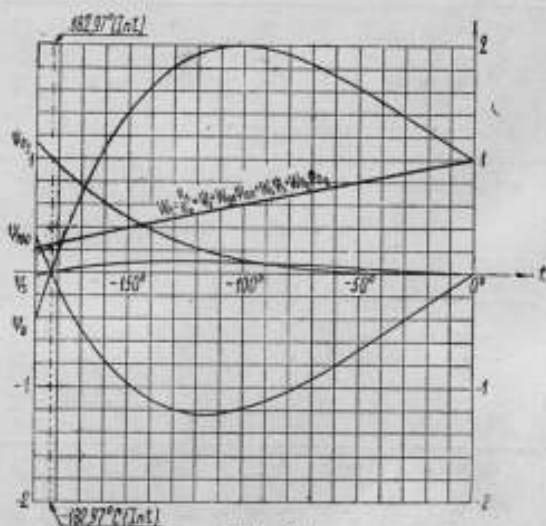


Рис. 3

не применяются маностаты, экспериментаторы получают зачастую значения сопротивлений при температурах, сильно отличающихся от тех значений, которые приписаны им при нормаль-

Таблица 1

Числовые значения функций влияния  $\varphi$  и их производных

$t$	$\varphi_0(t)$	$10^5 \cdot \varphi_0'$	$10^5 \cdot \frac{\varphi_0''}{2}$	$\varphi_{100}(t)$	$10^5 \cdot \varphi_{100}'$	$10^5 \cdot \frac{\varphi_{100}''}{2}$	$\varphi_s(t)$	$10^5 \cdot \varphi_s'$	$10^5 \cdot \frac{\varphi_s''}{2}$
0	+1,0000000	-12,2492	+2,2492	0,0000000	+12,9019	-2,5019	0,0000000	-0,65270	+0,65270
20	+0,7640126	-11,3495	•	+0,2464306	+11,7411	•	-0,0104432	-0,39162	•
50	+0,4437698	-10,0000	•	+0,5725479	+10,0000	•	-0,0163176	0,00000	•
100	0,0000000	-7,5078	•	+1,0000000	+7,09808	•	0,0000000	+0,65270	•
150	-0,3313090	-5,50157	•	+1,2823564	+4,19617	•	+0,0489527	+1,30540	•
200	-0,5501574	-3,25236	•	+1,4196170	+1,29425	•	+0,1305405	+1,95811	•
222,30	-0,6115000	-2,24921	•	+1,4340479	0,00000	•	-0,1774521	+2,24921	•
250	-0,6565452	-1,03315	•	+1,4117818	-1,60766	•	-0,2447634	+2,61081	•
272,30	-0,6677303	0,00000	•	+1,3615000	-2,90192	•	+0,3062303	+2,90192	•
300	-0,6504723	+1,24606	•	+1,2588508	-4,50958	•	+0,3916215	+3,26351	•
350	-0,5319388	+3,49528	•	+0,9608241	-7,41149	•	+0,5711147	+3,91621	•
400	-0,3009447	+5,74449	•	+0,5177017	-10,31341	•	+0,7832400	+4,56892	•
444,60	0,0000000	+7,75079	•	0,0000000	-12,90192	•	+1,0000000	+5,15113	•
450	+0,0425101	+7,99370	•	-0,0705165	-13,21532	•	+1,0280064	+5,21162	•
500	+0,4984255	+10,24292	•	-0,8038305	-16,11724	•	+1,3054050	+5,87432	•
550	+1,0668016	+12,49213	•	-1,6822403	-19,01915	•	+1,6154386	+6,52702	•
600	+1,7476383	+14,74134	•	-2,7057458	-21,92107	•	+1,9581075	+7,17973	•
630	+2,2101215	+16,09087	•	-3,3894951	-23,66222	•	+2,1793736	+7,57135	•
660	+2,7130904	+17,41040	•	-4,1254788	-25,40337	•	+2,4123884	+7,96297	•

Числовые значения функций  $\Psi$  и их первых производных

$-t$	$\Psi_0(t)$	$10^2 \cdot \Psi'_0$	$\Psi_{100}(t)$	$10^2 \cdot \Psi'_{100}$	$\Psi_s(t)$	$10^4 \cdot \Psi'_s$	$\Psi_0(t)$	$10^9 \cdot \Psi'_0$
0	+1,0000000	-12,2492	0,0000000	+12,9319	0,0000000	-0,6527	0,0000000	0,0000
10	+1,244878	-12,6207	-0,1317036	+13,4169	-0,0671583	-0,7766	-0,0000000	-0,0196
20	+1,2517690	-12,7986	-0,2678005	+13,7705	-0,0154777	-0,8841	-0,0006335	-0,0877
30	+1,3796369	-12,7280	-0,4064270	+13,9166	-0,0247111	-0,9707	-0,0020250	-0,2180
38,87	+1,4913163	-12,4119	-0,5296635	+13,8349	-0,0336421	-1,0289	-0,0047031	-0,3970
40	+1,5053087	-12,3526	-0,5452825	+13,8086	-0,0348044	-1,0314	-0,0051693	-0,4246
50	+1,6254840	-11,6180	-0,5815984	+13,4008	-0,0452971	-1,0617	-0,0108174	-0,7211
60	+1,7362852	-10,4686	-0,8121453	+12,6470	-0,0559215	-1,0569	-0,0199386	-1,1215
70	+1,8332882	-8,8491	-0,9332320	+11,5011	-0,0653032	-1,0124	-0,0336405	-1,6396
78,5	+1,9011895	-7,0616	-1,0256290	+10,1842	-0,0748237	-0,9386	-0,0498158	-2,1829
80	+1,9115154	-6,7042	-1,0407062	+9,9168	-0,0760213	-0,9234	-0,0531695	-2,2892
90	+1,9654365	-3,9786	-1,1299541	+7,8481	-0,0846076	-0,7853	-0,0799160	-3,0842
100	+1,9889677	-0,6170	-1,1989005	+5,2489	-0,0915476	-0,5934	+0,1153852	-4,0385
110	+1,9754725	+3,4359	-1,2330087	-2,0728	-0,0962798	-0,3429	+0,1612565	-5,1658
120	+1,9177612	+8,2354	-1,2352810	-1,7250	-0,0981958	-0,0293	+0,2193241	-6,4800
130	+1,8080912	+13,8368	-1,1962581	-6,1839	-0,0966405	+0,3521	+0,2915264	-7,9950
140	+1,5381666	+20,2955	-1,1090191	-11,3769	-0,0909122	+0,8061	+0,3799402	-9,7246
150	+1,3991389	+27,6657	-0,9651821	-17,3212	-0,0802621	+1,3372	+0,4867811	-11,6827
160	+1,0816039	+36,0058	-0,7599035	-24,0729	-0,0638948	+1,9503	+0,6144079	-13,8831
170	-0,6756130	+45,3480	-0,4818789	-31,6782	-0,0409581	+2,6499	+0,7652978	-16,3397
180	-0,1706519	+55,8086	-0,1233416	-40,1831	+0,0105929	+3,4408	+0,9420967	-19,0662
182,97	0,0000000	+59,1253	0,0000000	-42,8892	0,0000000	+3,6939	+1,0000000	-19,9301
190	-0,4443380	+67,3830	+0,3249358	-49,6339	-0,0281667	+4,3275	+1,1475688	-22,0766



ном атмосферном давлении. Остановимся поэтому на вопросе о вычислении нужных нам приведенных величин, относящихся к температурам кипения при нормальном атмосферном давлении. Для определенности разберем случай вычисления  $R_{100}$  по сопротивлению термометра  $R_t$  при температуре  $t$ , отличной от  $100^\circ$ , но близкой к ней.

Формула Тейлора дает в рассматриваемом случае следующее выражение:

$$R_t = R_{100} + (t - 100) \left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=100} + \frac{(t - 100)^2}{2} \left[ \frac{d^2R_t}{dt^2} \right]_{t=100}$$

Оно является совершенно точным, поскольку сопротивление является квадратичной функцией температуры.

Отсюда получаем формулу для вычисления  $R_{t=100}$ :

$$R_{100} = R_t + (100 - t) \left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=100} - \frac{(100 - t)^2}{2} \left[ \frac{d^2R_t}{dt^2} \right]_{t=100} \quad (35)$$

Применение этой формулы затрудняется тем обстоятельством, что производные, входящие в формулу приведения, содержат константы термометра, которые, как это чаще всего бывает, могут быть неизвестны заранее. В самом деле, из ур-ния (1)

$$R_t = R_0 (1 + At + Bt^2)$$

для производных при температуре  $100^\circ$  получаем

$$\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=100} = [R_0 (A + 2Bt)]_{t=100} = R_0 (A + 200B)$$

$$\left[ \frac{d^2R_t}{dt^2} \right]_{t=100} = 2R_0B$$

Из этого затруднения некоторые авторы выходят, прибегая к методу последовательных приближений: вначале берут предварительные значения констант, а затем, после вычисления новых констант, проверяют прежние приведенные значения  $R_{100}$ ,  $R_s$  и, в случае надобности, улучшают их, повторяя их вычисление заново с новыми значениями констант. Можно, однако, указать совершенно строгое решение задачи. Возьмем формулу (9)

$$R_t = R_1 + (R_2 - R_1) \varphi_2 + (R_3 - R_1) \varphi_3$$

Подставим сюда значения  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  из формул (5) и (6). Получим

$$R_t = R_1 + (t - t_1) \left\{ \frac{(R_2 - R_1)(t - t_2)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} + \frac{(R_3 - R_1)(t - t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \right\}$$

Заменяя в первом члене, находящемся в фигурных скобках, разность  $t - t_2$  равною ей разностью  $(t - t_2) - (t_3 - t_2)$  после

несложных алгебраических преобразований придем к следующей формуле:

$$R_t = R_1 + (t - t_1) \left\{ \frac{R_2 - R_1}{t_2 - t_1} + \frac{t - t_2}{t_3 - t_1} \left[ \frac{R_3 - R_2}{t_3 - t_2} - \frac{R_2 - R_1}{t_2 - t_1} \right] \right\} \quad (36)$$

Эта формула носит название интерполяционной формулы Ньютона для неравных промежутков. Подставляя в нее вместо  $t$ — $100^\circ$  или  $444,60^\circ$  и сопротивления термометра  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  при трех произвольных температурах, мы получим формулу для вычисления  $R_{100}$  или  $R_s$ . Эта формула довольно удобна для применения.

В том случае, если  $R_s$  в точке кипения серы неизвестно, можно предложить для вычисления  $R_{100}$  более удобный, но менее точный способ. Возвращаясь к формуле (35), мы можем сделать следующее заключение: вычисляя сопротивление 10-омного термометра с точностью до  $5 \cdot 10^{-5}$  ома, мы можем в пределах 2,9 градуса ограничиться линейной интерполяцией, так как в этом случае будет соблюдаться неравенство:

$$\begin{aligned} -\frac{(100-t)^2}{2} \left[ \frac{d^2 R_t}{dt^2} \right]_{t=100} &= -\frac{(100-t)^2}{2} \cdot 2R_0 B \approx \\ &\approx \frac{(100-t)^2}{2} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 5,810^{-7} < 5 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

(Мы полагали  $10^7 B = -5,8$ . Для 25-омного термометра пределы пользования линейной интерполяцией меньше  $-1,8^\circ$ . Отметим, что поскольку вторая производная постоянна, эти заключения о пределах допустимости линейной интерполяции справедливы для всех температур). Если бы мы могли знать ориентировочную величину первой производной при температуре  $100^\circ$  в зависимости от наблюдаемой величины отношения при температуре эксперимента — наша задача получила бы простое решение. Очевидно, что таким же способом можно было бы воспользоваться и в других реперных точках. В двух таблицах 3 и 4, составленных автором на основании литературных данных и личного опыта, сделана попытка облегчить выбор ориентировочного значения первой производной отношения  $W_t$  по температуре для приведения сопротивления термометра к стандартным температурам реперных точек. О принципе составления этих таблиц речь идет в другой работе автора.

Переходим к рассмотрению числовых примеров.

Пример 1.

Сопротивления термометра при эталонировании были равны.

$$R_0 = R_1 = 25,5487 \text{ ом в точке таяния льда при } t_1 = 0^\circ$$

$$R_2 = 35,4383 \text{ ом в точке кипения воды при } t_2 = 98,88^\circ$$

$$R_3 = 67,7765 \text{ ом в точке кипения серы при } t_3 = 445,12^\circ$$

$$\text{Значения } 10^4 \left[ \frac{dW_t}{dt} \right]_{t=100}$$

в зависимости от температуры кипения воды и величины отношения  $W_t = \frac{R_t}{R_0}$

Атмосферное давление	в миллиметрах ртутного столба												
	98°				99°				100°				
	717,6	727,8	728,0	733,2	738,5	743,8	749,2	754,6	760,0	765,5	771,0	776,5	(782,0)
1,3820	382	382	382	382	382	382	382	382	382	382	382	382	382
1,3830	383	383	383	383	383	383	383	383	383	383	383	383	383
1,3840	384	384	384	384	384	384	384	384	384	384	384	384	384
1,3850	385	385	385	385	385	385	385	385	385	385	385	385	385
1,3860	386	386	386	386	386	386	386	386	386	386	386	386	386
1,3870	387	387	387	387	387	387	387	387	387	387	387	387	387
1,3880	—	—	—	386	385	384	383	382	382	382	382	382	382
1,3890	—	—	—	387	386	385	384	383	383	383	383	383	383
1,3900	—	—	—	—	387	386	385	384	384	384	384	384	384
1,3910	—	—	—	—	—	387	387	386	385	384	383	382	(382)
1,3920	—	—	—	—	—	—	—	387	386	385	384	383	(383)
1,3930	—	—	—	—	—	—	—	—	387	386	385	384	(384)
1,3940	—	—	—	—	—	—	—	—	—	(387)	386	385	(385)
1,3950	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	(387)	387	(386)
1,3960	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	387	(387)

Таблица 4

$$\text{Значения } 10^5 \left[ \frac{dW_i}{dt} \right]_{t=444,60}$$

в зависимости от температуры кипения серы и величины отношения  $W_i = \frac{R_i}{R_0}$

Атмосферное давление	Миллиметры ртутного столба															
	443°				444°				445°				446°			
	744,7	746,9	749,1	751,2	753,4	755,6	757,8	760,0	762,2	764,4	766,6	768,8	771,1	773,3	775,5	
Температура кипения	443°															
Отношение	2	4	6	8	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8	0	
2,6320	342	342	342	342	342	342	342	342	342	342	342	342	342	342	342	342
2,6340	343	343	343	343	343	343	343	343	343	343	343	343	343	343	343	343
2,6360	343	343	343	343	343	343	343	343	343	343	343	343	343	343	343	343
2,6380	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344
2,6400	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344
2,6420	345	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344	344
2,6440	345	345	345	345	345	345	345	345	345	345	345	345	345	345	345	345
2,6460	345	345	345	345	345	345	345	345	345	345	345	345	345	345	345	345
2,6480	346	346	346	346	346	346	346	346	346	346	346	346	346	346	346	346
2,6500	346	346	346	346	346	346	346	346	346	346	346	346	346	346	346	346
2,6520	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2,6540	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2,6560	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2,6580	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2,6600	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Найти сопротивление термометра в реперных точках.

Применим формулу (36). Она дает для приведения два выражения:

$$R_{100} = R_0 + 100 \left\{ \frac{R_2 - R_1}{98,88} + \frac{100 - 98,88}{445,12} \left[ \frac{R_3 - R_2}{445,12 - 98,88} - \frac{R_2 - R_1}{98,88} \right] \right\}$$

$$R_x = R_0 + 444,60 \left\{ \frac{R_2 - R_1}{98,88} + \frac{444,60 - 98,88}{445,12} \left[ \frac{R_3 - R_2}{445,12 - 98,88} - \frac{R_2 - R_1}{98,88} \right] \right\}$$

Вычисления выгодно расположить по следующей схеме:

	<sup>4</sup> $t_2 - t_1 =$ 445,12	<sup>1</sup> $R_0 =$ 67,7765			
<sup>3</sup> $t_2 - t_1 =$ 346,24	<sup>6</sup> $t_2 =$ 98,88	<sup>2</sup> $R_2 =$ 35,4383	<sup>7</sup> $R_3 - R_2 =$ 32,3383	<sup>11</sup> (7) : (9) = 0,09339822	
<sup>10</sup> $t_2 - t_1 =$ 98,88	<sup>8</sup> $t_1 = 0$	<sup>5</sup> $R_1 =$ 25,5487	<sup>8</sup> $R_3 - R_1 =$ 9,8896	<sup>12</sup> (8) : (10) = 0,10001618	<sup>13</sup> (11) - (12) = -0,00661796

Порядок составления расчетной схемы указан цифрами.

Итак:

$$R_{100} = 25,5487 + 100 \cdot \left\{ 0,100016 + \frac{1,12}{445,12} (-0,006618) \right\} = 35,5487 \text{ ом}$$

$$R_x = 25,5487 + 444,60 \cdot \left\{ 0,1000162 + \frac{346,72}{445,12} (-0,00661796) \right\} = 67,7306 \text{ ом}$$

Эту же задачу можно решить упрощенным способом. Вычислим величину отношений  $\frac{R_2}{R_0}$  и  $\frac{R_3}{R_0}$ . Зная эти числа — 1,3871 и 2,6528, находим в таблицах 3 и 4 значения производных  $\frac{dW_t}{dt}$  в точках кипения воды и серы, соответственно —  $385 \cdot 10^{-5}$  и  $346 \cdot 10^{-5}$ .

Умножая эти величины на сопротивление  $R_0$ , получим производную  $\frac{dR_t}{dt}$ . Эта производная в точке кипения воды будет равна  $0,0986 \frac{\text{ом}}{\text{град}}$  и  $0,0884 \frac{\text{ом}}{\text{град}}$  в точке кипения серы.

Значит:

$$R_{100} = R_2 + (100 - t_2) \left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=100} = 35,4383 + 1,12 \cdot 0,0986 = 35,5487 \text{ ом}$$



$$R_t = R_3 + (444,60 - t_3) \left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=444,60} = 67,7765 - 0,52 \cdot 0,0884 =$$

$$= 67,7306 \text{ ом}$$

Результат вычисления по упрощенному способу в нашем примере совпадает с прежним результатом, вычисленным строгим способом. Это объясняется тем, что данные нашего примера и данные в таблицах 3 и 4 относятся к одному и тому же термометру. В случаях пользования этими таблицами для термометра с платиной другого происхождения можно ожидать больших расхождений, однако этот простой способ позволит достичь точности порядка  $0,01^\circ$ , что будет достаточно для ориентировочных подсчетов и работ технического характера.

Пример 2. Пользуясь результатами предыдущего примера, найдем сопротивления термометра при комнатной температуре ( $+20^\circ$ ) и при температуре затвердевания сурьмы ( $+630,5^\circ$ ). В табл. 1 указаны значения функций влияния при температуре  $20^\circ$ .

$$\begin{aligned} \varphi_0(20) &= +0,764\,012\,6 \\ \varphi_{100}(20) &= +0,246\,430\,6 \\ \varphi_s(20) &= -0,010\,443\,2 \end{aligned}$$

Умножая эти значения на сопротивления термометра в реперных точках и складывая произведения, получаем ответ на первый вопрос.

$$\begin{aligned} 25,5487 \times +0,764\,012\,6 &= +19,5195, \\ 35,5487 \times 0,246\,430\,6 &= +8,7602, \\ 66,7306 \times -0,010\,443\,2 &= -0,7073, \end{aligned}$$

Сопротивление термометра при  $20^\circ$   $27,5725_0$  ом

Для ответа на второй вопрос надо сначала вычислить значения функций влияния при температуре  $630,5^\circ$ . В табл. 1 указаны значения функций влияния при температуре  $630^\circ$ . Рядом с функциями влияния указаны их первые производные и половина вторых производных. Как известно, значение непрерывной дифференцируемой функции можно вычислить, пользуясь ее разложением в ряд Тэйлора:

$$f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(a) + \dots$$

Для функций второй степени, какими являются наши функции влияния  $\varphi$ , приводимое выражение, содержащее три первые члена разложения, является совершенно точным.

Перепишем формулу в таком виде:

$$f(a+x) = f(a) + x \left\{ f'(a) + \frac{f''(a)}{2} x \right\}$$

Для интерполяции в 1-й таблице следует число 3-го столбца (т. е.  $\frac{p''}{2}$ ) умножить на желательное приращение аргумента, получившееся произведение надо добавить к значению первой производной, находящемуся во 2-м столбце. Умножая эту сумму на приращение аргумента, получим искомое приращение функции. Ограничиться для функций влияния линейной интерполяцией нельзя, так как кривизна кривых слишком велика (ср. на рис. 2 ход функций влияния и ход отношения  $W_t$ ).

Для функции  $\varphi_0$  на основании только что приведенного правила интерполяции имеем:

$$\begin{aligned}\varphi_0(630,5) &= \varphi_0(630) + 0,5 \left\{ \varphi_0'(630) + 0,5 \frac{\varphi_0''(630)}{2} \right\} = \\ &= 2,210\,121\,5 + 0,5 \{ 16,090\,9 \cdot 10^{-3} + 0,5 \cdot 2,249 \cdot 10^{-6} \} = +2,218\,172\,5\end{aligned}$$

Аналогичным образом, для  $\varphi_{100}$  и  $\varphi_r$  найдем:

$$\begin{aligned}\varphi_{100}(630,5) &= -3,401\,333\,4 \\ \varphi_r(630,5) &= +2,183\,160\,9\end{aligned}$$

Для контроля вычислений складываем полученные значения — сумма трех функций всегда должна равняться единице. Умножая, как и раньше, сопротивление в каждой реперной точке на соответствующую функцию влияния и складывая произведения, найдем, что сопротивление термометра при температуре  $630,5^\circ$  равно 83,6250 ом.

Пример 3. В приложениях к известной книге Ф. Геннинга „Измерение температуры“ (1915, издание Фивег) на стр. 270—271 дана таблица отношения  $W_t = R_t : R_0$  платинового термометра № 32 в зависимости от температуры, измеренной водородным термометром постоянного объема с начальным давлением порядка 1 атмосферы. Температура кипения серы была Геннингом принята равной  $444,50^\circ$ , температура кипения кислорода равной  $-183,01^\circ$ . Исправим табличные значения в точках  $-100^\circ$  и  $+250^\circ$ , приведя их к международной температурной шкале 1933 г.

С этой целью выпишем из таблицы отношения в реперных точках шкалы:

$$\begin{aligned}W_{-183,01} &= 0,24\,630 = c \\ W_{100} &= 1,39\,141 = a \\ W_{444,50} &= 2,65\,069 = b\end{aligned}$$

Эти величины — результат эксперимента в реперных точках кипения кислорода, воды и серы, очевидно, не зависят от температур, приписываемых этим точкам, не зависят, говоря другими словами, от принятой шкалы. Подставляя их в наши формулы (12) и (30), мы сразу найдем исправленные отношения для любой заданной температуры в международной шкале.

$$W_t = \Psi_0 + W_{100} \Psi_{100} + W_s \Psi_s + W_{02} \Psi_{02} = \Psi_0 + a \Psi_{100} + b \Psi_s + c \Psi_{02} \quad (t < 0)$$

$$W_t = \varphi_0 + W_{100} \varphi_{100} + W_s \varphi_s = \varphi_0 + a \varphi_{100} + b \varphi_s \quad (t > 0)$$

Выполняя вычисления для температур  $-100^\circ$  и  $+250^\circ$ , найдем числа  $W_{-100} = 0,59606$  и  $W_{+250} = 1,95661$ . В таблице Геннинга для этих температур указаны несколько другие величины —  $0,59612$  и  $1,95670$ .

Можно значительно упростить вычисления  $W_{+250}$ , если учесть только изменения отдельных членов в формуле, не вычисляя ее целиком. Для положительных температур зависимость отношения от температуры в таблице Геннинга квадратичная, поэтому все числа этой части таблицы можно получить по той же формуле (12):

$$W_t = \varphi_0 + W_{100} \cdot \varphi_{100} + W_s \varphi_s$$

если вместо  $W_t$  подставить то отношение, которое соответствует температуре  $444,60^\circ$  по его шкале. В таблице находим:

$$W_{444,60} = 2,65104 = d$$

Сохраняя обозначение  $W_t$  для отношения, вычисленного для температуры М. Ш. Т., и обозначая буквой  $\bar{W}_t$  величину отношения для той же температуры в шкале Геннинга, мы заметим, что разность  $W_t - \bar{W}_t$  будет содержать только член с функцией  $\varphi_s$

$$W_t - \bar{W}_t = (b - d) \cdot \varphi_s(t)$$

Для  $t = 250^\circ$ ,  $\varphi_s = 0,245$ , поэтому

$$W_{250} - \bar{W}_{250} = (-35 \cdot 10^{-5}) \cdot 0,245 = -9 \cdot 10^{-5}$$

Эта разность представляет поправку для перехода от отношения в шкале Геннинга к отношению для той же температуры в шкале М. Ш. Т. В таблице Геннинга для температуры  $250^\circ$  указано число  $1,95670$ . При температуре  $250^\circ\text{C}$  (Int) отношение будет  $1,95661$ .

Пример 4. При помощи платинового термометра сопротивления измерялись разности температур вблизи  $20^\circ$ . Результаты наблюдений были обработаны на основании данных старого эталонирования, указанных в примере 1. По окончании работы термометр подвергся новому эталонированию. Сопротивления  $R_0$  и  $R_{100}$  остались практически теми же самыми, но сопротивление термометра в точке кипения серы найдено совсем другим, как это можно видеть в приводимой таблице с сопоставлением результатов обоих эталонирований:

Сопротивление	Результаты эталонирования		Разность $R_{нов} - R_{ст}$
	старого	нового	
$R_0$	25,5487 ом	25,5485 ом	- 0,0002 ом
$R_{100}$	35,5487	35,5488	+ 0,0001
$R_{\tau}$	67,7306	67,6254	- 0,1052

Нужно указать, какие изменения следует внести в результаты вычислений, если воспользоваться для окончательной обработки наблюдений данными нового эталонирования, как более близкими к эпохе опыта.

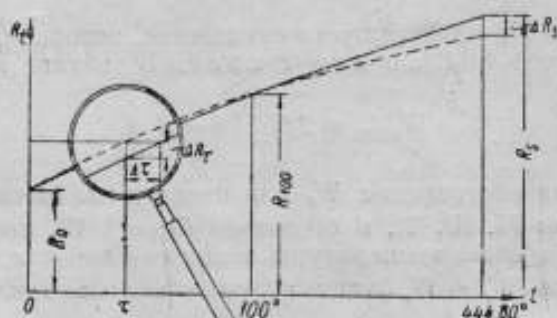


Рис. 4

Умножая разности  $R_{нов} - R_{ст}$  в реперных точках на значения соответствующих функций влияния, найдем поправку к сопротивлению термометра при  $20^\circ$  (ср. предыдущий пример):

$$\Delta R = (-0,0002)(+0,764) + (+0,0001)(+0,246) + (-0,1052) \times (-0,01044) = +0,0009,$$

Сопротивление при  $+20^\circ$  по старым данным было 27,5725, ом.

Сопротивление при той же температуре по новым данным будет 27,5734, ом (см. рис. 4).

Обратимся к рис. 5. Если сопротивление термометра при температуре  $\tau$  по старой кривой 1 назовем  $R_1$ , сопротивление для той же температуры на новой кривой 2 назовем  $R_2$ , то, как видно из рассмотрения чертежа, изменение оценки абсолютного значения температуры будет

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{(R_1 - R_2)_\tau}{\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_\tau}$$

Индекс впереди производной означает то, что она определяется по старой кривой. Для вычисления производной применим формулу (13). Согласно этой формуле производная вычисляется аналогично сопротивлению: надо сложить произведения сопротивлений в реперных точках на первые производные функций влияния:

$$25,5487 \times (-11,3495 \cdot 10^{-3}) = -289,96_3 \cdot 10^{-3}$$

$$35,5487 \times (+11,7411 \cdot 10^{-3}) = +417,38_1 \cdot 10^{-3}$$

$$67,7306 \times (-0,39162 \cdot 10^{-3}) = -26,52_2 \cdot 10^{-3}$$

Производная от сопротивления термометра по температуре при  $20^\circ$  равна  $0,1008 \frac{\text{ом}}{^\circ \text{град}}$ . Зная производную, мы можем подсчитать изменение абсолютного значения температуры  $20^\circ$  при пересчете старых вычислений. Оно составит:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{-0,0009_3}{0,1008_0} = -0,009_8^\circ$$

Для вычисления разности температур по разностям сопротивлений, часто пользуются множителем  $M$  (см. М. М. Попов „Термометрия и калориметрия“, 1934 г., стр. 170, 258). Этот множитель, как это ясно из геометрических соображений, равен обратной величине производной  $\frac{dR_1}{dt}$ .

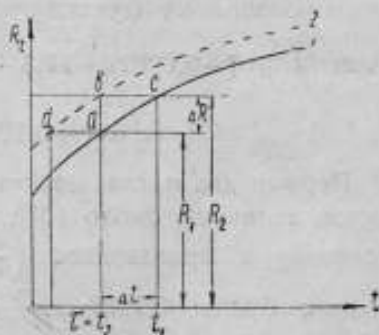


Рис. 5

<sup>1</sup> В книге Попова дается очень сложное выражение  $M$  через константы термометра  $M = \frac{100}{R_{100} - R_0} \frac{1 + u\gamma}{1 + u\gamma}$ , где  $\gamma = \frac{2B}{A}$  и  $u = \frac{t_1 + t_2}{2}$  — полусумма тех температур, разность которых измеряется. В подстрочном примечании на стр. 170 приведен удивительно громоздкий вывод этого выражения. Если бы по каким-либо соображениям нужно было действительно избежать понятия производной, достаточно было бы написать ур-ние М. Ш. Т. для двух температур  $t_2$  и  $t_1$  и вычесть одно из другого. После несложных преобразований разность получит вид:

$$R_2 - R_1 = AR_0(t_2 - t_1) + BR_0(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)$$

Отсюда

$$t_2 - t_1 = \frac{R_2 - R_1}{R_0[A + B(t_1 + t_2)]} = M(R_2 - R_1)$$

$$\text{Множитель } M = \frac{1}{R_0 \left[ A + 2B \frac{t_1 + t_2}{2} \right]} = \frac{1}{R_0 [A + 2Bu]} \text{ с геометрической точ-}$$

ки зрения представляет обратную величину углового коэффициента касательной к кривой в точке с абсциссой  $u$  и применимость его для вычислений ограничена кривизной кривой. Говоря иными словами, множитель  $M$  применим только пока разность  $t_2 - t_1$  настолько мала, что его можно без заметной погрешности отождествить с обратной величиной углового коэффициента касательной в любой из точек  $t_1$  или  $t_2$ . Простое выражение, указанное здесь, можно преобразовать, придав ему тот вид, которым пользуется Попов, но едва ли в этом есть надобность.

$$M = \frac{1}{\frac{dR_t}{dt}} = \frac{dt}{dR_t}$$

Для рассматриваемого случая старый множитель  $M$  был равен  $\left(\frac{1}{0,1008_3} = 9,911_3\right) \frac{\text{град}}{\text{ом}}$ . Выясним, чему равен новый множитель  $M$ . Для этого подсчитаем поправку к величине производной  $\frac{dR_t}{dt}$ . Подсчет производится, как обычно, путем умножения разностей  $R_{\text{нов}} - R_{\text{ст}}$  в реперных точках на соответствующие первые производные функций влияния. Итак,

$$\Delta\left(\frac{dR_t}{dt}\right) = (-0,0002)(-11,3 \cdot 10^{-3}) + (+0,0001)(+11,7 \cdot 10^{-3}) + \\ + (-0,1052)(-0,392 \cdot 10^{-3}).$$

Первые два члена можно отбросить, так как они имеют порядок величины около  $10^{-6}$ . Вычисляя последний член, находим поправку к производной  $\left(\frac{dR_t}{dt}\right) = +4 \cdot 10^{-5} \frac{\text{ом}}{\text{град}}$ . Новая производная будет  $0,1009_3 \frac{\text{ом}}{\text{град}}$ , а новый множитель  $M$  будет  $9,907_3 \frac{\text{град}}{\text{ом}}$ . Этим изменением переводного множителя  $M$  можно пренебречь, если измерять с точностью порядка  $0,001^\circ$  разности температур, не превосходящие  $1^\circ$  (ср. границы применимости линейной интерполяции, указанные на стр. 19).

Последние два примера наглядно показали удобство применения функций влияния к анализу изменений кривой эталонирования, вызванных изменениями в реперных точках. Уравнения, указанные в „Положении о международной температурной шкале“ не позволили бы без громоздких вычислений оценить влияние ошибок в реперных точках на температуру, измеряемую в промежуточных точках шкалы. Следующий параграф будет посвящен общему решению вопроса о распределении ошибок эталонирования по шкале.

### § 3. АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОШИБОК ЭТАЛОНИРОВАНИЯ

а) Область от  $0^\circ$  до  $660^\circ$

Для решения поставленной задачи в самом общем виде мы будем исходить из формулы (3) § 1 для эталонирования термометра в трех произвольных, не совпадающих между собою реперных точках. По этой формуле сопротивление термометра при любой температуре является функцией семи аргументов: температуры  $t$ , температур  $t_1, t_2, t_3$  и сопротивлений  $R_1, R_2$  и  $R_3$  в реперных точках во время эталонирования.

$$R_t = R_1 \varphi_1(t; t_2, t_3) + R_2 \varphi_2(t; t_3, t_1) + R_3 \varphi_3(t; t_1, t_2) = \\ = f(t; t_1; t_2, t_3; R_1, R_2, R_3) \quad (37)$$

Рассмотрим следующую функцию 8 аргументов:

$$F(x, t; t_1, t_2, t_3; R_1, R_2, R_3) = x - f(t; t_1, t_2, t_3; R_1, R_2, R_3)$$

Эта функция обращается в нуль, если аргумент  $x$  будет равен любому из значений  $R_i$ , вычисленному из ур-ния (37), по заданным значениям остальных семи аргументов:

$$F(R_i; t, t_1, t_2, t_3; R_1, R_2, R_3) = R_i - f(t; t_1, t_2, t_3; R_1, R_2, R_3) = 0$$

Это равенство справедливо при всех значениях  $t$  в области применения ур-ния (37). Вычислим полный дифференциал  $F(R_i; t, t_1, t_2, t_3; R_1, R_2, R_3)$  и приравняем его нулю, так как эта функция является, как мы выяснили, постоянной величиной (нулем).

$$dF = \frac{\partial F}{\partial R_i} dR_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial F}{\partial t_2} dt_2 + \frac{\partial F}{\partial t_3} dt_3 + \frac{\partial F}{\partial R_1} dR_1 + \\ + \frac{\partial F}{\partial R_2} dR_2 + \frac{\partial F}{\partial R_3} dR_3 = 0 \quad (38)$$

Это выражение можно рассматривать, как самое общее соотношение между достаточно малыми ошибками в определении 8 величин, являющихся аргументами функции  $F$ . Для интересующей нас погрешности<sup>1</sup> определения температуры в промежуточной точке шкалы получим из ур-ния (38) следующее выражение:

$$\Delta t = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial t}} \left\{ \frac{\partial F}{\partial R_i} \Delta R_i + \frac{\partial F}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial F}{\partial t_2} \Delta t_2 + \frac{\partial F}{\partial t_3} \Delta t_3 + \frac{\partial F}{\partial R_1} \Delta R_1 + \right. \\ \left. + \frac{\partial F}{\partial R_2} \Delta R_2 + \frac{\partial F}{\partial R_3} \Delta R_3 \right\} \quad (39)$$

Вычислим значения всех производных, входящих в это выражение, приняв во внимание формулу (37) и определение функции  $F$ .

$$\frac{\partial F}{\partial R_i} = 1 \\ \frac{\partial F}{\partial R_1} = -\frac{\partial f}{\partial R_1} = -\varphi_1(t; t_2, t_3); \quad \frac{\partial F}{\partial R_2} = -\frac{\partial f}{\partial R_2} = -\varphi_2(t; t_3, t_1); \\ \frac{\partial F}{\partial R_3} = -\frac{\partial f}{\partial R_3} = -\varphi_3(t; t_1, t_2)$$

<sup>1</sup> Пусть  $A_w$ —истинное значение какой-либо величины,  $A_f$ —значение той же величины, найденное с некоторой погрешностью. Во избежание недоразумений, условимся понимать под погрешностью или ошибкой разность  $A_f - A_w$ .

Обратную по знаку разность  $A_w - A_f$  будем называть изменением или поправкой.

(Последние три формулы приведены для частного случая функций  $\varphi_0$ ,  $\varphi_{100}$  и  $\varphi_s$  на стр. 7).

Производные по температурам:

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = -\frac{\partial f}{\partial t_1}; \quad \frac{\partial F}{\partial t_2} = -\frac{\partial f}{\partial t_2}; \quad \frac{\partial F}{\partial t_3} = -\frac{\partial f}{\partial t_3}; \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{dR_t}{dt}$$

(Для обоснования последней формулы нужно вспомнить, что

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [R_1 \varphi_1 + R_2 \varphi_2 + R_3 \varphi_3] = R_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + R_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + R_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}$$

Температуры реперных точек не зависят от температуры  $t$ , могущей принимать любое значение, поэтому  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{d\varphi_i}{dt}$  и на основании формулы (13) § 1 получим в итоге равенство

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{dR_t}{dt}$$

Подставляя производные в формулу (39), получим:

$$\Delta t = \frac{1}{\frac{dR_t}{dt}} \Delta R_t - \frac{\frac{\partial f}{\partial t_1}}{\frac{dR_t}{dt}} \Delta t_1 - \frac{\frac{\partial f}{\partial t_2}}{\frac{dR_t}{dt}} \Delta t_2 - \frac{\frac{\partial f}{\partial t_3}}{\frac{dR_t}{dt}} \Delta t_3 -$$

$$- \frac{\varphi_1(t; t_2, t_3)}{\frac{dR_t}{dt}} \Delta R_1 - \frac{\varphi_2(t; t_2, t_3)}{\frac{dR_t}{dt}} \Delta R_2 - \frac{\varphi_3(t; t_1, t_2)}{\frac{dR_t}{dt}} \Delta R_3$$

Вводя для коэффициентов особые обозначения, мы перепишем эту формулу в таком виде:

$$\Delta t = \lambda_t(t) \Delta R_t - \lambda_1(t) \Delta t_1 - \lambda_2(t) \Delta t_2 - \lambda_3(t) \Delta t_3 - \lambda_1(t) \Delta R_1 - \lambda_2(t) \Delta R_2 - \lambda_3(t) \Delta R_3 \quad (39a)$$

Эта формула очень громоздка, но ее можно значительно упростить, если условиться предполагать, что температуры реперных точек определяются нами с абсолютной точностью. Это допущение позволит отбросить три члена, содержащие  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$  и  $\Delta t_3$ .

$$\Delta t = \lambda_t(t) \cdot \Delta R_t - \lambda_1(t) \cdot \Delta R_1 - \lambda_2(t) \cdot \Delta R_2 - \lambda_3(t) \cdot \Delta R_3 \quad (40)$$

Общность анализа при этом не пострадает: в самом деле, если бы нам потребовалось, например, исследовать влияние погрешности  $\Delta t_3$ , мы могли бы поступить так:

Введем фиктивную погрешность сопротивления  $\Delta \bar{R}_3$ , вычисляемую из равенства

$$\lambda_3(t) \cdot \Delta \bar{R}_3 = \lambda_3(t) \cdot \Delta t_3$$

*А если бы зависели, то как было в том случае?*



Величину  $\overline{\Delta R_3} = \frac{\lambda_3(t)}{\lambda_0(t)} \cdot \Delta t_3$  добавим к реальной ошибке  $\Delta R_3^1$  сопротивления в реперной точке и подставим в сокращенную формулу (40) суммарную погрешность

$$\Delta R_3 = \Delta R_3^1 + \overline{\Delta R_3}$$

Поступая так, мы фактически возвращаемся к полной формуле<sup>1</sup>. После этого упрощения, позволяющего в дальнейшем не рассматривать частных производных по температурам реперных точек, мы можем в формуле (40) заменить общие функции  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , и  $\varphi_3$  частным видом их  $\varphi_0$ ,  $\varphi_{100}$  и  $\varphi_s$ , приспособленным к существующей международной шкале.

Итак:

$$\Delta t = \lambda_t(t) \cdot \Delta R_t - \lambda_0(t) \cdot \Delta R_0 - \lambda_{100}(t) \cdot \Delta R_{100} - \lambda_s(t) \cdot \Delta R_s \quad (41)$$

где коэффициенты определяются такими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_t(t) &= \frac{1}{\frac{dR_t}{dt}} \\ \lambda_0(t) &= \frac{\varphi_0(t)}{\frac{dR_t}{dt}} \\ \lambda_{100}(t) &= \frac{\varphi_{100}(t)}{\frac{dR_t}{dt}} \\ \lambda_s(t) &= \frac{\varphi_s(t)}{\frac{dR_t}{dt}} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

На основании формул (14)–(16) § 1, мы можем указать частные значения этих коэффициентов в реперных точках:

$$\begin{aligned} \lambda_0(0) &= \frac{1}{\left[\frac{dR_t}{dt}\right]_{t=0}} & \lambda_{100}(0) &= 0 & \lambda_t(0) &= 0 & \lambda_s(0) &= \lambda_0(0) \\ \lambda_0(100) &= 0 & \lambda_{100}(100) &= \frac{1}{\left[\frac{dR_t}{dt}\right]_{t=100}} & \lambda_t(100) &= 0 & \lambda_s(100) &= \lambda_{100}(100) \\ \lambda_0(444,60) &= 0 & \lambda_{100}(444,60) &= 0 & \lambda_t(444,60) &= \frac{1}{\left[\frac{dR_t}{dt}\right]_{t=444,60}} & \lambda_s(444,60) &= \lambda_t(444,60) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Отношение  $\frac{\Delta_3(t)}{\lambda_0(t)}$ , как легко показать, равно производной  $\left[\frac{dR_t}{dt}\right]_{t=t_0}$  взятой со знаком минус.

Сопоставляя эти значения с общими формулами (42), мы замечаем возможность представить каждый коэффициент  $\lambda$  в виде произведения некоторого другого коэффициента  $\mu$  на значение коэффициента  $\lambda$  в „своей“ реперной точке:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0(t) &= -\mu_0(t) \cdot \lambda_0(0) \\ \lambda_{100}(t) &= -\mu_{100}(t) \cdot \lambda_{100}(100) \\ \lambda_s(t) &= -\mu_s(t) \cdot \lambda_s(444,60) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

(Знак минус выбран для того, чтобы представить ошибку температуры в виде суммы).

С учетом обозначений (43) формула (41) приобретает окончательный вид:

$$\begin{aligned} \Delta t = & \lambda_t(t) \cdot \Delta R_t + \mu_0(t) \cdot \lambda_0(0) \cdot \Delta R_0 + \mu_{100}(t) \cdot \lambda_{100}(100) \cdot \Delta R_{100} + \\ & + \mu_s(t) \cdot \lambda_s(444,60) \cdot \Delta R_s = \frac{\Delta R_t}{dt} + \mu_0(t) \left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=0} + \\ & + \mu_{100}(t) \left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=100} + \mu_s(t) \left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=444,60} \end{aligned} \quad (44)$$

Коэффициенты  $\mu$  определены следующими формулами, вытекающими из формул (43):

$$\left. \begin{aligned} \mu_0(t) &= -\frac{\lambda_0(t)}{\lambda_0(0)} = -\varphi_0(t) \frac{\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=0}}{\frac{dR_t}{dt}} \\ \mu_{100}(t) &= -\frac{\lambda_{100}(t)}{\lambda_{100}(100)} = -\varphi_{100}(t) \frac{\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=100}}{\frac{dR_t}{dt}} \\ \mu_s(t) &= -\frac{\lambda_s(t)}{\lambda_s(444,60)} = -\varphi_s(t) \frac{\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=444,60}}{\frac{dR_t}{dt}} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Коэффициенты  $\mu$  являются функциями температуры. Мы назовем эти новые функции — функциями распределения. Каждая из функций распределения равна нулю в „чужой“ реперной точке, поэтому при измерении температуры вблизи реперной точки выражение (44) для погрешности еще более упрощается, так как в нем остаются только два члена — член, содержащий ошибку во время измерения, и член, содержащий ошибку во время эталонирования. *Какой или какой?*

Разберем на основании формулы (44) несколько частных случаев:

1) Положим, что эталонирование было сделано без ошибок, т. е.  $\Delta R_0 = \Delta R_{100} = \Delta R_r = 0$ . Пусть при измерении температуры  $t$  термометром сопротивление его определено с погрешностью  $\Delta R_t$ . Ошибка в измеряемой температуре будет тогда:

$$\Delta t = \lambda_t(t) \cdot \Delta R_t = \frac{\Delta R_t}{\frac{dR_t}{dt}}$$

Это соотношение между ошибками является прямым следствием возможности определить производную как частное двух дифференциалов, и рассматривать малый отрезок кривой, как отрезок прямой (см. рис. 6).

2) Положим теперь, что при эталонировании была допущена единственная ошибка. Пусть, например,  $\Delta R_0 \neq 0$ .

Разберем сначала случай, когда при измерении проэталонированным термометром не делают ошибок, т. е.  $\Delta R_t = 0$ .

Тогда

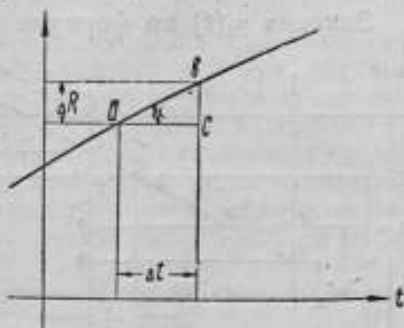


Рис. 6

$$\Delta t = \mu_0(t) \cdot \lambda_0(0) \cdot \Delta R_0 = \mu_0(t) \frac{\Delta R_0}{\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=0}}$$

Произведение  $\lambda_0(0) \cdot \Delta R_0 = \frac{\Delta R_0}{\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=0}}$  представляет, очевидно,

ошибку, допущенную при эталонировании, выраженную в градусах.

Поведение функции  $\mu_0(t)$  определяет распределение этой ошибки вдоль шкалы при последующем применении термометра. Это-то обстоятельство и позволило нам ввести для функций  $\mu$  сокращенное название функций распределения.

Если мы будем измерять температуру той реперной точки, где была сделана ошибка, то, так как соответствующая функция распределения будет равна  $-1$ , мы можем сформулировать такое положение.

Ошибка при измерении температуры реперной точки равна ошибке при эталонировании, взятой с обратным знаком. В самом деле, если при эталонировании мы совершили положительную (отрицательную) ошибку в сопротивлении, то при последующем измерении мы, не зная о совершенной ранее при эталонировании ошибке, припишем истинной температуре реперной точки меньшее (большее) значение, иными словами

говоря, сделаем отрицательную (положительную) ошибку. Подчеркнем, что это положение сформулировано только для того случая, когда последующее измерение производится с абсолютной точностью. Разбирая следующий частный случай, мы откажемся от этого ограничения.

3) Итак, пусть  $\Delta R_t \neq 0$  и одна из ошибок эталонирования, например, опять  $\Delta R_0 \neq 0$ .

Теперь

$$\Delta t = \lambda_t \cdot \Delta R_t + \nu_0 \cdot \lambda_0(0) \Delta R_0 = \frac{\Delta R_t}{\frac{dR_t}{dt}} + \nu_0(t) \left[ \frac{\Delta R_0}{\frac{dR_t}{dt}} \right]_{t=0}$$

Заменяв  $\nu_0(t)$  по формуле (45), получим

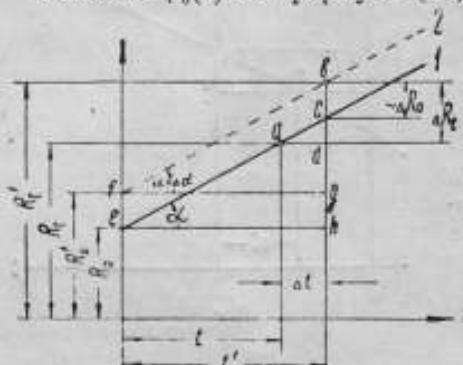


Рис. 7

$$\Delta t = \frac{\Delta R_t - \nu_0(t) \cdot \Delta R_0}{\frac{dR_t}{dt}}$$

Приложим эту формулу к случаю измерения температуры вблизи самой реперной точки  $t=0$ , где при эталонировании была сделана ошибка  $\Delta R_0$ . Функция влияния в „своей“ реперной точке равна единице, в окрестности ее она также может быть приравнена единице. Для  $\Delta t$  получаем простую формулу:

$$\Delta t = \frac{\Delta R_t - \Delta R_0}{\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=0}} \quad (a)$$

На рис. 7 дана геометрическая интерпретация этой формулы. Зависимость сопротивления термометра от температуры изображена кривой 2, отсекающей на оси ординат отрезок  $R'_0$ . Этой кривой мы пользуемся для определения температуры, соответствующей сопротивлению  $R'_t$ . Абсцисса точки  $b$  определяет числовое значение  $t'$  этой температуры.

Если бы при эталонировании не было сделано ошибки  $\Delta R_0 = R'_0 - R_0 = ef$ , то зависимость сопротивления от температуры была бы задана кривой 1, отсекающей на оси ординат другой отрезок  $R_0$ . С другой стороны, истинная величина сопротивления при измеряемой температуре есть  $R_t$  и поэтому истинное значение температуры  $t$ , отвечающей этой величине, определяется абсциссой точки  $a$ . Отрезок  $bd = R'_t - R_t$  есть ошибка  $\Delta R'_t$ .

Обе кривые зависимости сопротивления от температуры изображены двумя параллельными прямыми, потому что, во-первых, малые отрезки кривых мы можем заменить отрезками прямых, и, во-вторых, разность отрезков  $bc$  и  $ef$  является величиной второго порядка малости по отношению к ошибке в измеряемой температуре  $t$ . Ошибка в измеряемой температуре будет составлять:

$$\Delta t = t' - t = \frac{bd - bc}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Считая  $bc$  равным отрезку  $ef$ ,<sup>1</sup> мы убеждаемся в справедливости формулы (а).

Разбор более сложных случаев применения формулы (44) после этого рассмотрения наиболее важных частных случаев, не представляет большого труда и мы ограничимся словесной формулировкой формулы (44) в ее самом общем виде.

Погрешность определения температуры платиновым термометром сопротивления в произвольной точке шкалы является линейной функцией ошибок, допущенных при измерении сопротивлений как в этой точке, так и в реперных точках во время эталонирования.

Числовые величины коэффициентов будут приведены в следующем параграфе.

<sup>1</sup> Вычислим разность этих отрезков. На основании чертежа

$$bg - ch = bc - ef = t' (\operatorname{tg}(\alpha + \Delta\alpha) - \operatorname{tg} \alpha) \approx t' \cdot \Delta\alpha \cdot \frac{d}{d\alpha} \operatorname{tg} \alpha = t' \cdot \Delta\alpha \cdot \sec^2 \alpha$$

Угол  $\Delta\alpha$  между касательными к кривым 1 и 2 будет равен:

$$\Delta\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\frac{2}{2} \left( \frac{dR_t}{dt} \right) - \frac{1}{1} \left( \frac{dR_t}{dt} \right)}{1 + \frac{2}{2} \left( \frac{dR_t}{dt} \right) \cdot \frac{1}{1} \left( \frac{dR_t}{dt} \right)} \approx \frac{\frac{2}{2} \left( \frac{dR_t}{dt} \right) - \frac{1}{1} \left( \frac{dR_t}{dt} \right)}{1 + \frac{2}{2} \left( \frac{dR_t}{dt} \right)^2}$$

Здесь индексы отнесены к номеру кривых. Подставляя выражение  $\Delta\alpha$  в формулу для разности отрезков и учитывая, что

$$\frac{2}{2} \left( \frac{dR_t}{dt} \right) - \frac{1}{1} \left( \frac{dR_t}{dt} \right) \approx (R_0^1 - R_0) \cdot \frac{d\tau_0}{dt} = \Delta R_0 \frac{d\tau_0}{dt}$$

получим

$$bc - ef = t' \cdot \Delta R_0 \frac{d\tau_0}{dt} \frac{\sec^2 \alpha}{1 + \frac{2}{2} \left( \frac{dR_t}{dt} \right)^2}$$

Этим подтверждается наше право считать отрезок  $bc$  равным отрезку  $ef$ , так как разность их содержит произведение двух малых величин  $t'$  и  $\Delta R_0$ .

в) Область от 0° до -190°

Путем рассуждений и преобразований, аналогичных рассуждениям и преобразованиям предыдущего раздела, можно получить для погрешности определения температур ниже нуля следующее выражение:

$$\Delta t = \frac{\Delta R_t}{dR_t} + \psi_0(t) \frac{\Delta R_0}{\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=0}} + \psi_{100}(t) \frac{\Delta R_{100}}{\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=100}} + \psi_s(t) \frac{\Delta R_s}{\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=444,60}} + \psi_{0_2}(t) \frac{\Delta R_{0_2}}{\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=-182,97}} \quad (46)$$

Функции распределения  $\psi$ , служащие множителями при ошибках, допущенных в реперных точках, являются функциями температуры 4 степени и определяются такими формулами, аналогичными формулам (45):

$$\left. \begin{aligned} \psi_0(t) &= -\psi_0(t) \frac{\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=0}}{dR_t} \\ \psi_{100}(t) &= -\psi_{100}(t) \frac{\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=100}}{dR_t} \\ \psi_s(t) &= -\psi_s(t) \frac{\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=444,60}}{dR_t} \\ \psi_{0_2}(t) &= -\psi_{0_2}(t) \frac{\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=-182,97}}{dR_t} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Первые три функции формально получаются из формул (45) простой заменой функций  $\varphi$  функциями  $\psi$ .

Нужно особо подчеркнуть важное обстоятельство: производные  $\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=100}$  и  $\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=444,60}$ , вошедшие в эти формулы, имеют прежнее значение, какое они имели в аналогичных формулах (45); иначе говоря, при образовании этих производных исходим из уравнения (1), а не (28), не принимая, таким образом, во внимание константу  $C$ . При вычислении производной  $\left[ \frac{dR_t}{dt} \right]_{t=0}$

эта константа выпадает и она участвует только в выражении для производной  $\left[\frac{dR_t}{dt}\right]_{t=182,57}$

$$\begin{aligned} \left[\frac{dR_t}{dt}\right]_{t=t_0} &= \left[\frac{d}{dt} (R_0 + R_0At + R_0Bt^2 + R_0Ct^3(t-100))\right]_{t=t_0} = \\ &= R_0(A + 2Bt - 300Ct^2 + 4Ct^3)_{t=t_0} \end{aligned}$$

Рассмотренная в этом параграфе задача о распределении ошибок эталонирования платинового термометра, была, повидимому, впервые решена Годжем. На его неопубликованную работу есть ссылка в одной статье Мюллера [3].

#### § 4. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОШИБОК И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Введенные в предыдущем параграфе функции распределения ошибок не являются, подобно функциям влияния, универсальными функциями, общими для всех термометров, эталонируемых по предписаниям „Положения о международной температурной шкале“.

Согласно формулам (45) любая из функций распределения в области от  $0^\circ$  до  $660^\circ$  равняется взятому с обратным знаком произведению соответствующей функции влияния на отношение производной в реперной точке к производной в той точке шкалы, для которой вычисляется ошибка.

Вычисляя производные, получим формулы для вычисления числовых значений функций распределения:

$$\mu_0(t) = -\varphi_0(t) \frac{A}{A + 2Bt}$$

$$\mu_{100}(t) = -\varphi_{100}(t) \frac{A + 200B}{A + 2Bt}$$

$$\mu_s(t) = -\varphi_s(t) \frac{A + 889,2B}{A + 2Bt}$$

Если мы в этих формулах разделим числитель и знаменатель на  $2B$  и обозначим буквой  $\gamma$  частное<sup>1</sup>

$$\frac{A}{2B} = \frac{\alpha(1 + 10^{-2}\delta)}{2 \cdot 10^{-4}\alpha\delta} = \frac{1 + 10^{-2}\delta}{2 \cdot 10^{-4}\delta}$$

<sup>1</sup> С геометрической точки зрения, параметр  $\gamma$  представляет абсциссу вершины параболы, заданной ур-нием (1). Перенеся начало координат в вершину параболы, ур-ние ее можно привести к простейшему виду  $y = ax^2$  (ось ординат совпадает с осью параболы). В такой системе координат производная будет прямо пропорциональна абсциссе. Это замечание объясняет появление в формулах (48) отношений разностей типа  $\gamma - t$  вместо отношений производных, стоявших в формулах (47).

то получим очень простые и удобные формулы, позволяющие вычислять функции распределения любого термометра по заданной для него константе Каллендара ( $\alpha$  в предыдущей формуле обозначает, как это принято, средний температурный коэффициент сопротивления в интервале  $0^\circ, 100^\circ$ ):

$$\left. \begin{aligned} \mu_0(t) &= -\varphi_0(t) \frac{\gamma}{\gamma-t} \\ \mu_{100}(t) &= -\varphi_{100}(t) \frac{\gamma-100}{\gamma-t} \\ \mu_s(t) &= -\varphi_s(t) \frac{\gamma-444,60}{\gamma-t} \end{aligned} \right\} (48)$$

Для функций распределения в области низких температур получим совершенно аналогичные формулы:

$$\left. \begin{aligned} \psi_0(t) &= -\psi_0(t) \frac{\gamma}{\gamma-t-\varepsilon(t)} \\ \psi_{100}(t) &= -\psi_{100}(t) \frac{\gamma-100}{\gamma-t-\varepsilon(t)} \\ \psi_s(t) &= -\psi_s(t) \frac{\gamma-444,60}{\gamma-t-\varepsilon(t)} \\ \psi_0(t) &= -\psi_0(t) \frac{\gamma+182,97-\varepsilon(-182,97)}{\gamma-t-\varepsilon(t)} \end{aligned} \right\} (49)$$

Функция  $\varepsilon(t) = \frac{2C}{B} t^2(t-75) = 2 \cdot 10^{-4} \frac{\beta}{\delta} t^2(t-75)$ , фигурирующая в знаменателе каждой из этих формул (и частное значение ее  $\varepsilon(-182,97)$ , вошедшее в числитель  $\psi_0$ ) появилась в результате сокращения на  $2B$  дробей — отношений производных.

Если мы выберем для константы Каллендара „среднее“ значение  $\delta = 1,495$ , а для константы Ван Дюзена выберем „среднее“ значение  $\beta = 0,110$ , то  $\gamma = 3394,5^\circ$ , для  $\varepsilon(t)$  будем иметь

$$\varepsilon(t) = -1,4716 \cdot 10^{-5} t^2(t-75).$$

Пользуясь этими величинами, вычислены таблицы 5 и 6. Рисунки 8 и 9 дают наглядное представление о поведении функций распределения.

Приведем два примера применения функций распределения.

**Пример 1.** В примере 4-м § 2 мы проследили влияние погрешности в точке кипения серы на результат измерения комнатной температуры. Вернемся к этому вопросу. В точке кипения серы погрешность сопротивления  $\Delta R_s$  составляла  $\pm 0,1052$  ом, если считать результаты нового эталонирования более надежными.



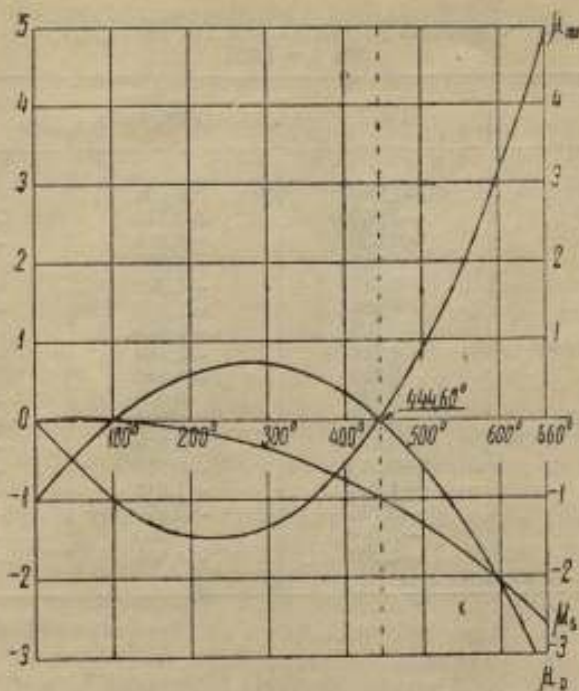


Рис. 8

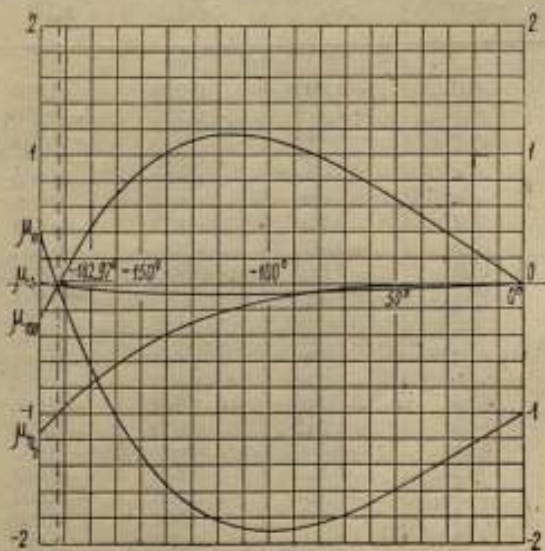


Рис. 9

Таблица 5  
Числовые значения функций распределения для температур от 0° до 660°,  
при  $\delta = 1,495$

$t$	$\mu_0(t)$	$\mu_{100}(t)$	$\mu_e(t)$
0	-1,000	0,000	0,000
20	-0,769	-0,240	+0,009
50	-0,450	-0,564	+0,014
100	0,000	-1,000	0,000
150	+0,347	-1,302	-0,045
200	-0,585	-1,464	-0,121
250	-0,709	-1,479	-0,230
300	-0,714	-1,340	-0,373
350	-0,593	-1,040	-0,553
400	+0,341	-0,570	-0,772
444,60	0,000	0,000	-1,000
450	-0,049	+0,079	-1,030
500	-0,585	-0,915	-1,330
550	-1,273	-1,948	-1,675
600	-2,123	-3,190	-2,067
630	-2,714	-4,039	-2,326
660	-3,368	-4,970	-2,602

Таблица 6  
Числовые значения функций распределения для температур от 0° до -190°  
при  $\delta = 1,495$  и  $\beta = 0,110$

$-t$	$-\varepsilon(t)$	$\mu_0(t)$	$\mu_{100}(t)$	$\mu_e(t)$	$\mu_{0,1}(t)$
0	0,0	-1,000	0,000	0,000	0,000
10	0,1	-1,121	-0,127	-0,006	0,000
20	0,6	-1,244	-0,258	-0,013	-0,001
30	1,4	-1,367	-0,391	-0,021	-0,002
40	2,7	-1,487	-0,523	-0,030	-0,006
50	4,6	-1,600	-0,651	-0,039	-0,012
60	7,2	-1,763	-0,773	-0,048	-0,021
70	10,5	-1,791	-0,885	-0,056	-0,036
80	14,6	-1,860	-0,983	-0,064	-0,056
90	19,7	-1,904	-1,062	-0,071	-0,084
100	25,8	-1,918	-1,119	-0,077	-0,122
110	32,9	-1,896	-1,148	-0,080	-0,169
120	41,3	-1,831	-1,144	-0,081	-0,228
130	51,0	-1,716	-1,102	-0,080	-0,302
140	62,0	-1,546	-1,016	-0,075	-0,391
150	74,5	-1,312	-0,880	-0,065	-0,498
160	88,5	-1,008	-0,687	-0,052	-0,625
170	104,2	-0,625	-0,433	-0,033	-0,773
180	121,6	-0,157	-0,110	-0,008	-0,944
182,97	127,1	0,000	0,000	0,000	-1,000
190	140,8	+0,405	-0,287	+0,022	-1,141

Е пересчете на температуру это составит  $\frac{0,1052}{0,08827} = +1,19^\circ$  (0,0822, — производная  $\left[\frac{dR_t}{dt}\right]_{t=444,50}$  для старого эталонирования). Для ориентировочного подсчета погрешности при температуре  $+20^\circ\text{C}$ , вносимой этой ошибкой эталонирования в серной точке, достаточно умножить числовое значение функции распределения  $\mu_x$  при температуре  $+20^\circ$  на эту ошибку, т. е.

$$(+0,009)(+1,19^\circ) = +0,011^\circ$$

Раньше мы нашли для этой погрешности другое меньшее число  $+0,009^\circ$ . Расхождение объясняется тем, что термометр имеет константу Каллендара, не совпадающую с ее средним значением  $\bar{\delta} = 1,495$ , для которого составлена наша таблица 6. Порядок величины получился правильный. Приведенные таблицы могут быть использованы для всевозможных ориентировочных подсчетов.

Пример 2. В книге Геннинга „Измерение температуры“ (1915), на стр. 98 приведена без доказательства формула той поправки, которую следует внести в измеряемую платиновым термометром температуру, если числовое значение, приписанное при эталонировании температуре кипения серы при нормальном атмосферном давлении отличалось от величины  $444,50^\circ$ , принятой в то время Геннингом. (Напомним, что в 1915 г. температура кипения серы не была установлена международным соглашением и данные разных авторов различались на десятые доли градуса.)

Поправка  $\Delta t$  при температуре  $t$  равна по Геннингу

$$\Delta t = A \frac{t [0,01t - 1]}{100 - \bar{\delta} [0,02t - 1]} \cdot \Delta t_s = F \cdot \Delta t_s$$

где  $\Delta t_s = 444,50 - t_s$  — поправка в серной точке, а  $A$  определяется выражением

$$A = \frac{100 - \bar{\delta} [0,02t_s - 1]}{t_s (0,01t_s - 1)} = 0,058$$

Покажем, что множитель  $F$  представляет нашу функцию распределения  $\mu_x(t)$ , взятую с обратным знаком (перемена знака вызвана тем обстоятельством, что Геннинг рассматривает не погрешность, а поправку при соответствующей температуре).

По формуле (45)

$$\mu_x(t) = -\varphi_x(t) \frac{\left[\frac{dR_t}{dt}\right]_{t=t_s}}{\frac{dR_t}{dt}}$$

Раньше мы определяли функцию  $\varphi_x$  выражением (16), приспособленным к принятому в настоящее время числовому значению

температуры точки кипения серы. Теперь же мы будем под  $\varphi_s$  понимать функцию более общего вида (см. формулу (6)).

$$\varphi_s = \frac{t(t-100)}{t_s(t_s-100)}$$

В формуле Геннинга фигурирует константа Каллендара  $\delta$  и для вычисления производных придется прибегнуть к дифференцированию формулы Каллендара

$$t = \frac{1}{\alpha R_0} (R_t - R_0) + 10^{-4} \delta t (t - 100)$$

Для  $\frac{dR_t}{dt}$  будем иметь:

$$\frac{dR_t}{dt} = \alpha R_0 \{ 1 - 10^{-4} \delta (2t - 100) \}$$

Подставляя в формулу для  $\rho_s$  выражение  $\varphi_s$  и  $\frac{dR_t}{dt}$ , получим

$$-\rho_s(t) = \frac{t(t-100)}{t_s(t_s-100)} \frac{[1 - 10^{-4} \delta (2t_s - 100)]}{[1 - 10^{-4} \delta (2t - 100)]}$$

Деля произведение первых двух множителей в числителе и знаменателе на  $10^4$ , умножая обе квадратные скобки на  $10^2$  и иначе группируя множители, убедимся в том, что действительно  $-\rho_s(t) = F$ .

Табличка множителя  $F$ , приводимая Геннингом на стр. 98, только знаком отличается от значений функции распределения  $\rho_s$  в нашей таблице.

В четвертом разделе таблица Геннинга содержит значения множителя  $F$  для некоторых вторичных реперных точек. Воспроизводим здесь этот раздел таблички (табл. 7), так как он может служить полезным дополнением к нашей табл. 6.

Таблица 7

Вторичные реперные точки	$t_1$	$t_2$	$F = -\rho_s$
кипения нафталина . . . . .	218,0	217,96	0,16
плавления олова . . . . .	231,8	231,85	0,19
кипения бензофенона . . . . .	305,9	305,9	0,39
плавления кадмия . . . . .	320,9	320,9	0,44
плавления цинка . . . . .	419,4	419,45	0,87
кипения серы . . . . .	444,5	444,60	1,00

В столбце  $t_1$  указаны температуры, принятые Геннингом, в столбце  $t_2$  указаны температуры тех же реперных точек, принятые в настоящее время (согласно „Положения“ 1933 г.). Не-

большие расхождения чисел  $t_1$  и  $t_2$  не могут повлиять на значения множителя  $F$ , вычисленного только с 2 знаками так же, как не повлияло на совпадение первых двух знаков различие в принятом для подсчета „среднем“ значении  $\delta$ . (Геннинг не указал, для какого  $\delta$  он вычислил значения множителя  $A$ , вероятнее всего, для  $\delta = 1,5$ ).

Во всех предыдущих рассуждениях и примерах мы предполагали возможным точное значение всех погрешностей, кроме одной искомой погрешности температур в узком смысле слова (в формулы входит, например, величина  $\Delta R_1$  — погрешность сопротивления при измеряемой температуре). На самом же деле, величины погрешностей, входящих в наши формулы (44) и (46), нам неизвестны, потому что неизвестны точные значения измеряемых величин.

Для ориентировочного подсчета возможных погрешностей приходится исходить или из чувствительности метода или из наблюдающегося разброса ряда повторных изменений. И тот и другой прием следует применять с большой осторожностью, так как ни высокая чувствительность метода, ни хорошая воспроизводимость ряда измерений, находящая количественное выражение в общепринятых показателях точности (средняя квадратичная погрешность, вероятная погрешность, средняя арифметическая погрешность) не дают сами по себе оснований для заключения о верности результатов. Только опытным путем — одновременным применением разных методов измерения, сопоставлением показаний разных приборов, при тщательном анализе всех условий опыта и при преднамеренной вариации этих условий, можно выяснить надежность получаемых результатов. При такой организации наблюдений грубые систематические погрешности в отдельных опытах становятся заметными и могут быть приняты в расчет. Остающиеся малые систематические погрешности каждого отдельного определения принимают во всей совокупности опытов случайный характер.

Для определенности рассмотрим оба приема оценки возможных погрешностей в применении к измерению положительных температур. Будем исходить из нашей общей формулы (39а)

$$\Delta t = \lambda_1 \Delta R_1 - \Lambda_1 \Delta t_1 - \Lambda_2 \Delta t_2 - \Lambda_3 \Delta t_3 - \lambda_1 \Delta R_1 - \lambda_2 \Delta R_2 - \lambda_3 \Delta R_3$$

Для вычисления максимальной возможной погрешности по первому способу следует взять сумму абсолютных значений всех членов:

$$\Delta t = |\lambda_1 \Delta R_1| + |\Lambda_1 \Delta t_1| + |\Lambda_2 \Delta t_2| + |\Lambda_3 \Delta t_3| + |\lambda_1 \Delta R_1| + |\lambda_2 \Delta R_2| + |\lambda_3 \Delta R_3|$$

Числовые значения назначаются, исходя из чувствительности применяемых измерительных приборов и методов (для погрешностей температур реперных точек берутся, например, величины, соответствующие чувствительности барометра). Этот способ всегда приводит к преувеличению достоинств измерений, потому

что очень редко точность измерений совпадает с наименьшей различимой величиной, обычно же она несколько меньше.

Для вычисления возможной погрешности по второму способу также исходным пунктом явится выражение (39-а). Оно позволяет утверждать, что погрешность определения температуры является линейной функцией ряда погрешностей, указанных в правой части формулы. Как известно из математической теории случайных ошибок, при существовании линейной связи погрешностей и при нормальном законе распределения каждой составляющей погрешности, результирующая средняя погрешность будет также подчинена нормальному закону распределения и может быть вычислена по формуле.

$$E_t = \sqrt{(\lambda_t E_{R_t})^2 + (\Lambda_1 E_{t_1})^2 + (\Lambda_2 E_{t_2})^2 + (\Lambda_3 E_{t_3})^2 + (\lambda_1 E_1)^2 + (\lambda_2 E_2)^2 + (\lambda_3 E_3)^2}$$

Здесь буквами  $E$  обозначены вероятные погрешности результата измерения каждой величины, являющейся независимой переменной для величины  $t$ . Практическое использование этой формулы невозможно, потому что опытному определению доступны только величины  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$  — вероятные погрешности результата измерения сопротивления термометра в реперных точках. Величины  $E_{t_1}$ ,  $E_{t_2}$  и  $E_{t_3}$  нам при эталонировании неизвестны, так как для их определения нужно было бы располагать независимым способом измерения температур в реперных точках (например, при помощи газового термометра. Строго говоря, величины  $E_{t_1}$ ,  $E_{t_2}$  и  $E_{t_3}$  зависят как от индивидуальных погрешностей одного эталонирования, так и от погрешностей определения положения реперных точек на термодинамической шкале. Мы рассматриваем эти величины, как неизвестные, чтобы не выходить за рамки единичного эталонирования и не быть вынужденными рассматривать многочисленные работы в области газовой термометрии, лежащие в основе определения международной температурной шкалы).

Величина  $E_{R_t}$  — вероятная погрешность результата измерения сопротивления термометра при заданной температуре — является также величиной неизвестной, потому что для ее определения надо располагать термостатом, позволяющим воспроизвести точно любую температуру. Попытаемся обойти встретившееся затруднение следующим образом: найдем ту вероятную погрешность, с которой мы можем вычислять сопротивление термометра при произвольно выбранной температуре, зная вероятные погрешности сопротивлений термометра в реперных точках, пренебрегая при этом ошибками в воспроизведении температур реперных точек.

Пусть результат многократных измерений сопротивления термометра в точке плавления льда есть  $R_0 \pm E_0$ , в точке кипения воды —  $R_{100} \pm E_{100}$ , кипения серы  $R_s \pm E_s$ . (Буквами  $E_0$ ,  $E_{100}$ ,  $E_s$

обозначены вероятные погрешности результата, вычисляемые по известной формуле:

$$E = 0,6745 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i^2}{n(n-1)}}$$

где  $n$  — число наблюдений,  $p_i$  — разность между результатом отдельного измерения  $R_i$  и средним арифметическим  $R$  — отклонение или остаточная погрешность  $p_i = R_i - R$ .

По закону накопления средних погрешностей, погрешность сопротивления  $R_t = R_t(t, R_0, R_{100}, R_s)$ , величина, являющейся функцией непосредственно измеренных величин  $R_0, R_{100}$  и  $R_s$ , равна:

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial R_t}{\partial R_0} E_0\right)^2 + \left(\frac{\partial R_t}{\partial R_{100}} E_{100}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_t}{\partial R_s} E_s\right)^2}$$

Значения частных производных нам известны (см. § 1 стр. 7). После подстановки получим

$$E = \sqrt{(\varphi_0 E_0)^2 + (\varphi_{100} E_{100})^2 + (\varphi_s E_s)^2} \quad (50)$$

Вынесем из-под знака радикала величину  $E_0^2$ , получим

$$E = E_0 \sqrt{\varphi_0^2 + \varphi_{100}^2 \left(\frac{E_{100}}{E_0}\right)^2 + \varphi_s^2 \left(\frac{E_s}{E_0}\right)^2} = E_0 \zeta(t) \quad (51)$$

Величина функции  $\zeta(t)$  при фиксированной температуре равна отношению вероятной погрешности сопротивления при этой температуре к вероятной погрешности сопротивления в нулевой реперной точке. Поведение функции  $\zeta(t)$  характеризует точность, с какой нам известно сопротивление термометра в промежуточных точках шкалы. Вычисление числовых значений этой функции невозможно без специальных предположений о соотношении вероятных погрешностей в реперных точках. В таблице 8 даны результаты вычислений функции  $\zeta(t)$  для случая, когда

$$\left(\frac{E_{100}}{E_0}\right)^2 = 1,5 \quad \left(\frac{E_s}{E_0}\right)^2 = 2 \quad \left(\frac{E_{0a}}{E_0}\right)^2 = 2$$

Вычисления производились при помощи логарифмической линейки и последняя цифра может быть неверной на несколько единиц. На рис. 10 и 11 дано графическое изображение функции  $\zeta(t)$  для области положительных и отрицательных температур.

Рассматривая рис. 10, следует обратить внимание на два обстоятельства: на резкое увеличение фактора  $\zeta$  для температур

выше точки кипения серы и на наличие минимума на кривой при температуре около  $30^\circ$ . Значение  $\zeta$  составляет тогда 0,8, т. е. иными словами говоря, сопротивление термометра при этой температуре определено с меньшей вероятной погрешностью, чем сопротивление  $R_0$  в ближайшей реперной точке — точке плавления льда<sup>1</sup>.

Таблица 8

Числовые значения функций  $\zeta(t)$

Область от $0^\circ$ до $660^\circ$		Область от $0^\circ$ до $-190^\circ$	
$t$	$\zeta(t)$	$-t$	$\zeta(t)$
0	1,00	0	1,00
20	0,8 <sub>2</sub>	20	1,2 <sub>0</sub>
50	0,8 <sub>5</sub>	40	1,6 <sub>5</sub>
100	1,2 <sub>5</sub>	50	1,8 <sub>5</sub>
150	1,6 <sub>0</sub>	60	2,0 <sub>0</sub>
200	1,8 <sub>4</sub>	80	2,3 <sub>0</sub>
250	1,8 <sub>7</sub>	100	2,4 <sub>8</sub>
300	1,7 <sub>6</sub>	120	2,4 <sub>7</sub>
350	1,5 <sub>5</sub>	140	2,2 <sub>0</sub>
400	1,3 <sub>1</sub>	150	1,9 <sub>8</sub>
450	1,4 <sub>8</sub>	160	1,6 <sub>7</sub>
500	2,1 <sub>8</sub>	170	1,4 <sub>1</sub>
550	3,2 <sub>5</sub>	172	1,3 <sub>0</sub>
600	4,6 <sub>8</sub>	174	1,3 <sub>4</sub>
630	5,6 <sub>5</sub>	176	1,3 <sub>2</sub>
660	6,6 <sub>8</sub>	178	1,3 <sub>5</sub>
		180	1,3 <sub>4</sub>
		190	1,7 <sub>3</sub>

<sup>1</sup> Для пояснения этого, казалось бы парадоксального факта, остановимся на разборе более простого примера. Допустим, что сопротивление изменялось бы по линейному закону.

$$R_t = R_0 + \frac{R_{100} - R_0}{100} t$$

Оба сопротивления в реперных точках  $R_0$  и  $R_{100}$  определены с вероятными погрешностями  $E_0$  и  $E_{100}$ . По закону накопления средних погрешностей вероятная погрешность сопротивления будет равна:

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial R_t}{\partial R_0} E_0\right)^2 + \left(\frac{\partial R_t}{\partial R_{100}} E_{100}\right)^2} = E_0 \sqrt{\left(1 - \frac{t}{100}\right)^2 + k^2 \left(\frac{t}{100}\right)^2} = E_0 \sqrt{(1-x)^2 + k^2 x^2} = E_0 \zeta(x)$$

где  $k = \frac{E_{100}}{E_0}$ ,  $x = \frac{t}{100}$ . Ур-ние  $y = \sqrt{(1-x)^2 + k^2 x^2}$  для разных значе-



На рис. 10 кривая имеет хорошо выраженный максимум при  $-110^\circ$ , т. е. в той области, где многие исследователи констатировали максимальные расхождения между различными платиновыми термометрами.

Если разделим вероятную погрешность сопротивления на значение производной  $\frac{dR_t}{dt}$ , мы получим выражение этой погрешности в градусах температуры.

Графическое изображение этой величины будет напоминать графическое изображение вероятной погрешности сопротивления, так как наличие делителя  $\frac{dR_t}{dt}$  созда-

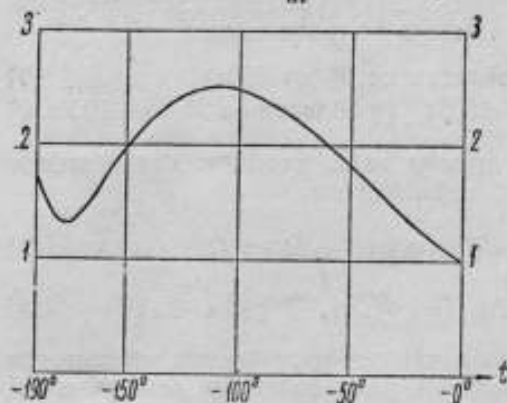


Рис. 10

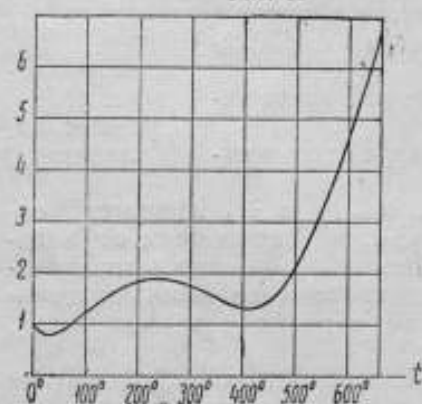


Рис. 11

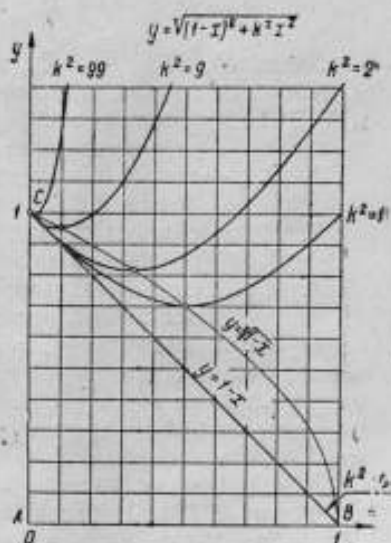


Рис. 12

ний параметра  $k^2$  изображает пучок гипербол с общей точкой  $C(0,1)$  и с общей касательной  $y=1-x$  (см. рис. 12). Здесь  $A$  и  $B$  реперные точки  $t=0$  и  $t=100$ , т. е.  $x=0$  и  $x=1$ ). Положение точки минимума на каждой кривой дает-

ся формулой  $x_m = \frac{1}{k^2 + 1}$ . Геометрическое место точек минимума — пара-

бола с ур-нием  $y = \sqrt{1-x}$ . Если вероятные погрешности в реперных точках равны, то  $k^2 = 1$  и положение средней точки между ними будет определено с

наименьшей вероятной погрешностью, составляющей 71% (точнее  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ) погрешности в каждой из них.

ет только небольшое искажение этой кривой. Не приводим соответствующих числовых примеров, потому что знание функции  $\zeta(t)$  дает достаточно ясное представление об общем характере кривых.

### § 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Интерполяционные формулы международной температурной шкалы для платинового термометра сопротивления

$$R_t = R_0(1 + At + Bt^2) \quad (\text{в области от } 0^\circ \text{ до } 660^\circ) \quad (1)$$

$$R_t = R_0[1 + At + Bt^2 + C(t-100)t^3] \quad (\text{в области от } 0^\circ \text{ до } -190^\circ) \quad (2)$$

могут быть представлены в другом виде, удобном для решения некоторых задач платиновой термометрии.

Можно написать:

$$R_t = R_0 \cdot \varphi_0(t) + R_{100} \cdot \varphi_{100}(t) + R_s \cdot \varphi_s(t) \quad (3)$$

$$R_t = R_0 \cdot \psi_0(t) + R_{100} \cdot \psi_{100}(t) + R_s \cdot \psi_s(t) + R_{02} \cdot \psi_{02}(t) \quad (4)$$

Здесь  $R_0$ ,  $R_{100}$ ,  $R_s$  и  $R_{02}$  обозначают сопротивления термометра в реперных точках эталонирования, установленных решением VII и VIII Генеральной конференции по мерам и весам, а именно:

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| 1. $R_0$ — сопротивление термометра в точке таяния льда          | } при нормальном атмосферном давлении |
| 2. $R_{100}$ — сопротивление термометра в точке кипения воды     |                                       |
| 3. $R_s$ — сопротивление термометра в точке кипения серы         |                                       |
| 4. $R_{02}$ — сопротивление термометра в точке кипения кислорода |                                       |

Функции влияния  $\varphi_0$ ,  $\varphi_{100}$ ,  $\varphi_s$ ,  $\psi_0$ ,  $\psi_{100}$ ,  $\psi_s$  и  $\psi_{02}$  являются универсальными функциями температуры, не зависящими от индивидуальных свойств термометра. Числовые значения этих функций при любой температуре определяются числовыми значениями, приписываемыми температурам четырех реперных точек, перечисленных выше.

Формула (3) является известной интерполяционной формулой Лагранжа 2-й степени и первые три функции влияния являются коэффициентами Лагранжа. Формула (4) имеет самостоятельное значение.

Формулы (3) и (4) могут быть применены для составления таблиц  $R_t$  и  $\frac{dR_t}{dt}$  для любого платинового термометра, эталонируемого согласно предписаниям „Положения о международной температурной шкале“, а также могут быть использованы для анализа влияния ошибок эталонирования в реперных точках на точность измерения температур в промежуточных точках шкалы.

Числовые значения и графики функций влияния, вычисленные на основании числовых значений температур реперных точек, узаконенных ныне действующим „Положением“ 1933 г., приведены в § 2 настоящей работы.

Формулы, определяющие  $\varphi$  и  $\psi$  — см. на стр. 7 и 11.

Малая погрешность в определении температуры по сопротивлению платинового термометра может быть подсчитана в зависимости от ошибки  $\Delta R_t$  в определении сопротивления при измеряемой температуре  $\tau$  и от ошибок сопротивлений в реперных точках  $\Delta R_0$ ,  $\Delta R_{100}$ ,  $\Delta R_s$ ,  $\Delta R_{02}$ , допущенных при эталонировании, по следующим формулам:

$$\Delta t = \left[ \frac{dt}{dR_t} \right]_{t=\tau} \Delta R_t + \mu_0(\tau) \left[ \frac{dt}{dR_t} \right]_{t=0} \Delta R_0 + \mu_{100}(\tau) \left[ \frac{dt}{dR_t} \right]_{t=100} \Delta R_{100} + \mu_s(\tau) \left[ \frac{dt}{dR_t} \right]_{t=444,80} \Delta R_s \quad (5)$$

$$\Delta t = \left[ \frac{dt}{dR_t} \right]_{t=\tau} \Delta R_t + \mu_0(\tau) \left[ \frac{dt}{dR_t} \right]_{t=0} \Delta R_0 + \mu_{100}(\tau) \left[ \frac{dt}{dR_t} \right]_{t=100} \Delta R_{100} + \mu_s(\tau) \left[ \frac{dt}{dR_t} \right]_{t=444,80} \Delta R_s + \mu_{02}(t) \left[ \frac{dt}{dR_t} \right]_{t=-182,97} \Delta R_{02} \quad (6)$$

Функции распределения  $\mu_0(t)$  . . .  $\mu_{02}$ , фигурирующие в этих формулах, должны вычисляться отдельно для каждого термометра, так как они отличаются от универсальных функций влияния множителями, зависящими от индивидуальных констант термометра, (формулы для  $\mu$  в области положительных температур — см. стр. 32, в области низких температур — см. стр. 36).

Приведенные в § 4 таблицы и графики дают достаточное для практики представление о виде этих функций и о вероятной погрешности сопротивления.

Примененные в настоящей работе методы могут быть использованы для анализа других эмпирических формул, имеющих вид полинома любой степени. (В области термометрии можно, например, аналогичным образом исследовать интерполяционную формулу платина-платинородиевой термодпары.)

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить доктора технических наук профессора Г. М. Кондратьева за живой интерес к настоящей работе и за ряд ценных указаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Callendar, H. L., „On a practical thermometric standard“. Phil. Mag. (5), 48, 519—547, 1899.
2. Lagrange, J. L. Journ. de l'École Polytechnique, vol. 2 (8), 276, 1812.
3. Mueller, E. F., „Precision Resistance Thermometry“. Статья в книге „Temperature, its measurement and control in science and industry“, р. р. 162—179 (Reinhold Publishing Corp., N. Y., 1941).
4. Van Dusen, M. S., „Platinum resistance thermometry at low temperatures“, J. Am. Chem. Soc., 47, 326, 1925.

Б. И. ПИЛИПЧУК

## КОНТРОЛЬ ЧИСТОТЫ ЛЬДА

Точка плавления льда является основной, и пожалуй, важнейшей реперной температурной точкой. Необходимо выяснить, какую точность можно получить при независимых опытах по осуществлению этой точки, и установить те экспериментальные приемы, которые могут обеспечить достижение наивысшей точности. Это тем более необходимо, что в действующем „Положении о международной температурной шкале“ 1933 г. нет указаний об этой точности и нет конкретных требований к чистоте льда и к устройству ледяной ванны. В § 2 части второй — „Подробные спецификации“ — читаем:

„§ 2. Лед. Температура тающего льда получается как температура, при которой лед, разбитый на мелкие куски, находится в равновесии с чистой, насыщенной воздухом водой, при нормальном атмосферном давлении. Увеличение давления вызывает понижение точки замерзания на  $0,007^\circ$  на атмосферу“.

Температура плавления льда зависит от следующих трех основных факторов:

- 1) от изотопического состава примененных веществ — льда и воды,
- 2) от давления, под которым находится смесь тающего льда и воды,
- 3) от сорта и количества примесей, находящихся в смеси льда и воды.

Наличие у водорода и кислорода нескольких стабильных изотопов заставляет рассматривать воду, как смесь молекул разного изотопического состава. Тяжелая вода  $D_2O$ , как известно, имеет плотность  $1,11 \frac{г}{см^3}$ , затвердевает при  $+3,82^\circ$  и кипит при  $101,42^\circ$ . Очевидно, что повышенное содержание тяжелой воды могло бы повлиять на температуру ледяной смеси. Практическое значение этого вывода сильно уменьшается тем фактом, что вода в разных местах имеет примерно один и тот же состав, так как непрерывный круговорот воды в природе создает условия для однородности ее состава.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Приоритет установления существования воды с аномальной плотностью в естественных пресных водоемах принадлежит лаборатории низких температур ВНИИМ. Основателем лаборатории проф. И. Д. Менделеевым, — сыном ве-

Зависимость температуры плавления льда от давления была экспериментально впервые установлена в 1850 г. В. Томсоном. При повышении давления на 1 физическую атмосферу (= 760 мм ртутного столба при нормальном ускорении силы тяжести) температура плавления льда понижается на  $0,0074^\circ$ . Для изменения температуры плавления на  $0,0001^\circ$  необходимо изменение давления на 10,3 мм ртутного столба. В медленно тающей смеси льда и воды при отсутствии перемешивания должно установиться распределение температур, соответствующее распределению гидростатического давления. Принимая для ориентировочного подсчета плотность смеси равной единице, мы можем подсчитать температуру равновесия на глубине  $h$  мм

$$t = -0,0074 \frac{h}{760 \cdot 13,6} = -7,2 \cdot 10^{-7} \cdot h \quad (1)$$

Увеличение глубины погружения на 140 мм сопровождается понижением температуры на  $0,0001^\circ$ .

Примеси в ледяной ванне являются главным фактором, определяющим точность воспроизведения точки плавления льда. Примеси любого рода — твердые, жидкие, газообразные — вызывают понижение точки плавления. При малых количествах примесей общее понижение приблизительно равно сумме понижений, вызываемых каждым видом примеси отдельно. Для оценки понижения температуры, под влиянием вещества-загрязнителя с молярной концентрацией  $\nu$  в растворе<sup>2</sup> можно воспользоваться законом Рауля:

$$\Delta t = 1,86 \cdot i \cdot \nu \quad (2)$$

Величина  $i$  в сильно разбавленных растворах может быть принята равной числу ионов или частиц, получающихся при растворении из одной молекулы растворенного вещества (следовательно, для неэлектролитов  $i=1$ , для вещества вроде NaCl  $i=2$ , для веществ вроде BaCl<sub>2</sub>,  $i=3$  и т. д.).

Неизбежной примесью является атмосферный воздух. Вода очень быстро насыщается воздухом и удалить из нее растворен-

ликого русского химика, — еще до открытия в 1933 г. Льюисом, Макдональдом и Вашбурном тяжелой воды, была выдвинута гипотеза о существовании воды аномальной плотности на больших глубинах озер. В 1933 г. им и Л. Д. Худяковой были исследованы образцы воды с различных глубин озера Байкал, при этом было установлено, что вода на глубине 1650 м по сравнению с водой, взятой на поверхности, имеет уплотнение на 5,6 единиц шестого знака. Ввиду того, что в лабораториях пользуются льдом, взятым с поверхности водоемов, указанная аномалия практического значения не имеет.

См. 1. Г. Ю. Верещагин, А. И. Горбов, И. Д. Менделеев. Доклады А. Н. СССР, 1934, февраль.

2. И. Д. Менделеев. Известия Гос. Географического Общества, 68, 627—639, 1936.

<sup>2</sup> Молярная концентрация — число молей растворенного вещества на 1000 г растворителя.

ный воздух очень трудно (например, по некоторым данным даже кипящая вода содержит в одном литре  $1 \text{ см}^3$  воздуха). Еще труднее было бы защищать анаэрированную воду от насыщения атмосферным воздухом. В положении о международной температурной шкале эти обстоятельства отражены в самом определении точки плавления льда: точка плавления льда есть температура равновесия между льдом и водой, насыщенной воздухом под атмосферным давлением. Пожалуй, единственная температура, которая после введения этого определения изменила свое числовое значение — это температура тройной точки воды. Воздух, насыщающий воду при  $0^\circ$ , понижает температуру равновесия между льдом и водой на  $0,0024^\circ$ . Эта величина должна была быть прибавлена к температуре тройной точки, измеренной при старом определении нулевой точки.

Атмосферное давление влияет на точку плавления льда двояко: во-первых, как уже отмечалось, давление само по себе вызывает понижение точки плавления, во-вторых, количество воздуха, насыщающего воду, по закону Гечри, прямо пропорционально его давлению и, следовательно, давление влияет на точку плавления косвенно, в зависимости от количества воздуха, растворенного в воде. Как было указано выше, точка плавления понижается на  $0,0074^\circ$  от повышения давления на 1 физическую атмосферу, а воздух, насыщающий воду, вызывает понижение на  $0,0024^\circ$ . Положим, что

$$t = -\alpha(p - 760)$$

где  $\alpha$  — неизвестный пока коэффициент пропорциональности. Если  $p = 0$  температура водно-ледяной смеси будет  $0,0074^\circ + 0,0024^\circ$ , потому что исчезли обе причины понижения и, следовательно

$$\alpha = \frac{0,0098}{760} = 1,29 \cdot 10^{-5}$$

Таким образом, температура таяния льда в смеси с водой, насыщенной воздухом, меняется в зависимости от атмосферного давления

$$t = -1,29 \cdot 10^{-5}(p - 760) \quad (3)$$

Растворимость газов уменьшается с повышением температуры. При смешении со льдом воды, насыщенной воздухом при  $25^\circ$ , устанавливается температура равновесия на  $0,001^\circ$  выше законной определением. При точных работах следует считаться с этим обстоятельством и заранее готовить воду, насыщенную воздухом при температуре близкой к  $0^\circ$ .

Возможные примеси ко льду очень разнообразны, но самой важной из них является поваренная соль. Примесь  $157 \text{ мг}$  к  $1 \text{ кг}$  воды достаточна для понижения температуры равновесия между льдом и таким раствором на  $0,01^\circ$ .

С какой же точностью можно воспроизводить точку плавления льда, если пользоваться естественным льдом?

Совершенно очевидно, что не может быть какого-либо универсального ответа на этот важный вопрос. Точность зависит в каждом отдельном случае от множества конкретных обстоятельств: от происхождения льда, от способа его доставки на место хранения, от чистоты в ледохранилище и даже на подступах к ледохранилищу и т. д. Не меньшую роль играет техника эксперимента: тщательность подготовки кусков льда (например, из блоков искусственного льда необходимо удалять внешние слои и сердцевину), чистота в лаборатории, подготовка насыщенной воздухом воды, качество самой воды, учет тех или иных поправок и т. д. Неудивительно, что литературные сведения по интересующему нас вопросу до известной степени противоречивы.

В 1915 г. Геннинг считал, что естественный лед позволяет воспроизвести нулевую точку с точностью до  $0,003^{\circ}$ — $0,004^{\circ}$  и что для достижения большей точности следует обращаться к искусственному льду, тщательно приготовленному из дистиллированной воды.

В недавнее время целый ряд исследователей пришли к заключению о возможности воспроизведения точки плавления льда с точностью до  $0,0001^{\circ}$ .

Эта же точка зрения о возможности осуществления точки плавления льда с большей точностью, чем принимали раньше, нашла свое отражение в проекте „Положения о международной температурной шкале 1939 г.“, представленном на рассмотрение 1 сессии Консультативного комитета по термометрии. В § 2 третьей части читаем:

**Точка плавления льда.**

Температура равновесия между льдом и водой, насыщенной воздухом, легко осуществляется в смеси мелко раздробленного льда и насыщенной воздухом воды, находящейся в хорошо изолированном сосуде, как, например, в сосуде Дьюара. Соблюдая некоторые меры предосторожности относительно чистоты льда и воды, насыщения воды воздухом и учитывая влияние давления, можно воспроизвести температуру плавления льда с точностью лучшей, чем  $0,001^{\circ}$ .

Для зависимости температуры от давления указана следующая формула:

$$t = -1,29 \cdot 10^{-5}(p - 760) - 7,2 \cdot 10^{-7} h \quad (4)$$

объединяющая обе ранее приведенные формулы (1) и (3).

Совершенно очевидно, что приведенный текст страдает неопределенностью, так как он не содержит конкретных указаний на степень чистоты льда и воды, на способы контроля насыщения воды воздухом, которые позволили бы достичь указанной точности воспроизведения нулевой точки. На 1-й сессии Кон-

сультативного комитета по термометрии по поводу цитированного параграфа была интересная дискуссия, но в принятом „Проекте положения о международной температурной шкале 1939 г.“ был сохранен текст соответствующего параграфа „Положения 1933 г.“.

По материалам Международного Бюро мер и весов, относящимся к периоду времени 1939—1946 гг., точность воспроизведения нулевой точки составляет  $0,002^{\circ}$ — $0,003^{\circ}$ . Чистота воды, добавляемой ко льду, имеет решающее значение: при чистой воде одинаково хорошие результаты дает продажный лед и лед из дистиллированной воды.

Эта оценка точности противоречит данным других исследователей. Очевидно, что подобные разногласия будут наблюдаться до тех пор, пока в методику воспроизведения нулевой точки не будет внесено

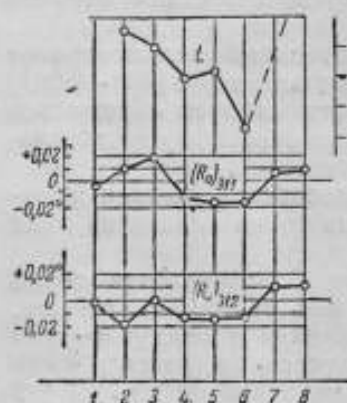


Рис. 1

21° существенное улучшение, путем 20° предъявления определенных требований к весовой концентрации загрязняющих веществ или к величине электропроводности воды, полученной после таяния льда. Всю важность такого уточнения методики эксперимента легко продемонстрировать на опытном материале. Если выбрать из материалов за прошлые годы (1935—1939) одновременные определения  $R_0$  двух платиновых термометров сопротивления лаборатории низких температур, определения с результатами, выпадавшими из общего ряда, и представить

их графически, нанеся данные для обоих термометров на один и тот же чертеж, мы получим картину, изображенную на рис. 1. Изменение сопротивления в нулевой точке одного термометра в точности копирует изменение сопротивления другого термометра. Измерение сопротивления производилось при помощи одного и того же потенциометра Диссельгорста и одной и той же нормальной катушки сопротивления. Комнатная температура во время измерений нанесена на том же чертеже. Видимой связи между комнатной температурой и результатами измерений нет. Остается единственное объяснение для подобного хода кривых: чистота льда оказывала заметное влияние на результаты определения  $R_0$  платиновых термометров—и единственный вывод: объективный контроль чистоты льда является необходимым при всяких точных термометрических работах.

Для контроля чистоты льда разными исследователями применялись следующие три способа<sup>1</sup>:

<sup>1</sup> По частному сообщению Г. С. Курбатова, им с успехом использовался криоскопический способ исследования чистоты талой воды.



1) проба на присутствие хлористых солей при помощи азотнокислого серебра. Эту пробу указывает Геннинг и ею пользовались в Лейденской лаборатории;

2) взвешивание остатков после выпаривания воды;

3) определение электропроводности воды, полученной после таяния льда.

Первый способ представляет известный интерес, потому что хлористый натрий является часто встречающейся примесью, однако он имеет серьезный недостаток, потому что он устанавливает отсутствие только одной группы примесей.

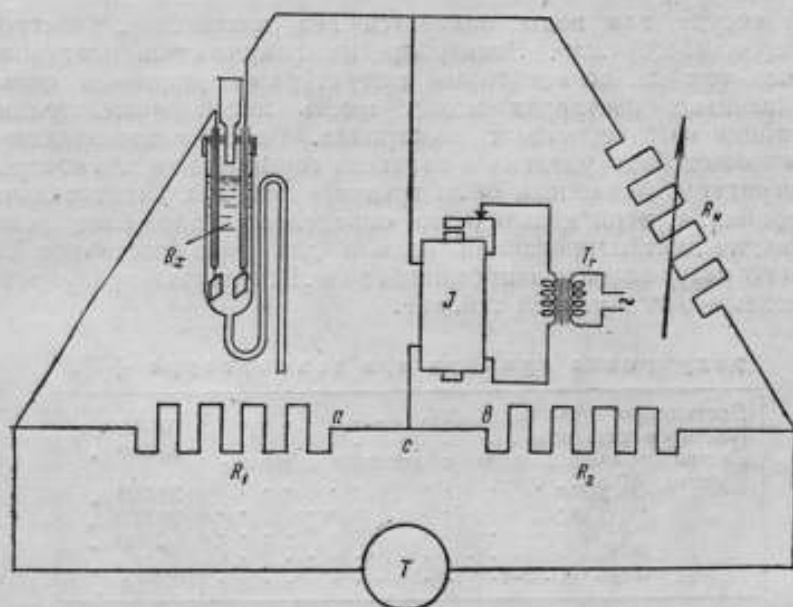


Рис. 2

Второй способ позволяет выделить все примеси, но практическое его осуществление очень хлопотливо и трудоемко, к тому же точность способа очень невелика.

Третий способ является самым простым и надежным. Он не позволяет установить род примеси, но он достаточно чувствителен и дает право отбросить всякое наблюдение, когда вода будет иметь необычную электропроводность.

При выборе схемы установки мы остановились на первоначальном способе Кольрауша, потому что в нашем распоряжении находилась малая катушка Румкорфа. На рис. 2 приведена принципиальная схема собранной нами опытной установки. Источником переменного тока служит маленькая катушка Румкорфа  $J$ , первичная обмотка которой присоединяется к вторичной обмотке маленького трансформатора  $T$ , рассчитанной на 4 в.

Первичная обмотка трансформатора включается в осветительную сеть. Плечи моста составлены из измерительного сосуда  $R_x$ , штепсельного магазина сравнения  $R_N$  и двух угольных сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  с номинальной величиной сопротивления 18 000 ом. Отсутствие барабанного реохорда, который мог бы быть включен между точками  $a$  и  $b$ , не позволило получить на установке удобной плавной регулировки для подыскания минимума силы звука в телефоне  $T$ . Пришлось ограничиться грубым подысканием равновесия при помощи вынимания штепселей в магазине сравнения  $R_N$ .

В сосуде для воды находятся два платиновых электрода размером  $(8 \times 6)$  мм<sup>2</sup>. Электроды не покрывались платиновой чернью, так как по некоторым литературным данным в сильно разбавленных растворах может иметь место нежелательная адсорбция на зачерненных электродах. Воронка для наливания воды может быть удалена и заменена термометром для контроля температуры. Установка была градуирована для относительных измерений. С этой целью было определено положение равновесия для дистиллированной воды и для ряда растворов хлористого натрия в дистиллированной воде. Результаты градуировки приведены в следующей таблице.

Градуировка прибора при температуре  $+16,0^\circ$

Дистиллированная вода . . . . .	70 000 ом
Водопроводная вода . . . . .	30 000 "
Дистиллированная вода с весовым содержанием: 0,001% . . . . .	30 000 "
0,002% . . . . .	20 000 "
0,02% . . . . .	2 000 "
0,2% . . . . .	200 "
2% . . . . .	50 "

Измерение электропроводности воды после таяния льда показало, что во всех наблюдавшихся случаях она была равновесна раствору, содержащему 0,001% NaCl. Если бы в воде фактически находилась только поваренная соль,— это вызвало бы понижение температуры равновесия между льдом и водой на величину, не достигающую  $0,001^\circ$ . Больших отклонений в мае 1947 г. не наблюдалось.

Автор считает своим долгом выразить благодарность кандидату техн. наук Л. Д. Худяковой, принимавшей участие в экспериментах.

Б. И. ПИЛИПЧУК

### ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ТОЧКИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ РТУТИ

По положению о международной температурной шкале 1933 г. в области температур от  $0^{\circ}$  до  $-190^{\circ}$  первичной реперной точкой является только точка кипения кислорода, служащая для определения константы  $C$  в формуле

$$R_t = R_0[1 + At + Bt^2 + C(t - 100)t^3]$$

установленной в этой области для эталонного платинового термометра<sup>1</sup>.

Для градуировки вторичных приборов, предназначенных для измерения низких температур, по положению можно воспользоваться наряду с точкой кипения кислорода двумя вторичными реперными точками — точкой затвердевания ртути и точкой возгонки углекислоты. Из этих вторичных точек точка затвердевания ртути заслуживает особого внимания, потому что ее легко осуществить с большой точностью при помощи несложной аппаратуры. Ртуть легко получается в достаточно чистом виде и ее физические свойства способствуют получению четкой „площадки“ затвердевания на кривой охлаждения.

Постараемся выяснить, какие именно физические свойства создают наиболее благоприятные условия для наблюдения точки затвердевания. Предположим, что нам необходимо сделать выбор между точками затвердевания двух веществ. Поставим эти два вещества в такие условия, чтобы температура во всех точках массы каждого из них в любой момент времени была одинакова и чтобы скорость охлаждения обоих веществ перед началом затвердевания была одна и та же. Будем считать, что в нашем распоряжении имеются идеально совершенные приборы для измерения температур, позволяющие снять без всяких искажений кривые охлаждения обоих веществ. Очевидно, что из двух сравниваемых веществ мы отдадим предпочтение тому веществу, у которого, в условиях нашего идеализированного опыта длина „площадки“ на кривой охлаждения будет больше.

<sup>1</sup> Константа  $R_0$  определяется непосредственным измерением сопротивления термометра в точке плавления льда, а константы  $A$  и  $B$  находятся путем наблюдений в точках кипения воды и серы, полагая в формуле константу  $C$  равной нулю.

На рис. 1 изображена наиболее интересная часть одной из кривых охлаждения. Ордината  $t_0$  соответствует температуре затвердевания жидкости. Небольшой отрезок  $AB$  кривой охлаждения, расположенный перед площадкой затвердевания  $BC$ , можно рассматривать, как прямую. Тангенс угла  $\varphi_1$  представляет скорость охлаждения  $v_1 = -\left[\frac{dt}{d\tau}\right]_{\tau=\tau_1}$  перед началом затвердевания. Скорость охлаждения определяется теплоотдачей на поверхности раздела нашей жидкости с окружающей средой, потому что произведение скорости охлаждения на теплоемкость всей массы

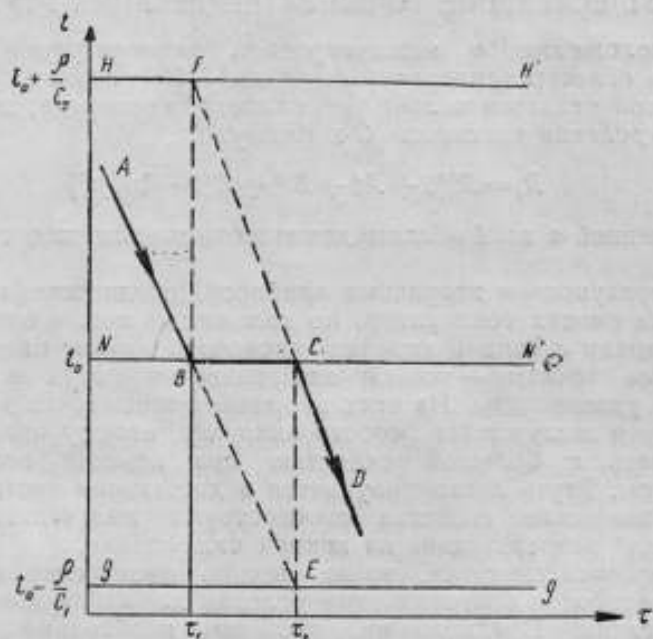


Рис. 1

жидкости есть количество тепла, отдаваемое среде в единицу времени. Будем предполагать, что полная теплоемкость охлаждающей среды значительно превышает полную теплоемкость охлаждаемой жидкости и что поэтому можно считать температуру среды постоянной в течение всего опыта. Во время процесса затвердевания разность температур затвердевающей жидкости и окружающей среды будет оставаться постоянной (мы отвлекаемся от возможного переохлаждения жидкости), будет постоянным коэффициент теплоотдачи на поверхности раздела и будет постоянным количество тепла, отдаваемое жидкостью среде в единицу времени. Если бы не происходило образования твердой фазы, — продолжалось бы охлаждение жидкости с постоянной скоростью, со скоростью, заданной на-

клонном отрезке  $AB$ . Ход изменения температуры изобразился бы прямой  $BE$ , лежащей на продолжении прямой  $AB$ . Введем следующие обозначения:

- $m$  — масса вещества,
- $\rho$  — скрытая теплота перехода единицы массы из жидкого состояния в твердое.
- $c_1$  — удельная теплоемкость жидкого вещества при постоянном давлении,
- $c_2$  — удельная теплоемкость твердого вещества при постоянном давлении.

Количество тепла, отдаваемое среде в единицу времени на отрезке  $AB$  и его продолжении  $BE$ , равно произведению  $v_1 \cdot c_1 \cdot m$ . По истечении промежутка времени  $T$

$$T = \frac{m\rho}{v_1 \cdot c_1 \cdot m} = \frac{\rho}{v_1 \cdot c_1}$$

жидкость потеряла бы количество тепла, численно равное скрытой теплоте затвердевания всей ее массы. Изолировав в момент времени  $t_1 + T$  переохлажденную жидкость от теплообмена со средой и устраняя ее переохлаждение, мы вызвали бы затвердевание всей ее массы с одновременным повышением температуры до значения  $t_0$ .

Проведем на рисунке через точку  $g$  с ординатой  $t_0 - \frac{\rho}{c_1}$  прямую —  $gg'$ , параллельную оси абсцисс. Продолжение отрезка  $AB$  встречает эту прямую в точке  $E$ . Опуская из точки  $E$  перпендикуляр на прямую  $NN'$ , мы найдем графически конец площадки затвердевания. Длина отрезка  $BC$  является графическим изображением вычисленного нами времени  $T$ . Теплоемкость твердого вещества меньше теплоемкости жидкости, поэтому отрезок  $CD$ , примыкающий к площадке  $BC$ , будет иметь несколько иной наклон.

Если бы мы изменили направление оси времен, мы могли бы проследить кривую плавления. Для графического построения площадки на кривой в этом случае следовало бы пользоваться прямой  $NN'$ , отсекающей на оси ординат отрезок  $t_0 + \frac{\rho}{c_2}$ . Ход построения такой же, как и раньше, но теперь он не допускает даже условной физической интерпретации, так как отрезок  $CF$  соответствует перегреву твердого тела выше точки плавления.

Указанные способы построения и рассуждения, на которых они основаны, не являются, конечно, строгими. Кроме допущений, оговоренных в тексте, мы сделали целый ряд неявных предположений приближенного характера<sup>1</sup>, однако все же мы можем считать, что длительность площадки на кривой затвердевания в первую очередь зависит от величины отношения

<sup>1</sup> Мы предполагали, например, что теплообмен со средой жидкой и твердой фаз одинаково интенсивен, что теплоемкость не зависит от температуры и т. п.

$\frac{p}{c_1}$ . Это отношение имеет размерность температуры и его можно рассматривать как величину фиктивного переохлаждения, которому следует подвергнуть жидкость для того, чтобы после устранения переохлаждения вся ее масса перешла в твердое

состояние при нормальной температуре затвердевания.

Скрытая теплота затвердевания ртути составляет 2,72

$\frac{\text{кал}}{\text{г}}$ , теплоемкость жидкости при 20° равна примерно 0,033

$\frac{\text{кал}}{\text{г град}}$ . (Теплоемкость ртути

возрастает при понижении температуры вплоть до самой точки затвердевания.) Грубо говоря, интересующее нас отношение для ртути имеет тот же порядок величины, что и для воды, составляя 80°. На основании наших соображений, мы приходим к выводу, что при одинаковой скорости охлаждения длительность площадок кривых затвердевания воды и ртути будет одинакова. (Не следует забывать, что меньшая теплоемкость ртути потребует для достижения скорости охлаждения, равной скорости охлаждения воды, менее интенсивного теплообмена с охлаждающей средой.)

Большая теплопроводность — около  $7,2 \frac{\text{ккал}}{\text{м. град. час}}$ , в 15 раз превышающая теплопроводность воды и в 36 раз превышающая теплопроводность этилового алко-

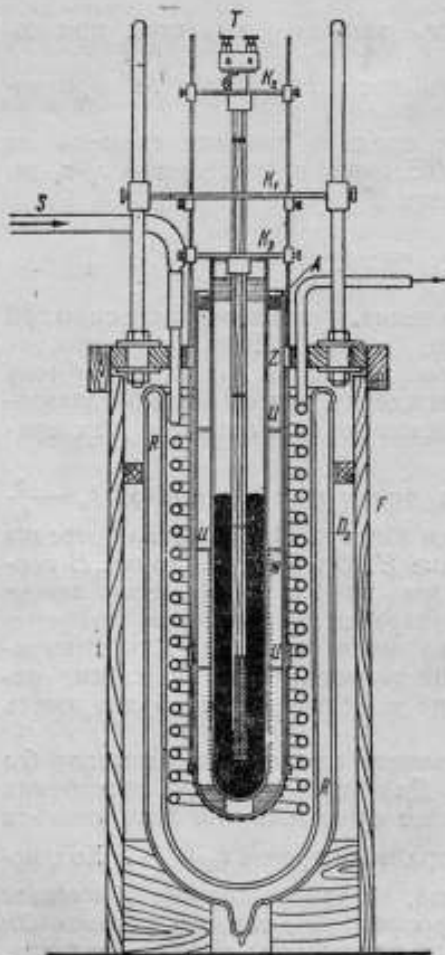


Рис. 2

ля, гарантирует достаточно равномерное распределение температур в затвердевающей массе ртути.

Физические свойства ртути позволяют с большой точностью воспроизвести ее точку затвердевания — 38,87°. Необходимая аппаратура отличается большой простотой. Оба эти обстоятельства делают вторичную реперную ртутную точку необходимой для каждой лаборатории низких температур.

На рис. 2 дан разрез прибора<sup>1</sup>, служащего в лаборатории низких температур ВНИИМ для воспроизведения ртутной точки. В деревянном кожухе  $F$  квадратного сечения находится стеклянный цилиндрический дьюаровский сосуд  $D_2$  (внутренний диаметр 11 см, глубина 35 см). Кожух сверху закрывается съемной крышкой, на которой монтируются все остальные детали прибора.

Замораживаемая ртуть находится в стеклянной пробирке диаметром 32 мм. Эта пробирка стоит на пробковых подкладках внутри защитной пробирки большего диаметра — 45 мм, погруженной в охлажденный спирт, находящийся в дьюаре  $D_2$ . Кольцевое воздушное пространство между пробирками служит для замедления теплообмена между ртутью и холодным спиртом. Для того, чтобы избежать конвекционных токов воздуха в этом пространстве, — оно подразделено по высоте на четыре отдельных отсека тремя слюдяными прокладками  $U$ . Верхний конец наружной пробирки закрыт пробкой, центрирующей внутреннюю пробирку и препятствующей проникновению влаги в кольцевое пространство. Обе пробирки удерживаются на весу в центре дьюаровского сосуда  $D_2$  при помощи тонких стальных тяг и сетчатого поддона. Тяги, поддерживающие пробирки, закреплены на перекладине  $K_1$ , которая может перемещаться в вертикальном направлении, скользя своими цилиндрическими втулками по вертикальным стойкам, укрепленным на деревянной крышке кожуха  $F$ , окружающего дьюаровский сосуд  $D_2$ .

Спирт в дьюаровском сосуде охлаждается потоком жидкого воздуха, подаваемым из металлической дьюаровской колбы (на рис. 2 она не изображена, см. рис. 3), через дьюаровский сифон  $S$  в витки бифилярно свитого медного змеевика  $R$ . Змеевик свит из трубки красной меди с внутренним диаметром 6 мм. Длина трубки в распрямленном виде около 5,5 м. Змеевик закреплен на крышке футляра  $F$ . Для перемешивания спирта во время охлаждения служит кольцевая мешалка, не изображенная на рис. 2. (На рис. 2 можно видеть ее ручку в пространстве между сифоном и верхним концом пробирок).

Изучаемый термометр или термопара ставится вдоль оси внутренней пробирки. Если во внутреннюю пробирку налить около 160 см<sup>3</sup> ртути, то при погружении платинового термометра сопротивления обычно применяемого типа, уровень ртути поднимется на высоту 25 см над дном пробирки. Термометр будет отделен от дна слоем ртути, толщиной 20 мм, а от стенок слоем толщиной 12 мм.

Для охлаждения спирта надо пропускать через змеевик прибора поток жидкого воздуха. Одновременно с охлаждением необходимо перемешивать спирт вручную мешалкой и следить за его температурой при помощи пентанового термометра или

<sup>1</sup> Первоначальная конструкция прибора была разработана в 1937 г. И. Р. Лениным при участии автора.

термопары. По мере охлаждения объем спирта уменьшается. Для поддержания постоянной высоты уровня спирта в дьюаре  $D_2$  служит сосуд с запасом спирта, соединяемый с дьюаром сифоном из резиновой трубки. Меняя при помощи специальной подставки положение этого сосуда по высоте, можно подливать спирт в дьюаровский сосуд по мере надобности. После окончания работы сосуд с запасом спирта опускается на такую высоту, чтобы расширяющийся при нагревании спирт не мог подойти к краям дьюара.

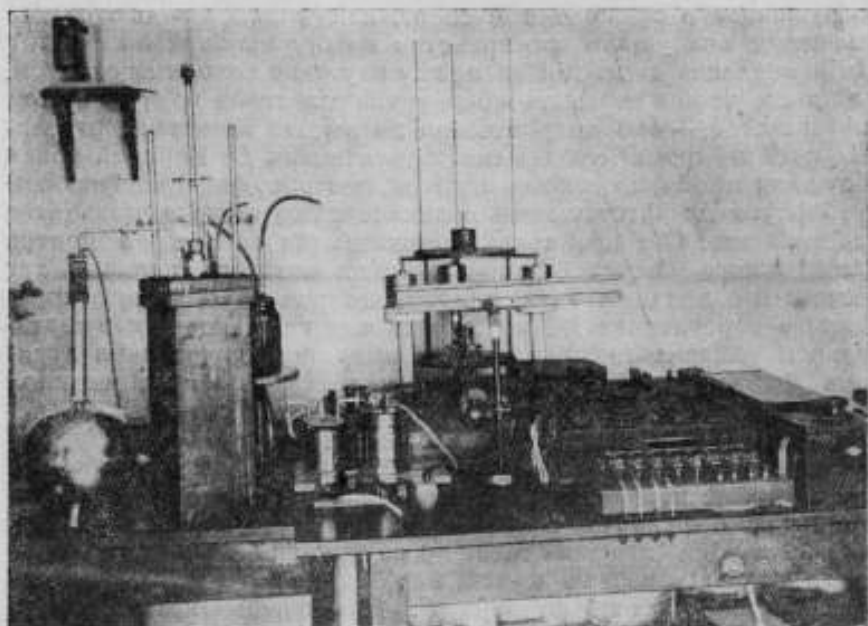


Рис. 3

Общий вид всей установки изображен на рис. 3. Слева на отдельном столике стоит дьюаровская колба с запасом жидкого воздуха и прибор для осуществления ртутной точки, справа на другом столе располагается установка потенциометра Диссельгорста, служащая для электрических измерений. На рисунке хорошо видны отдельные детали всей установки: резиновая груша для нагнетания воздуха в колбу с жидким воздухом, дьюаровский стеклянный сифон, по которому жидкий воздух попадает из колбы в змеевик прибора, крышка кожуха прибора со стойками и держателями для пробирок и изучаемых термометров. В пробирке с ртутью стоит платиновый термометр сопротивления. Справа помещается на круглой подставке сосуд с запасом спирта (кожух прибора загородил на рисунке этот



сосуд наполовину). От сосуда идет резиновая трубка, через которую производится подлив спирта.

В 1947 году при температуре затвердевания ртути при помощи описанного прибора были измерены сопротивления двух платиновых термометров сопротивления №№ 312 и 318, а также измерена т. э. д. с. медно-константановой термопары № 2, служившей до 1941 г. образцовым прибором при поверке жидкостных термометров и технических термопар.

Ртуть, примененная для работы, была очищена электролизом по способу Ганки.

Сопротивление платиновых термометров измерялось с точностью до  $10^{-5}$  омов при помощи моста Мюллера для температурных измерений № 8069 фирмы Лидс и Нортруп, зав. № 313396.

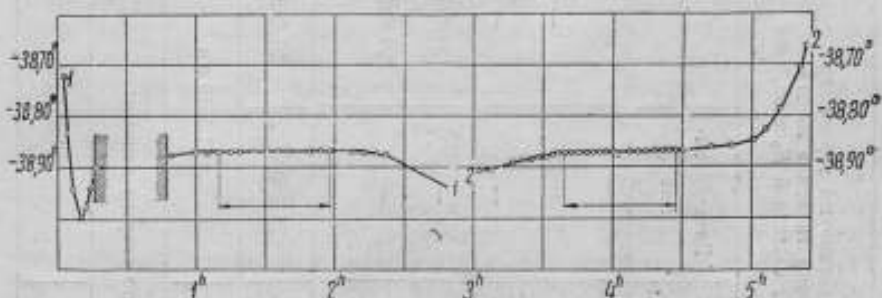


Рис. 4

Т.э.д.с. измерялись с точностью до 0,1 мкв потенциометром по Диссельгорсту фирмы Вольф зав. № 6601, снабженным дополнительным устройством той же фирмы зав. № 8523.

Методика работы была следующей: спирт в дьюаре охлаждался при непрерывном перемешивании, примерно, до  $-50^{\circ}$ . Для достижения этой температуры необходимо было в течение 20—30 минут пропустить через змеевик прибора 1,5—1,7 л жидкого воздуха, после чего подача жидкого воздуха прекращалась. В дальнейшем ведении опыта подача жидкого воздуха возобновлялась всякий раз, когда температура спирта поднималась выше  $-40^{\circ}$ . Внимательно следя за температурой спирта и показаниями поверяемого прибора, погруженного в ртуть, можно получить площадку затвердевания длительностью в несколько часов.

Для наблюдения точки плавления необходимо вынуть пробирку с замерзшей ртутью и замороженным в нее прибором, быстро заменить часть холодного спирта в дьюаре спиртом комнатной температуры, чтобы получить температуру спирта выше точки плавления на  $1^{\circ}$ — $2^{\circ}$  и затем вернуть пробирку с твердой ртутью на свое место.

На рис. 4 под 1 приведена кривая затвердевания, снятая при помощи платинового термометра сопротивления № 312. Перерыв

Результаты измерений

Платиновый термометр сопротивления № 312 Крест фарфоровый $R_0 \approx 10$ ом		Платиновый термометр сопротивления № 318 Крест слюдяной $R_0 \approx 25,5$ ом		Медно-константановая термопара № 2	
Дата	Затвердевание	Плавление	Дата	Затвердевание	Плавление
12.III	9,4496 <sub>6</sub>	—	19.III—1947	21,4802 <sub>7</sub>	—
13.III	9,4498 <sub>4</sub>	—	—	—	—
18.III	9,4498 <sub>2</sub>	—	19.III—1947	—	21,4834 <sub>1</sub>
18.III	—	9,4497 <sub>8</sub>	19.III—1947	—	21,4832 <sub>3</sub>
Среднее	9,4497 <sub>7</sub>	9,4497 <sub>8</sub>	Среднее	21,4802 <sub>7</sub>	21,4833 <sub>3</sub>
Общее среднее	9,4498 ом		Общее среднее	21,4818 ом	
Было вычислено по старым данным:					
1939	9,4498 ом		1940	21,4815 ом	
			1938	1448,7 мкв	

на кривой, отмеченный вертикальными линиями с примыкающей штриховкой, относится к времени, когда наблюдение было прервано из-за необходимости подлить спирт. Термометр отметил наличие небольшого переохлаждения ртути.

Кривая 2 представляет кривую плавления, снятую при помощи платинового термометра сопротивления № 318.

На обеих кривых отмечены стрелками отрезки площадок, использованные для измерений.

Результаты всех измерений приведены в приводимой ниже таблице, где они сопоставлены с результатами вычислений по старым данным.

В целях сопоставления для термометра № 312 использованы данные, приведенные в отчете термометрической лаборатории ВНИИМ за 1939 г. „Материалы по исследованию точки затвердевания ртути“. Для термометра № 318 сопротивление при температуре  $-38,87^{\circ}$  было вычислено по результатам эталонирования 1940 г. Данные для термопары № 2 взяты из отчета термометрической лаборатории за 1938 г. „Разработка методов измерения температур до  $-100^{\circ}$  при помощи термопар из благородных металлов“.

Совпадение старых и новых результатов для платиновых термометров следует признать хорошим. Т. э. д. с. термопары № 2 изменилась довольно значительно — увеличилась на  $5,4$  мкв, что соответствует температурной погрешности порядка  $0,15^{\circ}$ . Так как рабочий спай был в 1946 г. армирован заново после поломки — термопара № 2 нуждается в новой градуировке.

Автор считает своим долгом выразить благодарность кандидату технических наук Л. Д. Худяковой за помощь при измерениях и доктору технических наук профессору Г. М. Кондратьеву за ряд ценных советов.

Л. Д. ХУДЯКОВА

## ИЗУЧЕНИЕ НИЗКОГРАДУСНЫХ ЖИДКОСТНЫХ СТЕКЛЯННЫХ ТЕРМОМЕТРОВ

Изучению поведения при низких температурах низкоградусных жидкостных термометров до сих пор не было уделено достаточного внимания.

В имеющейся в нашем распоряжении литературе мы находим указания лишь на отдельные вопросы, связанные с изучением жидкости, наполняющей термометр, и с определением некоторых констант, характеризующих термометры, главным образом ртутные, в области от  $0^{\circ}$  до  $-30^{\circ}$ . Нас же интересует возможность применения жидкостных стеклянных термометров для точных измерений температур от  $0^{\circ}$  до  $-190^{\circ}$ .

Большой интерес представляют ртутно-таллиевые термометры, расширяющие область измерения температур ртутными термометрами до  $-59^{\circ}$ .

Лаборатория низких температур ВНИИМ уже давно предвидела возможность применения ртутно-таллиевых термометров в качестве образцовых. Ею были произведены подготовительные работы по изучению ртутно-таллиевых термометров, но начавшаяся война помешала осуществлению намеченной цели.

Еще в 1901 г. Н. С. Курнаков и Н. А. Пушин [1], исследуя плавкость таллиевых амальгам, установили, что таллий, растворяясь в ртути, понижает температуру плавления амальгамы. Они нашли, что при процентном содержании таллия, равном 8,34, полное затвердевание происходит при  $-60^{\circ}$ .

Таллиевая амальгама сильно окисляется в воздухе, что затрудняет применение ее в качестве наполнителя термометра, но по исследованиям Гельмута Мозера (Helmut Moser) [2] не окисляется в вакууме и аргоне. В своей статье он приводит некоторые данные расчета для изготовления термометров, наполненных амальгамой таллия. Им также указывается, что в нескольких экземплярах термометров, изготовленных фирмой Füss, после годичного их употребления не было обнаружено никаких заметных загрязнений капилляра: по внешнему виду капилляры не отличались от ртутных термометров.

Эти указания подтверждают наше предположение о возможности использования ртутно-таллиевых термометров в качестве образцовых. В группу изученных нами термометров вошли следующие:

1. Набор из 10 жидкостных стеклянных палочных термометров фирмы Siebert & Kühn с наименьшим подразделением на  $0,1^{\circ}$ . В дальнейшем эти термометры отмечаются номерами 1, 2, 3 . . . 9, 10.

2. Набор жидкостных стеклянных палочных термометров той же фирмы из 5 экземпляров, с наименьшим подразделением на  $0,2^{\circ}$ . В отличие от первого набора мы им присваиваем номера: 1', 2', 3', 4' и 5'.

3. Набор из 10 жидкостных стеклянных термометров со вложенной шкалой типа „Collux“ той же фирмы, с наименьшим подразделением  $0,1^{\circ}$ .

Условно этим термометрам в дальнейшем мы присваиваем обозначения: C1, C2 . . . C10.

4. Жидкостный стеклянный палочный термометр № 16325 с наименьшим подразделением  $1^{\circ}$  фирмы Baudin.

5. Ртутно-галлиевые термометры с вложенной шкалой с наименьшим подразделением на  $0,2^{\circ}$  фирмы Bossecker за номерами: 547, 581 и 693.

6. Четыре ртутных стеклянных термометра типа палочных, изготовленных „Мастерскими Главмервеса“ за номерами: 5880, 16252, 16254 и 16245 и один № 5749 со вложенной шкалой, изготовленный заводом „Эталон“.

Всего исследованию подвергалось 34 термометра. Характеристики указанных термометров даны в табл. 1.

Нами были изучены: 1) отставание термометров, 2) влияние выступающего столбика, 3) термическое последствие, 4) физические явления в резервуарах термометров, наполненных органическими жидкостями, 5) ошибки отсчета.

## § 1. ОТСТАВАНИЕ

Одним из основных свойств, характеризующих поведение термометра, является отставание термометра, поэтому изучению этого вопроса было уделено особое внимание. С целью выявления эффекта трения жидкости о стенки капилляра, отставание нами изучалось при понижающихся и повышающихся температурах.

В первом случае термометр из комнатной температуры переносился в ванну с отрицательной температурой, во втором — из ванны с отрицательной температурой термометр переносился либо в ванну с нулевой температурой, либо в ванну с положительной температурой.

Применяемые при этом ванны были двух типов: ванны перемешиваемые и ванны неперемешиваемые. К перемешиваемым ваннам относятся: ванна жидкого воздуха и криостат, наполненный этиловым спиртом. В качестве неперемешиваемых ванн у нас фигурировали: блок-термостат, спиртовая ванна при  $0^{\circ}$  и воздушная при  $+15^{\circ}$ .

Ванна жидкого воздуха состояла из цилиндрического Дьюа-

Таблица 1

№ п/п	№ термометра	Тип	Фирма	Сорт стекла	Наполнитель	Пределы шкалы		Наименьшее показание	Объем лампы и мл	Длины лампы и мм	Резервуар	
						от	до				Диаметр и мм	Высота и мм
1	1	Палочный	Stiebert & Kühn	Jenaer Normal Glas	пентан	от	-5	0,1	3,0	5-6	6,02	47
2	2	"	"	"	"	"	2	0,1	2,97	3-6	6,14	47
3	3	"	"	"	"	"	4	0,1	2,98	4-5	6,22	43
4	4	"	"	"	"	"	5	0,1	2,96	4-5,5	6,19	43
5	5	"	"	"	"	"	6	0,1	2,98	3-5	6,22	41
6	6	"	"	"	"	"	6	0,1	2,98	3-4,5	5,95	43
7	7	"	"	"	"	"	6	0,1	2,95	3-4	6,02	42
8	8	"	"	"	"	"	6	0,1	2,98	3-5	6,13	40
9	9	"	"	"	"	"	4	0,1	2,98	2,5-4,5	6,05	41
10	10	"	"	"	"	"	2	0,1	2,98	3-5,5	6,12	40
11	11	"	"	"	"	"	10	0,2	3,00	3-4	6,12	48
12	12	"	"	"	"	"	0	0,2	2,98	3-4	6,12	44
13	13	"	"	"	"	"	0	0,2	2,98	3-4	6,05	42
14	14	"	"	"	"	"	0	0,2	2,95	3-5	6,09	40
15	15	"	"	"	"	"	0	0,2	2,98	2,5-4,5	6,06	40
16	16	Со вложенной шкалой	"	"	"	"	6	0,1	2,94	6	7,76	30
17	17	"	"	"	"	"	0	0,1	2,95	5-6,5	7,65	30
18	18	"	"	"	"	"	0	0,1	2,95	5-6	7,56	30
19	19	"	"	"	"	"	0	0,1	2,95	5-6	7,67	30
20	20	"	"	"	"	"	0	0,1	2,98	4,5-6,5	7,56	31
21	21	"	"	"	"	"	0	0,1	2,95	4-6,5	7,46	26

№ п/п	№ термита	Тип	Фирма	Сорт стекла	Наполнитель	Пределы шкалы	Наименование подразделения	Общая длина в мм	Длинные детали градусы в мм	Реактуар		
										Диаметр в мм	Длина в мм	Форма
22	C7	Со вложенной шкалой	Siebert & Kuhn	Jenaer Normal Glas	пентан	от 0 до -142	0,1	295	4-6,5	7,78	30	Цилиндрическая
23	C8	"	"	"	"	0	0,1	295	3-4	7,53	28	"
24	C9	"	"	"	"	0	0,1	295	3,5-5,5	7,24	30	"
25	C10	"	"	"	"	0	0,1	295	3-6	7,35	29	"
26	16325	Палочный	Vaidin	ver-dure немское	"	+3	1	395	1-2	5,30	48	"
27	547	Со вложенной шкалой	Bossecker	"	амаль-тама	+20	0,2	375	3	10,62	10,62	Сферическая
28	581	"	Bossecker	немское	талла амаль-тама таллан	+20	0,2	375	3	10,58	10,58	"
29	693	"	"	"	"	+20	0,2	375	3	10,55	10,55	"
30	5749	"	З-д Эталон	типа немского	руть	+12	0,1	488	8	7,95	22	Цилиндрическая
31	5880	Палочный	Мастерские Глазмерверса	"	"	+22	0,1	425	6	7,60	37	"
32	16254	"	"	"	"	+20	0,2	268	4,5	5,46	18	"
33	16252	"	"	"	"	+20	0,2	268	4	6,53	19	"
34	16245	"	"	"	"	+12	0,1	268	8	6,37	23	"

ровского сосуда, наполненного жидким воздухом. Эту ванну мы относим к типу перемешиваемых, так как во время погружения термометров жидкий воздух бурно кипел, вследствие чего возникали потоки, создающие интенсивное естественное перемешивание; кипение продолжалось в течение всего опыта.

Описание блок-термостата в ближайшее время будет дано в отдельной статье.

Воздушная ванна представляла собою стеклянный цилиндрический сосуд емкостью в 25 л. Стеклянный сосуд играл роль экрана, исключавшего влияние наблюдателя.

Во всех случаях, когда термометр из спиртовой ванны переносился в воздушную, он быстро и тщательно протирался ватой. При известном навыке наблюдателя с указанной операцией можно было вполне справиться без каких-либо резких изменений в режиме проводимого опыта.

Спиртовая ванна состояла из Дьюаровского цилиндрического сосуда, наполненного спиртом с температурой 0°. Ввиду того, что в неперемешиваемой спиртовой ванне температура во время опыта, особенно при погружении термометра, охлажденного до температуры жидкого воздуха, могла меняться, температура ванны измерялась дополнительным термометром в начале и конце опыта. При изменении температуры вводились соответствующие поправки.

Отсчеты времени и температуры по изучаемому термометру производились одновременно двумя наблюдателями; при этом отсчет по термометру производился с помощью лупы, времени — по секундомеру.

При изучении отставания при понижающихся температурах начальному моменту времени соответствовало положение мениска жидкости термометра равное нулю. При повышающихся температурах за начальный момент времени принимался момент вынимания термометра из ванны. Для вычисления константы отставания и построения графиков кривых мы воспользовались обычным способом (изложение его см. в статье Г. М. Кондратьева) [3].

Если константу отставания обозначить через  $\varepsilon$ , постоянную температуру, т. е. температуру ванны, через  $t$ , а переменные температуры, отсчитываемые по термометру в соответствующие моменты времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , через  $U_1$  и  $U_2$ , то

$$\varepsilon = - \frac{\tau_1 - \tau_2}{\ln|U_1 - t| - \ln|U_2 - t|}$$

В дальнейшем для удобства вычисления  $\varepsilon$  графически мы полагаем

$$\ln|U_1 - t| - \ln|U_2 - t| = 1$$

Тогда

$$\varepsilon = - (\tau_1 - \tau_2)$$



Здесь  $\varepsilon$  выражено непосредственно в секундах. Если по оси абсцисс отложить время в секундах, а по оси ординат нату-

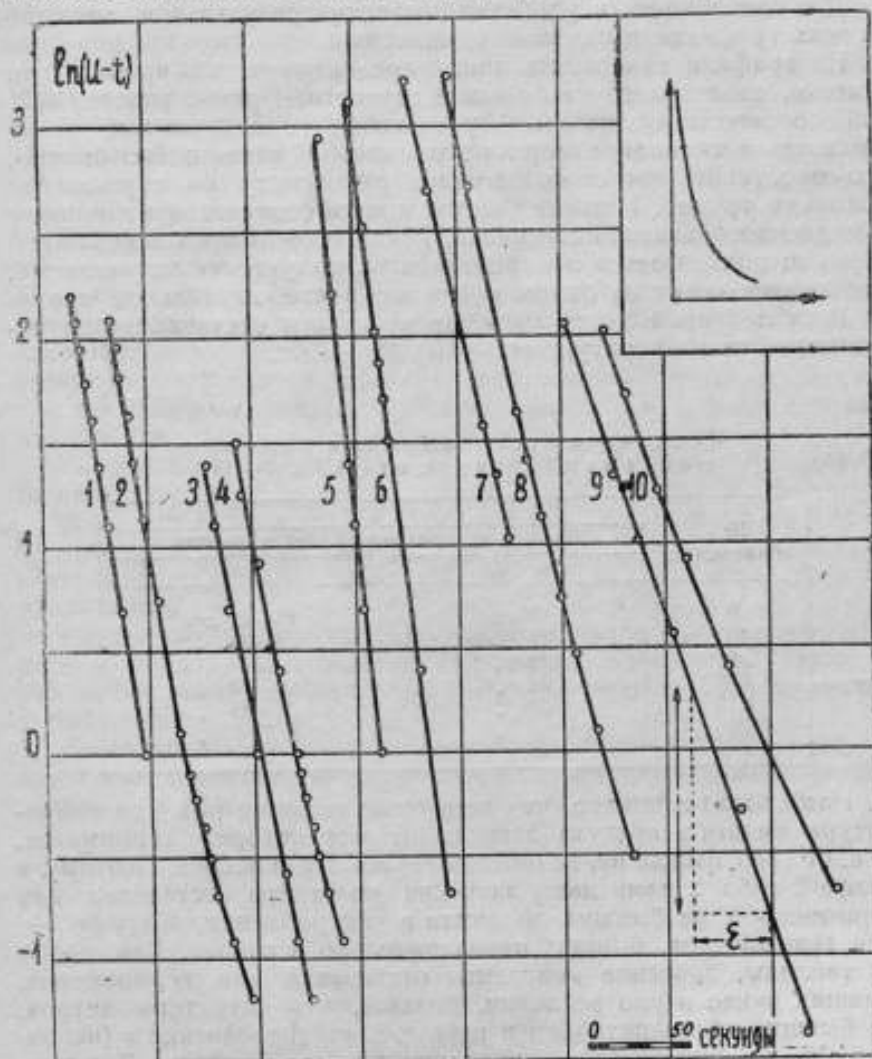


Рис. 1. Кривые отставания при понижающейся температуре, от  $+15^\circ$  до  $-190^\circ$ .  
1, 2—термометр №9; 3, 4—№10; 5, 6—№16 32х; 7, 8—С9; 9, 10—С10.

ральный логарифм абсолютного значения разности постоянной и переменной температур, то при условии, что

$$\ln|U_1 - t| - \ln|U_2 - t| = 1$$

$\varepsilon$  находится непосредственным отсчетом по оси абсцисс разности моментов времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$ .

В дальнейшем мы во всех случаях находим  $\varepsilon$  графически (см. рис. 1).

Для наглядности и удобства сравнения результатов масштаб на всех графиках выдержан одинаковым.

На графики наносились лишь средние участки кривых, как участки, отвечающие наибольшей точности. Верхний участок кривой соответствует начальному времени, т. е. времени, когда жидкость в капилляре термометра движется настолько быстро, что сопоставить отсчет по секундомеру отсчету по термометру довольно трудно. Нижний участок кривой соответствует периоду замедленного движения мениска, когда момент прохождения его через штрих делается неопределенным, получается впечатление, что мениск стоит на одном и том же месте длительное время.

В табл. 2 приводится значение константы отставания при понижающейся температуре от  $+15^\circ$  до  $-190^\circ$ .

Таблица 2

Константа отставания при понижающейся температуре от  $+15^\circ$  до  $-190^\circ$

№ термометра	$\varepsilon$	
	Термометр предварительно в работе не был	был
9	13 сек	15—22 сек
10	18 .	18—21 .
5'	12 .	—
C9	22 .	20—28 .
C10	34 .	34—47 .
16325	8 .	12 .

Нами было замечено, что поведение термометров при температуре жидкого воздуха зависит от предистории термометра, т. е. от того были ли перед опытом термометр в работе. Поэтому в графе 2 табл. 2 нами даны значения константы отставания для термометров, не бывших до опыта в употреблении, в графе 3— для термометров, бывших предварительно в работе. Как видно из таблицы, значение константы отставания для термометров, бывших ранее в употреблении, больше, чем для термометров, не бывших предварительно в работе. Двойное значение  $\varepsilon$  (например, 15—22 сек) означает криволинейную зависимость. Для всех термометров, не бывших ранее в работе, зависимость линейная (нечетные кривые рис. 1), в то время, как для термометров, бывших предварительно в работе, зависимость получается криволинейной (четные кривые рис. 1). Исключением является термометр № 16325, для него в обоих случаях зависимость линейная, что может быть объяснено малой его точностью (наименьшее подразделение этого термометра  $1^\circ$ ).

На средних участках кривых, приводимых нами, криволинейная зависимость не так ясно заметна, но если взять кривую на

всем ее протяжении, то отступление от закона линейности получается настолько заметным, что пренебречь им нельзя. Характерная для всех термометров кривая отставания на всем ее протяжении приводится в правом верхнем углу рис. 1.

Влияние предистории термометра на его отставание наиболее сказывается у термометров со вложенной шкалой, что объясняется наличием у этого типа термометров внешней оболочки.

На основании многочисленных опытов нами установлено, что отступление от закона линейности тем больше, чем длительнее термометр находился в работе.

Влияние предистории термометра на его поведение наблюдается только при температурах жидкого кислорода и жидкого воздуха, поэтому мы считаем, что здесь играет роль повышение вязкости термометрической жидкости: чем дольше термометр находился в работе, тем жидкость становится более вязкой; этим и объясняется наибольшее искривление кривых отставания для термометров, находившихся предварительно в более длительной работе.

Указание на большую вязкость при низких температурах технического пентана мы встречаем у Rudolf'a Rothe [4].

Если при низких температурах отставание зависит от времени употребления термометров, то говорить о каких-либо точных измерениях жидкости термометрами при этих температурах не приходится.

Изучению отставания при понижающейся температуре от  $+15^{\circ}$  до  $-10^{\circ}$  подверглись уже другие жидкостные термометры из указанных выше наборов и дополнительно ртутно-таллиевые термометры.

Здесь точно так же, как и при температуре жидкого воздуха, изучалось поведение термометров, бывших и не бывших предварительно в работе. Различия в поведении не обнаружено.

Таблица 3

Константа отставания при понижающейся температуре от  $+15^{\circ}$  до  $-10^{\circ}$

№ термометра	z	
	Ванна перемешиваемая	Ванна неперемешиваемая
1	14 сек	18 сек
1'	14 "	20 "
5880	12 "	20 "
16254	7 "	13 "
5749	9 "	15—29 "
C1	16 "	21—42 "
547	14 "	20—31 "
581	10 "	20—33 "
693	12 "	20—34 "

В табл. 3 приводится значение константы отставания для термометров, инерция которых изучалась в перемешиваемой и неперемешиваемой ваннах.

Здесь мы видим, что для всех термометров, независимо от их наполнителя, константы отставания  $\tau$  в неперемешиваемой ванне больше, чем в перемешиваемой.

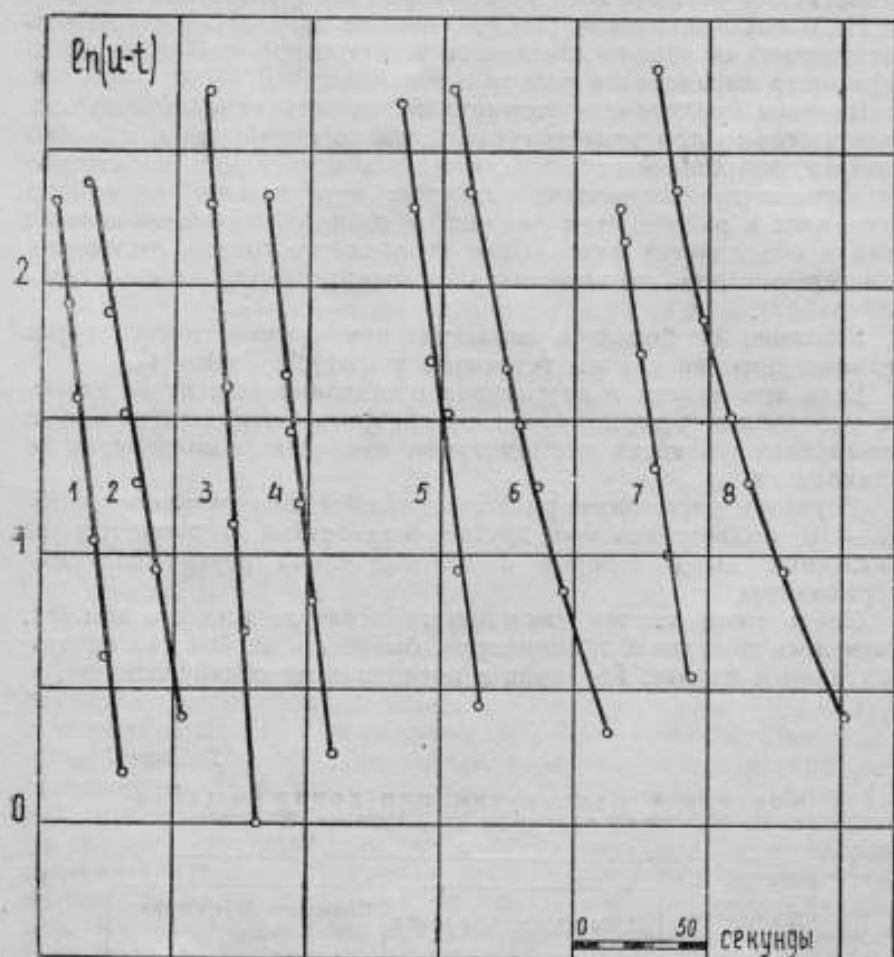


Рис. 2. Кривые отставания при понижающейся температуре от  $+15^\circ$  до  $-10^\circ$ .  
1, 2—термометр №1 3, 4—№16204; 5, 6—№547; 7, 8—Слю.

В неперемешиваемой ванне кривые отставания (на рис. 2 — четные кривые) для термометров типа палочных подчиняются линейному закону, для термометров со вложенной шкалой зависимость криволинейная. В перемешиваемой ванне (на рис. 2 — нечетные кривые) отставание выражается линейно для всех типов термометров.

Отступление от линейной зависимости для термометров со вложенной шкалой объясняется большими габаритами этого типа термометров. Вследствие их большой теплоемкости температура перемешиваемой ванны сравнительно малого объема повышается, а повышение температуры должно увеличивать константу отставания и вызвать искривление графика. Отставание при повышающихся температурах, как уже указывалось выше, изучалось нами в воздушной при  $+15^{\circ}$  и нулевой перемешиваемых ваннах и в перемешиваемой ванне при  $0^{\circ}$ .

В табл. 4 и 5 приводится значение константы отставания  $\varepsilon$  в перемешиваемой и перемешиваемой ваннах при повышающихся температурах от  $-10^{\circ}$  до  $0^{\circ}$  и от  $-190^{\circ}$  до  $0^{\circ}$ .

Таблица 4 \*

Константа отставания при повышающейся температуре от  $-10^{\circ}$  до  $0^{\circ}$

№ термо-метра	$\varepsilon$	
	Ванна перемешиваемая	Ванна перемешиваемая
1	7 сек	15 сек
1'	10 "	19 "
5880	9 "	16 "
16254	7 "	11 "
5749	7 "	13—22 "
C1	11 "	— "
547	8 "	16—22 "
581	8 "	14—26 "
693	8 "	16—25 "

Таблица 5

Константа отставания при повышающейся температуре от  $-190^{\circ}$  до  $0^{\circ}$

№ термо-метра	$\varepsilon$	
	Ванна перемешиваемая	Ванна перемешиваемая
9	10 сек	12 сек
10	9 "	10 "
5'	6 "	10 "
16325	7 "	12 "
C9	10 "	17 "
C10	14 "	28 "

При повышающихся температурах, как и при понижающихся, константа отставания в перемешиваемой ванне больше, чем в перемешиваемой. Как правило, константа отставания при повышающихся температурах меньше, чем при понижающихся, что объясняется эффектом трения жидкости о стенки капилляра при понижении мениска. Подробное описание эффекта трения дано Г. М. Кондратьевым [3], а поэтому мы на нем не останавливаемся.

Влияние трения, вследствие большой вязкости жидкости особенно заметно при глубоких охлаждениях (сравни таблицы 2 и 4). При температуре  $-10^{\circ}$  в нашем случае разница мала, так как условия опыта не совсем идентичны: при понижающейся температуре перепад температур  $25^{\circ}$ , при повышающейся температуре всего лишь  $10^{\circ}$ .

На графике рис. 3 изображены кривые отставания при повышающейся температуре от  $-190^{\circ}$  до  $0^{\circ}$ . Нечетными нумера-

ми отмечены кривые, полученные при опытах в перемешиваемой ванне; четными — полученные в неперемешиваемой ванне.

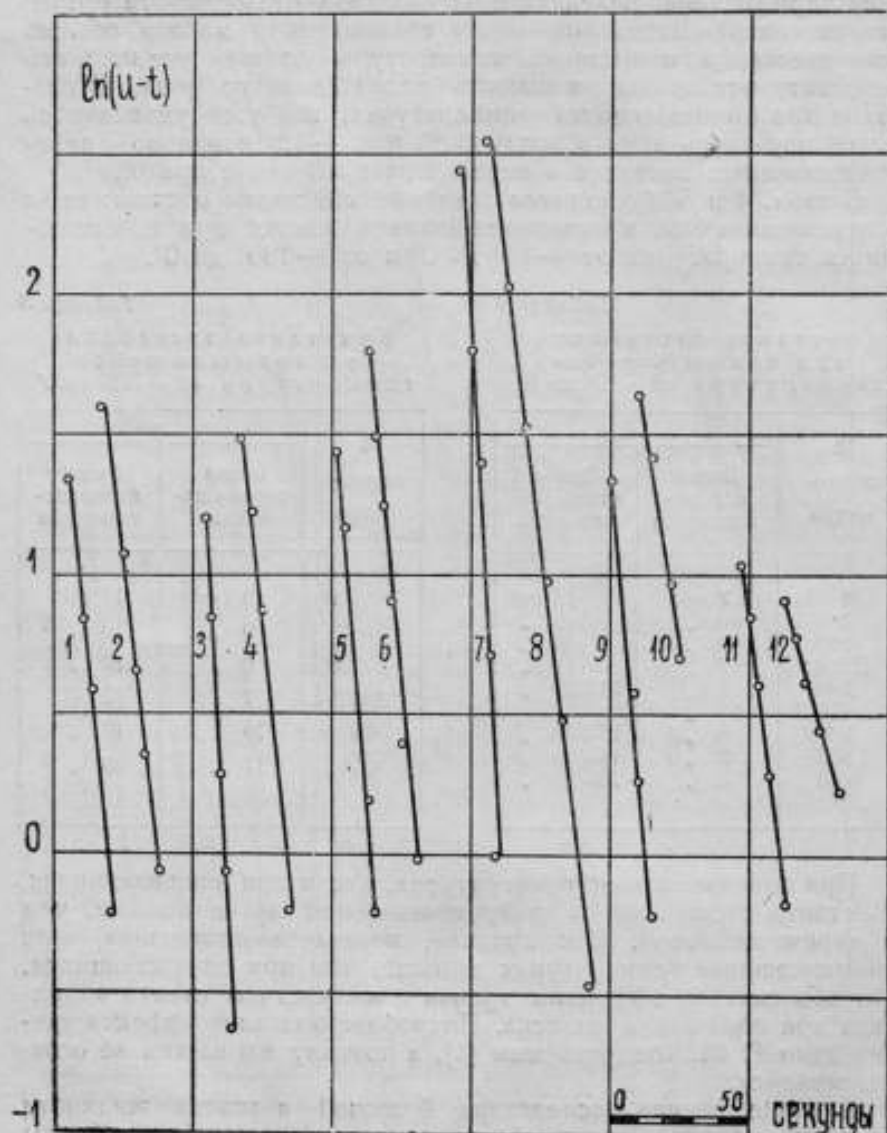


Рис. 3. Кривые отставания при повышающейся температуре от  $-190^{\circ}$  до  $0^{\circ}$ .  
1,2—термометр №9; 3,4—№5; 5,6—№10; 7,8—№16325; 9, 10—С9 и 11,12—С10.

При повышающейся температуре, так же, как и при понижающейся, в перемешиваемой ванне кривые отставания для всех типов термометров подчиняются линейному закону (нечетные кривые рис. 3). В неперемешиваемой ванне при повышаю-

щейся температуре от  $-10^{\circ}$  до  $0^{\circ}$  для термометров со вложенной шкалой наблюдается отклонение от линейной зависимости (см. табл. 4), в температурном же интервале от  $-190^{\circ}$  до  $0^{\circ}$  зависимость для всех типов термометров линейная (четные кривые рис. 3). Указанное обстоятельство объясняется тем, что при изучении инерции термометров в интервале от  $-190^{\circ}$  до  $0^{\circ}$  мы пользовались ванной большого объема, так как в ванне малого объема температура при погружении термометра настолько менялась, что получить надежных результатов не удалось.

График кривых отставания при повышающейся температуре от  $-190^{\circ}$  до  $0^{\circ}$  нами не приводится, так как ход этих кривых совпадает с ходом кривых в этом же интервале при понижающейся температуре.

Если провести грубое сравнение величины константы отставания в перемешиваемой ванне при повышающейся температуре от  $-10^{\circ}$  до  $0^{\circ}$  для термометров типа со вложенной шкалой, но с разными наполнителями, то оказывается, что для ртутных термометров константа отставания равна 6 сек, для ртутно-таллиевых 8 сек и для жидкостных 11 сек.

Как известно, величина константы отставания зависит от диаметра резервуара, немного от его длины, от формы и толщины стенок.

В нашем случае все сравниваемые термометры имеют как разную форму, так и разные размеры резервуара. У термометров ртутного № 5749 и жидкостного С1 резервуар цилиндрической формы, но разных размеров, у ртутно-таллиевых термометров форма резервуара сферическая. Именно поэтому мы и говорим лишь о грубом сравнении.

Несмотря на то, что в самом невыгодном положении по величине и форме резервуара (см. табл. 1) находятся ртутно-таллиевые термометры, константа отставания для них все же меньше, чем для жидкостных — это является большим преимуществом ртутно-таллиевых термометров перед жидкостными.

Константа отставания зависит не только от скорости перемешивания ванны, но и от величины температурного перепада. Для определения этой зависимости мы нашли константу отставания для всех типов термометров в перемешиваемой воздушной ванне при повышающихся температурах от  $-10^{\circ}$  до  $+15^{\circ}$  и от  $-40^{\circ}$  до  $+15^{\circ}$ . Данные этих наблюдений приведены в табл. 6.

Как видно из табл. 6, константа отставания уменьшается с увеличением температурного перепада. Если в жидкостной ванне для всех ртутно-таллиевых термометров величина константы одинакова, то в воздушной ванне она значительно отличается. Условия опыта в воздушной среде усложняются необходимостью протирания термометра после вынимания его из спиртовой ванны. Небольшие количества спирта, остающиеся на термометрах после протирки, испаряясь, понижают температуру самого термометра, а так как эти количества спирта всегда

будут разными, то и условия опыта получаются несколько различными, что и отображается термометром. Однако порядок величины  $\varepsilon$  сохраняется и закономерность в изменении константы отставания с увеличением температурного перепада от этого не нарушается. Зависимость отставания термометров от величины температурного перепада наглядно представлена на рис. 4, где нечетным кривым соответствуют кривые отставания в температурном интервале от  $-10^\circ$  до  $+15^\circ$ , четным — кривые отставания в температурном промежутке от  $-40^\circ$  до  $+15^\circ$ .

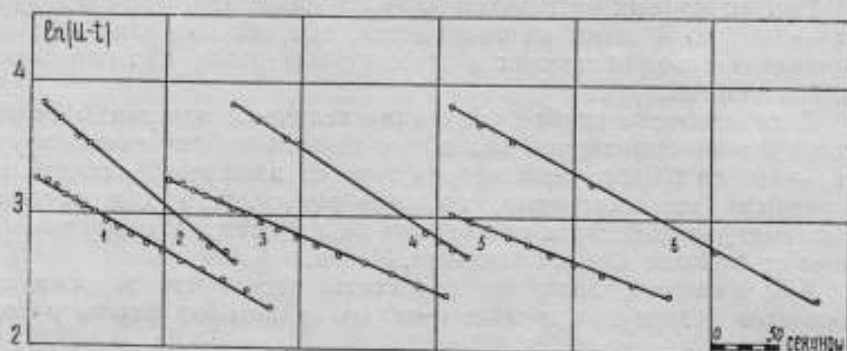


Рис. 4. Кривые отставания при повышающихся температурах от  $-10^\circ$  до  $+15^\circ$  и от  $-40^\circ$  до  $+15^\circ$ .

1—термометр №1; 2—№2; 3—C1; 4—C2; 5,6—№547

Таблица 6

Константа отставания при повышающихся температурах от  $-10^\circ$  до  $+15^\circ$  и от  $-40^\circ$  до  $+15^\circ$

№ термометра	$\varepsilon$	
	от $-10^\circ$ до $+15^\circ$	от $-40^\circ$ до $+15^\circ$
1	182 сек.	—
2	—	120 сек.
1*	230 "	—
C1	243 "	—
C2	—	156 "
547	270 "	185 "
581	302 "	190 "
693	296 "	192 "
5749	272 "	—
5880	330 "	—
16254	186 "	—

Как уже указывалось выше, нагревание велось в воздухе. Холодный термометр, внесенный в воздух, резко нарушает картину движения естественных конвекционных токов (см. рис. 5);



это нарушение тем больше, чем больше температурный перепад, следовательно и скорость циркуляции больше, чем больше разность температур термометра и воздуха. С увеличением же интенсивности естественных конвекционных токов увеличивается теплопередача, а с увеличением теплопередачи уменьшается  $\varepsilon$ . Как видно из графика рис. 4 и табл. 6, константа отставания  $\varepsilon$  менее всего меняется у жидкостных термометров палочного типа (кривые 1 и 2), имеющих наименьшие габариты, благодаря чему происходит меньшее искажение картины движения воздушных потоков.

Из всего изложенного выше можно сделать вывод, что константа отставания:

1) в неперемешиваемой ванне больше, чем в перемешиваемой,

2) при повышающейся температуре меньше, чем при понижающейся,

3) уменьшается с увеличением разности температур начальной и конечной,

4) в жидкостных термометрах при низких температурах зависит от предистории термометра.

## § 2. ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В РЕЗЕРВУАРАХ ТЕРМОМЕТРОВ, НАПОЛНЕННЫХ ОРГАНИЧЕСКИМИ ЖИДКОСТЯМИ

Жидкостные термометры в области температур ниже  $-80^\circ$  ведут себя очень своеобразно. Работа с термометрами подобного типа трудна и требует большой тщательности и внимания. Совсем нередким является прилипание жидкости к стенкам капилляра при понижении температуры. Еще в 1904 г. Rudolf Rothe [4] указал на факт прилипания жидкости к стенкам капилляра. При этом он рекомендовал, во избежание прилипания жидкости, погружать термометр в жидкий воздух медленно. Нами установлено, что медленное погружение не всегда дает хорошие результаты, особенно в тех случаях, когда термометр перед употреблением находился в длительной работе.

При экспериментах в жидком воздухе или жидком кислороде

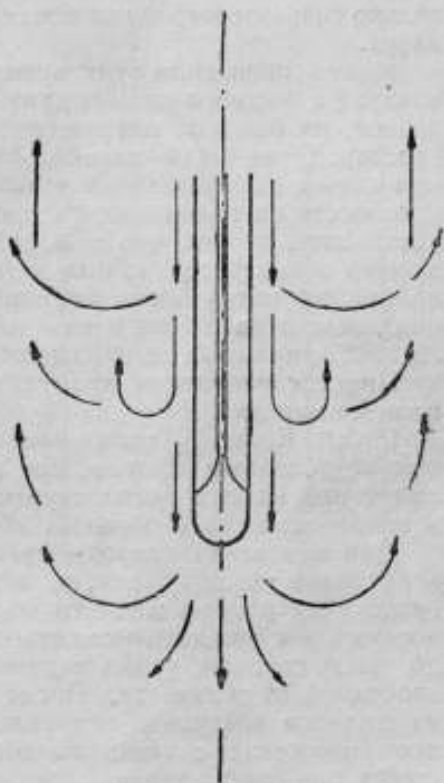


Рис. 5. Схема естественного конвекционного движения воздуха вблизи холодного термометра

нами было обнаружено появление в пентане пузырей<sup>1</sup>, быстро поднимающихся по капилляру вверх и разрывающихся в объеме запасного расширения. Пузыри имели самую разнообразную форму. Иногда они появляются в виде мелкого бисера, не разрывая столбика жидкости в капилляре, иногда в виде больших столбиков, длиною в несколько линейных градусов, разрывающих столбик и часто застревающих в капилляре. В таких случаях только сильным встряхиванием термометров можно выбить пузыри вверх.

Место появления этих пузырей при температурах жидкого воздуха и жидкого кислорода нами не было установлено. Ни медленное, ни быстрое погружение термометров в жидкий воздух (кислород) не дало никаких результатов. Пузыри появляются при самых разнообразных условиях и очень редко удается воспроизвести их появление по желанию. Единственно, что удалось установить, это то, что пузыри появляются всегда, когда термометр предварительно был в длительной работе. При кратковременном погружении термометров в жидкий воздух (кислород), как правило, за очень редким исключением (термометр № 16325), пузырей не наблюдалось.

Процесс появления пузырей по внешнему виду напоминает процесс кипения.

Rudolf Rothe [5] также заметил, что термометры, наполненные петролейным эфиром, при длительности работы свыше 15 минут при низких температурах дают помутнение в капилляре и неправильность в образовании мениска.

Для выяснения природы пузырей мы брали термометр с максимальной температурой, на которую он рассчитан, значительно выше температуры жидкого воздуха. Охлаждая его в жидком воздухе, мы ожидали момента опускания жидкости в резервуар до такой степени, чтобы верхняя часть резервуара оставалась свободной от жидкости. После этого мы вынимали термометр из жидкого воздуха и опрокидывали его почти в горизонтальное положение с таким наклоном, чтобы пузырь, образовавшийся при охлаждении, при нагревании жидкости оставался в резервуаре, не проскакивая в капилляр. Наблюдения в воздухе при комнатной температуре показали, что пузырек при нагревании постепенно уменьшается в объеме до полного исчезновения. Этот опыт подтвердил наше предположение, что пузыри являются ничем иным, как газами, растворенными в пентане.

Подобное явление отмечено Грундманом [6] при работе с термометрами, наполненными креозотом. Появление в креозоте пузырей происходило при охлаждении термометров до  $-39^{\circ}$ . Явление, возникающее при этой температуре в креозоте, по

<sup>1</sup> Под пентаном мы подразумеваем не чистый пентан, а пентанзую фракцию с температурой кипения от  $+15$  до  $+28^{\circ}$ , обычно применяемую в качестве термометрической жидкости.

описанию Грундмана в точности совпадает с явлением, наблюдаемым нами в пентане при температуре жидкого воздуха (кислорода). Грундман объясняет появление пузырей выделением каких-либо газовых гидратов, растворенных в креозоте.

Нами были поставлены специальные опыты по изучению предела температур, при котором возможно появление пузырей. Для этой цели мы охлаждали термометры до  $-100^{\circ}$  и наблюдали за резервуаром в воздухе при нагревании. При такой температуре резкого выделения пузырей, которое наблюдается в жидком воздухе, не обнаружено, но замечено следующее: в одних термометрах, после того, как они вынуты из ванны с температурой  $-100^{\circ}$  и несколько нагреты, в резервуаре появляется большое количество мелких твердых частиц типа пылинок, хорошо видимых простым глазом и находящихся в конвекционном движении (рис. 6-а); в других термометрах появляется множество мельчайших пузырьков, которые также находятся в конвекционном движении, но вокруг другой оси (рис. 6-б). В двух случаях наблюдалось появление в резервуаре пузырьков большого размера типа пузырьков, образующихся в жидком воздухе. Во всех случаях появление и частиц и пузырьков наблюдается вблизи температуры  $-78^{\circ}$ . При нагревании они постепенно исчезают. В разных термометрах время существования пузырьков и твердых частиц различно.

Природа появления пузырьков как в данном случае, так и при температуре жидкого воздуха, повидимому, одна, разница только в силе эффекта вследствие большой разности температур, равной почти  $100^{\circ}$ . Помимо появления пузырьков в пентане при температуре жидкого воздуха нами еще замечено появление в некоторых термометрах хлопьев белого цвета, появляющихся в резервуаре после того, как термометр нагрет несколько выше температуры жидкого воздуха. При этом хлопья, появляясь в любом месте резервуара, падали ко дну и, не дойдя до него, быстро исчезали. Иногда во время одного и того же опыта удавалось наблюдать повторное появление хлопьев через неко-

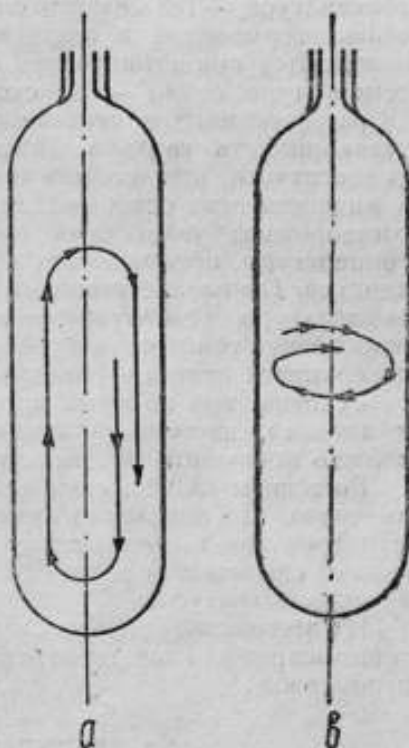


Рис. 6.

торое время после исчезновения первой порции. Установить, при какой температуре появляются хлопья, не удалось, так как их появление происходит при температуре значительно выше той, которую может отметить термометр, предназначенный для измерения температуры жидкого воздуха. Во время появления хлопьев жидкость всегда находилась в объеме запасного расширения. Однако, нам кажется, что появление „пылинок“ при температуре  $-78^\circ$  связано с появлением хлопьев после пребывания термометра в жидком воздухе. Повидимому и хлопья появляются при температуре около  $-78^\circ$ . Если это так, то при температуре около  $-78^\circ$  скорее всего выпадает углекислота из растворенного в пентане углекислого газа. Как известно, растворимость газов в жидкости повышается с уменьшением температуры, при повышении же температуры растворенные в жидкости газы освобождаются. В нашем случае, повидимому, растворенный углекислый газ, освобождаясь при повышении температуры, превращается в углекислоту, выпадающую в виде хлопьев. Появление вторичных хлопьев, несмотря на повышение температуры резервуара, может быть объяснено временным понижением температуры резервуара вследствие испарения с его поверхности спирта, применяемого для протирания.

Условия, при которых происходит возникновение пузырьков и хлопьев, настолько сложны, что выяснение этого явления должно послужить предметом особого исследования.

Во всяком случае, специально поставленными опытами нами выяснено, что появление пузырей не влияет на отставание термометров при повышающейся температуре от  $-190^\circ$  до  $0^\circ$ , но сильно сказывается на показаниях термометра, завышая их на несколько градусов.

Из всего изложенного следует, что применение жидкостных термометров для точных измерений при температурах ниже  $-70^\circ$  невозможно.

### § 3. ВЫСТУПАЮЩИЙ СТОЛБИК

Поправка на выступающий столбик зависит от величины выступающего столбика термометра и от температуры ванны. Поправка тем больше, чем больше длина выступающего столбика и чем больше разность между температурой резервуара и среды, окружающей выступающий столбик.

Для вычисления поправки на выступающий столбик обычно пользуются формулой

$$C = Kn(t - t_1)$$

где  $C$  — поправка на выступающий столбик,  $n$  — число градусов в выступающем столбике,  $t$  — температура ванны,  $t_1$  — средняя температура выступающего столбика и  $K$  — коэффициент, зависящий от коэффициента расширения жидкости, наполняющей термометр, и коэффициента расширения стекла.

Из ряда многочисленных опытов нами было найдено значение  $K$  при  $0^\circ$  для всех типов изучаемых нами термометров. Ниже приводится значение для жидкостных, ртутных и ртутно-таллиевых термометров:

Тип термометра	$K$
Ртутные . . . .	0,00014
Ртутно-таллиевые	0,00011
Жидкостные . .	0,00115

Johanna Busse [7] рекомендует в том случае, когда сорт стекла термометра неизвестен, брать  $K$  для стоградусного ртутного термометра равным 0,00016, для термометров, наполненных органическими жидкостями, 0,001.

В нашем случае для ртутных термометров величина  $K$  несколько меньше, рекомендуемой Busse, для жидкостных — совпадает.

Для сравнения влияния выступающего столбика на показания всех типов термометров нами были определены поправки при величине выступающего столбика равной  $15^\circ$  и  $30^\circ$  при температуре ванны  $0^\circ\text{C}$ .

Измерение средней температуры выступающего столбика производилось термометром атташе, помещенным серединой своего резервуара на середину длины выступающего столбика.

Из табл. 7 видно, что поправка на выступающий столбик для ртутных и ртутно-таллиевых термометров порядка нескольких сотых градуса, в то время, как для жидкостных термометров (в таблице три последних) она в 10 раз больше.

Таблица 7  
Поправка на выступающий столбик

№ термометра	$n$	
	$15^\circ$	$30^\circ$
547	-0,02	-0,05
581	0,00	-0,03
693	-0,02	-0,05
7509	-0,03	-0,06
16252	-0,02	-0,06
16245	0,00	-0,06
5880	-0,03	-0,06
16245	-0,02	—
1'	-0,30	-0,53
1	-0,25	—
С1	-0,31	—

Если поправка на выступающий столбик в нулевой ванне при выступающем столбике  $15^\circ$  для жидкостных термометров

порядка  $0,3^\circ$ , то в жидком воздухе такому порядку поправки соответствует выступающий столбик только в  $2^\circ$ . Для термометров со вложенной шкалой с пределами шкалы от  $0^\circ$  до  $-200^\circ$  в ванне жидкого кислорода поправка при выступающем столбике

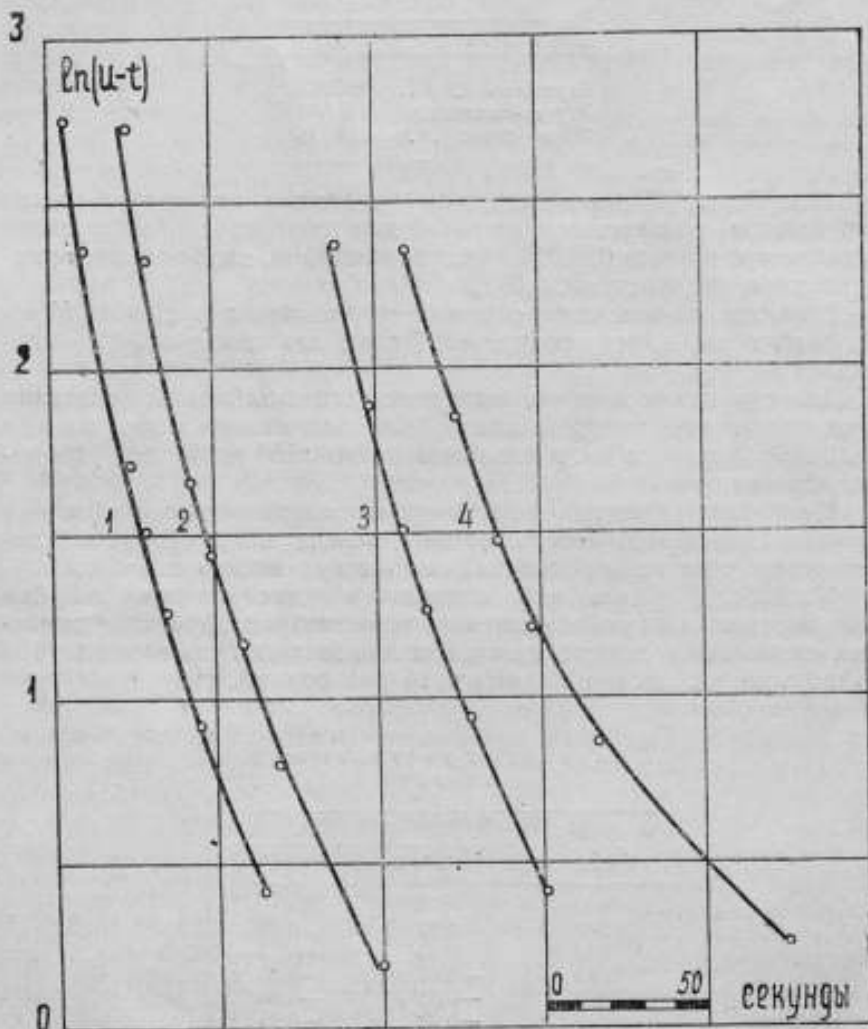


Рис. 7. Кривые отставания при понижающейся температуре от  $+15^\circ$  до  $-10^\circ$  при полном и неполном погружении термометра.  
1,2—термометр №623; 3,4—№С1

4—8° порядка 1—2°. Таким образом, при практическом применении термометра с наименьшим подразделением в  $0,1^\circ$ , поправка на выступающий столбик, точная величина которой неизвестна, может исказить показание термометра на несколько градусов.

Уже одного этого обстоятельства достаточно, чтобы утверждать, что жидкостные термометры для точных измерений низких температур непригодны.

Изучение отставания термометров со вложенной шкалой при полном и неполном их погружении при понижающейся температуре показало, что для жидкостных термометров константа отставания при неполном погружении больше, чем при полном, в то время как для ртутно-таллиевых термометров она остается постоянной.

Кривые отставания при полном и неполном погружении в перемешиваемой ванне при понижающейся температуре представлены на рис. 7, где нечетным кривым соответствуют кривые отставания при полном погружении, четным — при неполном погружении. Как видно из графика для жидкостного термометра С1 (кривые 3 и 4), константа отставания при выступающем столбике  $10^\circ$ , что по длине соответствует 60 мм, заметно увеличивается, в то время как для ртутно-таллиевого термометра № 693 (кривые 1 и 2) даже при выступающем столбике в  $40^\circ$  (по длине 125 мм) она остается постоянной.

Указанное обстоятельство безусловно говорит о преимуществе ртутно-таллиевых термометров перед жидкостными в области измерения температур от  $0^\circ$  до  $-59^\circ$ .

#### § 4. ТЕРМИЧЕСКОЕ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕ

Для выявления термического последствия в стеклянных жидкостных термометрах нами определялось положение нуля до работы термометра и после выдерживания его в течение 2 часов при температуре жидкого кислорода. При этом выяснилось, что точка нуля возвращается к первоначальному своему положению в течение времени от 20 до 40 минут.

У ртутно-таллиевых термометров после выдерживания их при  $-40^\circ$  термического последствия не наблюдается.

У ртутно-таллиевых термометров при хранении их в горизонтальном положении легко разрывается столбик амальгамы таллия. Для соединения столбика, хотя и не рекомендуется нагревать термометр, однако при большом разрыве столбика одного встряхивания бывает недостаточно и приходится прибегать к нагреванию, при этом термометр иногда приходится нагревать до довольно высокой температуры. После указанной операции происходит довольно большое смещение нуля в сторону понижения, достигающее до  $0,06^\circ$ . Такое смещение может держаться в течение нескольких суток.

Однако подобный недостаток не может помешать использованию ртутно-таллиевых термометров в качестве образцовых, так как при хранении их в вертикальном положении необходимость в нагревании термометра отпадает.

### § 5. СТЕКАНИЕ ЖИДКОСТИ СО СТЕНОК КАПИЛЛЯРА

Жидкостные термометры обладают большой инерцией, а поэтому помимо определения константы отставания, зависящей от температурного перепада, нами были поставлены специальные опыты по определению времени, необходимого для выдерживания термометров в нулевой ванне, с целью получения надежных результатов при отсчете нуля. Для различных термометров это время колеблется от 14 до 30 минут.

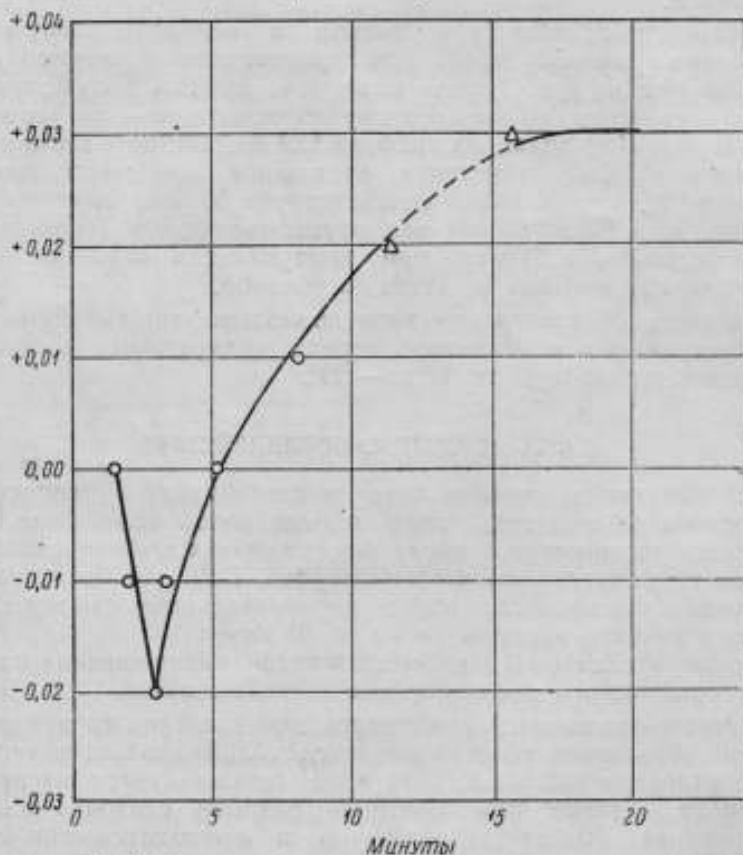


Рис. 8. Кривая стекания жидкости со стенок капилляра

При погружении термометра в нулевую ванну мениск опускается до некоторого нижнего положения, после чего начинает подниматься: наблюдается стекание жидкости со стенок капилляра.

Для наглядности приводим запись одного из опытов с термометром № 1. В данном случае мы видим, что мениск, опускаясь, доходит до положения, соответствующего отсчету по термометру  $-0,02^{\circ}$ , после чего начинает подниматься, достигая постоянного



положения при  $+0,03^\circ$ . Повышение мениска после положения по шкале, равного  $-0,02^\circ$ , происходит за счет стекания жидкости. Так как к концу стекания жидкости время прохождения мениска через штрих термометра, вследствие медленного стекания, делается неопределенным (получается впечатление, что мениск длительное время стоит на одном и том же месте), мы делали несколько отсчетов по времени, соответствующих положению мениска на шкале термометра  $+0,02^\circ$  и  $+0,03^\circ$ , и брали для них среднее арифметическое. Поэтому эти отсчеты по времени взяты нами в скобки. На рис. 8 изображен график стекания жидкости, где по оси абсцисс отложено время в минутах, а по оси ординат отсчеты по термометру. Кружками изображены наблюдаемые точки, треугольниками — вычисленные (среднее арифметическое).

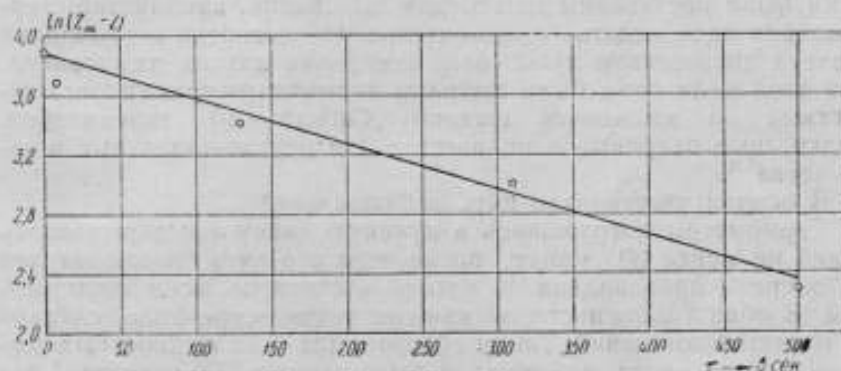


Рис. 9. Кривая пьезии стекания

#### Термометр № 1

Показание термометра $Z$	Время $t$
	0'00" (момент погружения)
+ 0,01°	1'00"
0,00	1'25"
- 0,01	2'00"
- 0,02	2'55"
- 0,01	3'02"
0,00	5'05"
+ 0,01	8'05"
+ 0,02	(11'16")
+ 0,03 = $Z_m$	(15'40")

Правая ветвь кривой характеризует стекание термометрической жидкости со стенок капилляра. В приведенном случае для палочного термометра № 1 количество стекающей жидкости повышает мениск на  $0,05^\circ$ . Количество стекающей жидкости

для разных термометров различно и изменение положения мениска колеблется по абсолютной величине от  $0,02^\circ$  до  $0,06^\circ$ .

Если по оси абсцисс отложить время  $\tau$  в секундах, а по оси ординат — натуральный логарифм разности показаний: установившегося  $Z_\infty$  и переменного  $Z$ , т. е.  $\ln(Z_\infty - Z)$ , то мы получим график, выражающий влияние стекания (рис. 9). Как видно из графика, явление стекания подчиняется линейному закону в полупологарифмической анаморфозе.

#### § 6. ОШИБКИ ОТСЧЕТА

Каждому типу термометров свойственны свои ошибки при отсчете, величина которых колеблется в широких пределах. Нами были поставлены опыты для выяснения, какому типу термометров надо отдать предпочтение по легкости и точности отсчета посредством лупы при измерении низких температур. Для этой цели нами были выбраны термометры трех типов: жидкостные со вложенной шкалой „Collux“ — 10 экземпляров, жидкостные палочные в количестве 4 и ртутно-галлиевые в количестве 3.

В опытах участвовало пять наблюдателей.

Термометры погружались в нулевую ванну и выдерживались в ней не менее 30 минут, после чего все пять наблюдателей по очереди производили по четыре отсчета по всем термометрам. В общей сложности на каждом термометре было сделано 20 отсчетов показаний. Таким образом, для всех жидкостных термометров со вложенной шкалой было сделано 200 отсчетов, для жидкостных палочных 80 и для ртутно-галлиевых 60.

Для каждого термометра выводилось среднее значение из всех 20 показаний и для каждого отсчета бралось отклонение от среднего значения.

Мы взяли девять классов абсолютной величины ошибки, совершенно равных по величине ( $0,004^\circ$ ), и распределили все ошибки для данного типа термометров между этими классами. Пределы этих классов были следующие:  $0,000-0,004^\circ$ ;  $0,005-0,009^\circ$ ;  $0,010-0,014^\circ$ ;  $0,015-0,019^\circ$ ;  $0,020-0,024^\circ$ ;  $0,025-0,029^\circ$ ;  $0,030-0,034^\circ$ ;  $0,035-0,039^\circ$  и  $0,040^\circ$  и выше.

Подсчитав количество ошибок, приходящихся на каждый класс, мы взяли его в процентном отношении к общему количеству ошибок для данного типа термометров. Эти данные помещены в табл. 8.

На графике рис. 10 изображены кривые распределения абсолютной величины ошибок для разных типов термометров. По оси абсцисс отложена абсолютная величина ошибки, по оси ординат — количество ошибок, выраженное в процентах.

Как видно из графика, лучшее распределение ошибок у ртутно-галлиевых термометров (кривая 1). Ход кривой распределения ошибок отсчета для жидкостных термометров со вложенной шкалой (кривая 2) и жидкостных палочных (кривая 3) почти

Таблица 8

Распределение абсолютной величины ошибки отсчета по термометру

Класс ошибок Тип термо- метров	0,000	0,004 <sup>0</sup>	0,005	-0,009 <sup>0</sup>	0,010	-0,014 <sup>0</sup>	0,015	-0,019 <sup>0</sup>	0,020	-0,024 <sup>0</sup>	0,025	-0,029 <sup>0</sup>	0,030	-0,031 <sup>0</sup>	0,035	-0,039 <sup>0</sup>	0,040 <sup>0</sup> и выше
Жидкостные со влажностной шкалой	42%		12%		21%		8%		8,5%		3,5%		2%		0,5%		2,5%
Жидкостные папюнные	28,8%		13,8%		33,8%		17,5%		3,7%		1,25%		0%		0%		1,25%
Ртутно-галлие- вые со влажностной шкалой	61,67%		23,34%		13,34%		1,67%		0%		—		—		—		—

одинаков, разница лишь в величине максимумов. Если кривая 1 имеет один максимум, приходящийся на класс наивысшей точности, то у кривых 2 и 3 таких максимумов два. Несмотря

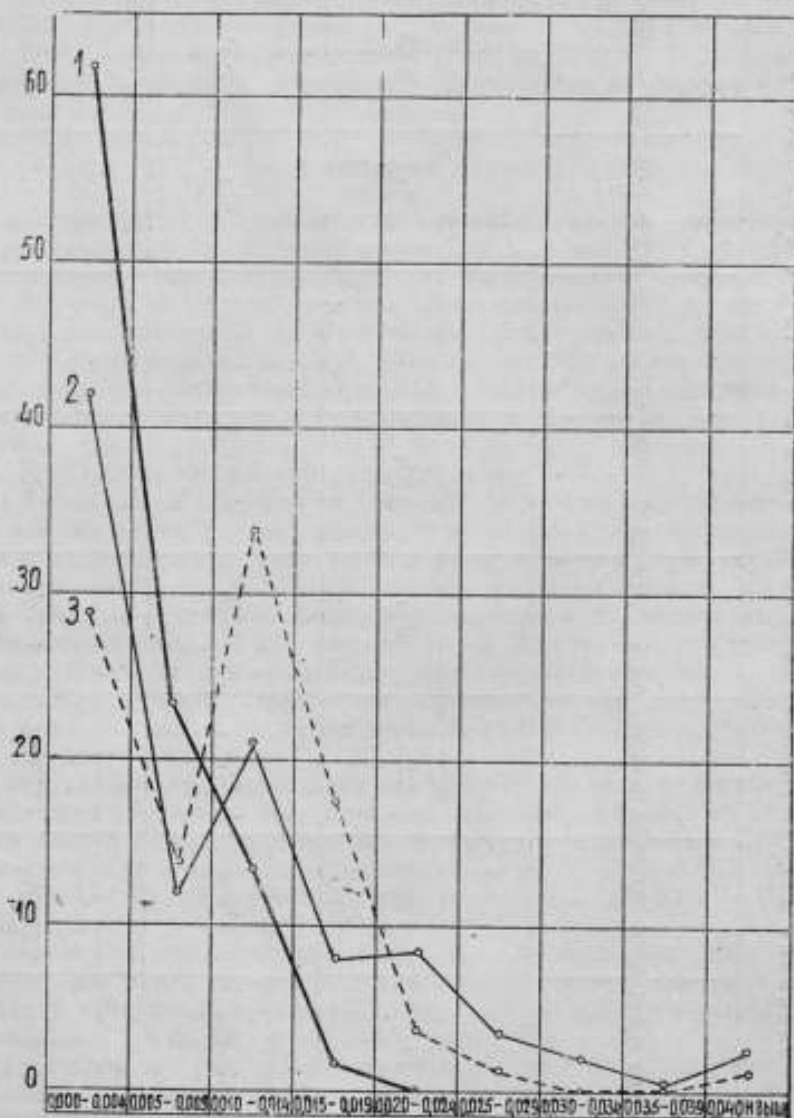


Рис. 10. Кривые распределения абсолютной величины ошибок отсчета

на то, что ртутно-галлиевые термометры имеют наименьшее подразделение  $0,2^\circ$ , точность отсчета у них больше, чем у жидкостных даже с наименьшим подразделением в  $0,1^\circ$ . Если для

ртутно-таллиевых термометров наиболее грубые ошибки отсчета не превышают  $0,019^\circ$  и количество этих ошибок составляет всего лишь  $1,5\%$  из общего количества ошибок, то для жидкостных термометров ошибки достигают  $0,04^\circ$  и выше.

Отсюда совершенно очевидно, что по точности отсчета на первом месте находятся ртутно-таллиевые термометры, на втором жидкостные со вложенной шкалой и на третьем жидкостные палочные.

Точность отсчета по ртутно-таллиевым термометрам может быть еще увеличена за счет уменьшения цены наименьшего подразделения до  $0,01^\circ$ .

Необходимо отметить, что эта работа является лишь этапом более серьезной и глубокой работы, так как для получения более точных и надежных результатов необходимо увеличить как количество термометров, так и число наблюдателей.

Вначале нами было намечено исследовать данный вопрос на всех 34 термометрах, но по независящим от нас обстоятельствам, мы вынуждены были ограничиться приведенным нами материалом.

Помимо ошибки отсчета по термометру, зависящей от типа термометра, на точность может еще влиять ошибка наблюдателя, которая зависит не только от опыта наблюдателя, играющего тоже немаловажную роль, но и от физиологических особенностей зрительного органа человека. Этот факт всем хорошо известен, но по имеющимся у нас сведениям, разрешением подобного вопроса никто не занимался, в то время как он представляет безусловный практический интерес. С наличием подобного явления мы столкнулись при отсчете по одному и тому же термометру двумя наблюдателями. Оба наблюдателя имели совершенно одинаковый опыт в измерительной практике, но величина отсчета у них систематически не совпадала. Этот факт и послужил причиной постановки вопроса выявления ошибки наблюдателя.

Для этой цели использован материал, вошедший в обработку при выявлении ошибки отсчета по термометру, зависящей от типа термометра. Только здесь мы поступили иначе. Мы брали среднее значение из четырех отсчетов наблюдателя по данному термометру и сравнивали его с средним значением, полученным из всех отсчетов пяти наблюдателей, получив таким образом ошибку наблюдателя по отношению к среднему наблюдателю.

Так как мы вели опыты с семнадцатью термометрами, то для каждого наблюдателя мы имели семнадцать ошибок. Абсолютную величину этих ошибок так же, как и для термометров, мы распределили по классам. Здесь достаточно было ограничиться всего лишь четырьмя классами, так как величина ошибок не превышала класса  $0,015-0,019^\circ$ .

Подсчитав количество ошибок по каждому классу, мы вывели его в процентах к общему количеству отсчетов для каждого наблюдателя. Данные помещены в табл. 9, где в последней строке даны ошибки для среднего наблюдателя.

Распределение ошибок наблюдателя представлено на графике рис. 11, где по оси абсцисс отложена абсолютная величина ошибки наблюдателя, по оси ординат количество ошибок, выраженное в процентах к общему количеству ошибок.

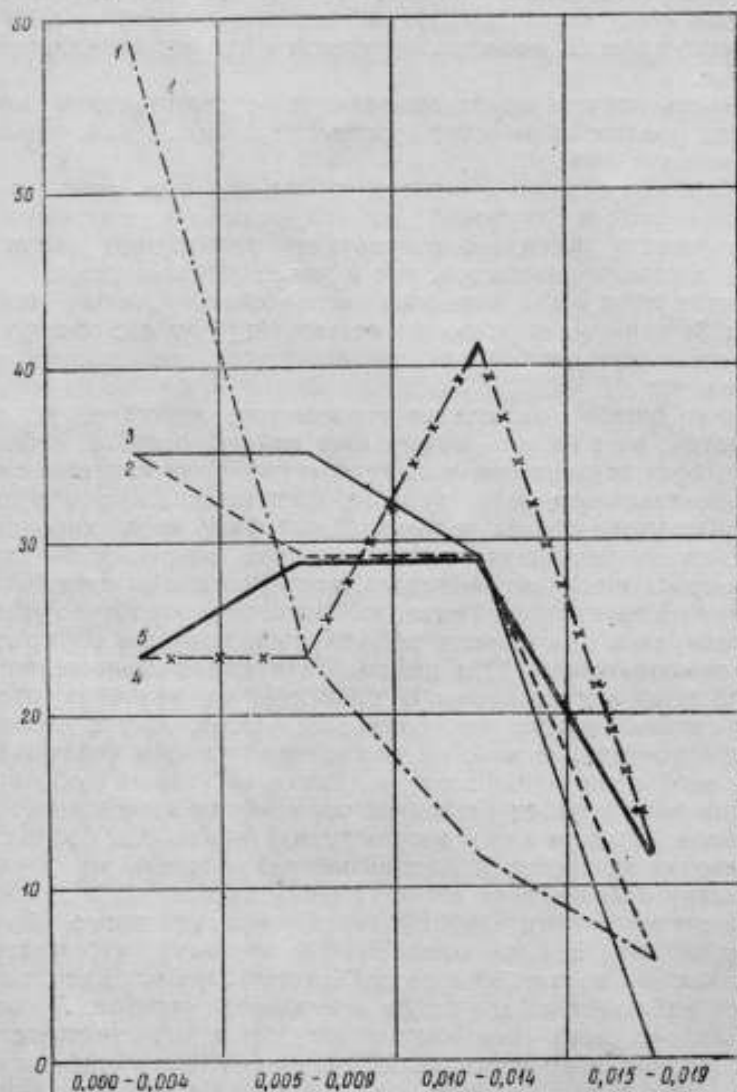


Рис. 11. Кривые распределения абсолютной величины ошибок наблюдателя

Нумер кривой соответствует номеру наблюдателя. Наблюдатели №№ 1, 2, 3 и 4 имели одинаковый опыт в измерительной практике, наблюдатель № 5 — небольшой опыт.

Таблица 9

Распределение абсолютной величины ошибки наблюдателя

Класс ошибок Наблюдатель	Класс ошибок			
	0,000—0,004°	0,005—0,009°	0,010—0,014°	0,015—0,019°
1	58,80%	23,53%	11,76%	5,88%
2	35,29	29,41	29,41	5,88
3	35,29	35,29	29,41	0,00
4	23,53	23,53	41,18	11,76
5	23,53	29,41	29,41	17,64
Средний наблюдатель	35,29	28,20	28,20	8,20

Как мы и предполагали, кривые распределения ошибок очень характерны для отдельного наблюдателя. Если наблюдатели №№ 1, 2, 3 и 5 имеют один максимум, то у наблюдателя № 4 их два.

Наблюдателю № 1 свойственны более точные отсчеты, так как наибольшее количество ошибок (около 60%) у него приходится на первый класс ошибок (0,000—0,004°). Во втором классе он имеет уже только 23% ошибок, в третьем—11% и в четвертом—1%.

Наблюдатель № 3 с одинаковой вероятностью ошибается в пределах первого и второго классов ошибок, далее эта вероятность уменьшается, но не так резко, как у наблюдателя № 1.

Наблюдатель № 2, имея максимум в первом классе ошибок, во втором и третьем классе ошибается с одинаковой вероятностью.

У наблюдателя № 5 максимум приходится на второй и третий классы.

Характерной особенностью отличается наблюдатель № 4. Он имеет два максимума: один в первом классе и второй, значительно больший по величине,— в третьем. Этот наблюдатель имеет большой опыт, и отнести такого рода аномалию за счет неопытности нельзя. Здесь объяснение надо искать в физиологических особенностях его органа зрения.

Первый класс ошибок можно расценивать, как класс наибольшей остроты зрения, тогда наиболее острое зрение должно быть у наблюдателя № 1, наименее острое — у наблюдателей № 4 и № 5. Такое объяснение вполне отвечает действительности, так как наблюдатель № 1 имеет исключительно острое и хорошее зрение, наблюдатель № 5 имеет самое плохое зрение из всех пяти наблюдателей.

Для среднего наблюдателя, как это видно из табл. 9, кривая распределения ошибок почти полностью совпадает с кривой 2, а поэтому на графике мы ее не приводим.

## Заключение

Резюмируя результаты произведенных исследований, можно сделать следующие выводы:

1. Жидкостные термометры с органическими наполнителями не могут быть использованы для точных измерений.

2. В температурном интервале от  $0^{\circ}$  до  $-59^{\circ}$  в качестве образцовых приборов могут быть применены ртутно-таллиевые термометры.

3. В интервале от  $-60^{\circ}$  до  $-190^{\circ}$  в качестве образцовых приборов для измерения температур могут быть использованы термометры, на что в 1940 г. указывал Б. И. Пилипчук [8].

4. Технические условия на изготовление образцовых ртутно-таллиевых термометров, на основании изложенных здесь исследований, могут быть разработаны лабораторией низких температур ВНИИМ совместно с приборостроительным заводом, изготовляющим термометры.

Пользуюсь случаем выразить благодарность проф. Г. М. Кондратьеву за ценные советы и Б. И. Пилипчуку за помощь в проведении опытов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Курнаков и Н. А. Пушкин. О сплавах таллия. Журн. Русск. Физ.-хим. Общ. 30, 1901.

2. Helmut Moser. Ueber Quecksilber-Tallium Legierungen und ihre Verwendung für thermometrische Zwecke. Phys. Zeitschr. 37 (24), 885-886, 1936.

3. Г. М. Кондратьев. Отставание термометров и измерение нестационарных температур. Сборник ВНИИМ „Тепловые измерения“ 10 (26) 37, 1936.

4. Rudolf Rothe. Ueber die Herstellung und den Gebrauch der Pentanthermometer. Z. f. Instr. K. 24, 47, 1904.

5. Rudolf Rothe. Ueber ein Flüssigkeitsthermometer für sehr tiefe Temperaturen. Z. f. Instr. K. 22, 192, 1902.

6. Walter Grundmann. Untersuchungen über Unterkühlungs und Veränderungserscheinungen an verschiedenen Thermometerflüssigkeiten, Z. f. Instr. K. 50, 363, 1930.

7. Johanna Bussc. Статья в сборнике работ: Temperature, Its Measurement and control in science and industry, изд. Reinhold Publishing Corporation, 1941.

8. Б. И. Пилипчук. Исследование постоянства некоторых термометров из неблагородных металлов. Сборник ВНИИМ „Тепловые измерения“, 1947.



О ПРИМЕНЕНИИ ПОТЕНЦИОМЕТРА ПО ДИССЕЛЬГОРСТУ  
ДЛЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Потенциометр по Диссельгорсту широко применяется в лабораторной практике для температурных измерений. Распространенность этого потенциометра в тепловых лабораториях объясняется наличием у него целого ряда общезвестных принципиальных и конструктивных преимуществ. Описание прибора было дано М. М. Поповым [1] и В. И. Кротовой [2]. Вопрос о его проверке получил исчерпывающее освещение в статье К. П. Широкова [3], указавшего на недостаточность теории самого Диссельгорста для полного анализа погрешностей потенциометра. Настоящая статья имеет целью изложение опыта работы автора с потенциометром в лаборатории низких температур ВНИИМ.

Для вычисления действительного значения измеряемой потенциометром электродвижущей силы служит следующая формула:

$$\begin{aligned}
 e_x = I(1 - \delta)(x_1 + 0,1x_2 + 0,01x_3 + 0,001x_4 + 0,0001x_5) + \\
 + I \left[ - \sum_{i=1}^{x_1} \alpha_i - 0,1 \sum_{i=1}^{x_2} \beta_i - 0,01 \sum_{i=1}^{x_3} \gamma_i - \omega + \right. \\
 \left. + (\varepsilon - \varepsilon_0) \left( 1,1 + \frac{x_2 - x_3}{110} \right) + \varepsilon_0 \frac{x_2 - x_3}{110} \right] \quad (1)
 \end{aligned}$$

(см. формулу (11) на стр. 83 в статье К. П. Широкова).

Здесь приняты следующие обозначения:

$I$  — сила рабочего тока.

$\delta$  — относительная погрешность в силе рабочего тока, зависящая от применяемого с потенциометром дополнительного устройства для компенсации нормального элемента.

$x_1, x_2, \dots, x_5$  — условные показания декад от первой до пятой включительно.

$\sum_{i=1}^{x_1} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{x_1}$  — сумма относительных погрешно-

стей первой декады ( $\times 1$ ).  $\sum_{i=1}^0 \alpha_i = 0$

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{x_3} - \text{та же сумма для второй декады}$$

$$(\times 0,1) \cdot \sum_{i=1}^0 \beta_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{x_3} \gamma_i = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{x_3} - \text{та же сумма для третьей декады}$$

$$(\times 0,01) \sum_{i=1}^0 \gamma_i = 0$$

Погрешности 4 и 5 декад не включены в формулу (1), потому что их влиянием можно пренебречь.

$\omega$  — погрешность нулевого показания потенциометра (при  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ ).

$\varepsilon_0$  — погрешность отношения токов в ветвях потенциометра при нулевом положении рычагов всех декад

$\varepsilon$  — погрешность отношения токов в ветвях потенциометра при тех положениях рычагов, которые они занимают во время измерения.

Величины, входящие в формулу (1), находятся при проверке потенциометра способами, подробно разобранными К. П. Широковым [3]. Результаты проверки указываются электронизмерительной лабораторией ВНИИМ в двух свидетельствах.

В свидетельстве для дополнительного устройства указывается величина погрешности  $\delta$  для четырех сил тока (0,1; 0,01; 0,001 и 0,0001 А).

В свидетельстве для потенциометра указываются значения остальных погрешностей —  $\omega$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  и  $\gamma_i$ .

Величины  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  и  $\gamma_i$  и их суммы для любого положения рычагов каждой из трех первых декад составляют в свидетельстве три специальные таблицы. Разность погрешностей отношения токов —  $(\varepsilon - \varepsilon_0)$  — подсчитывается по формуле:

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{\sum_{i=1}^{x_1} (\alpha_i - \alpha'_i)}{90} + (\varepsilon_{x_2} - \varepsilon_0) + (\varepsilon_{x_3} - \varepsilon_0) \quad (2)$$

Величины, входящие в эту формулу, а именно:  $\alpha'_i$  — относительные погрешности катушек первой замещающей декады, суммы их для каждого положения рычага этой декады, разности  $(\varepsilon_{x_2} - \varepsilon_0)$  и  $(\varepsilon_{x_3} - \varepsilon_0)$  располагаются также в трех специальных таблицах.

Сложная структура формулы (1) и значительное число вспомогательных таблиц, доходящее до шести, сильно затрудняют процесс вычисления действительных значений измеряемой в. д. с.

по показаниям потенциометра. Очень часто измеряемая величина — э. д. с. термопары или сопротивление термометра — зависит от времени. Для того, чтобы успевать вычислять температуру „на ходу“ приходится поручать проведение необходимых выкладок специально выделенному лицу. Громоздкость и трудоемкость вычислительных процедур, даже и в этом случае, иногда не позволяет получить во время окончательные результаты и, кроме того, не позволяет избежать самых неожиданных ошибок. Представляется желательным так преобразовать основную формулу (1), чтобы необходимые поправки можно было вводить путем добавления их к показаниям потенциометра, избегая умножений. Число таблиц, которыми приходится пользоваться, следует по возможности сократить.

Поправки к отсчету на потенциометре зависят от положения его рычагов и мы, очевидно, достигнем поставленной цели, если перестроим формулу (1), подбирая вместе члены, зависящие от показаний каждой декады.

Введем следующие обозначения:

$$E_x = x_1 + 0,1x_2 + 0,01x_3 + 0,001x_4 + 0,0001x_5$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= - \sum_{i=1}^{x_1} \alpha_i \\ p_2 &= - 0,1 \sum_{i=1}^{x_2} \beta_i \\ p_3 &= - 0,01 \sum_{i=1}^{x_3} \gamma_i \end{aligned} \right\} p = p_1 + p_2 + p_3$$

$$\Delta_1 = (\varepsilon - \varepsilon_0) \left( 1,1 + \frac{x_2 - x_3}{110} \right)$$

$$\Delta_2 = \varepsilon_0 \frac{x_2 - x_3}{110}$$

После введения этих обозначений формула (1) получит такой вид:

$$e_x = I[(1 - \delta) E_x + p - \omega + \Delta_1 + \Delta_2] \quad (3)$$

Вынесем из квадратной скобки в формуле (3) величину  $(1 - \delta)$ . Мы тогда получим

$$\begin{aligned} e_x &= I(1 - \delta) \left\{ E_x + \frac{1}{1 - \delta} [p - \omega + \Delta_1 + \Delta_2] \right\} \approx \\ &\approx I(1 - \delta) [E_x + p - \omega + \Delta_1 + \Delta_2] \end{aligned} \quad (4)$$

потому что в разложении в ряд

$$\frac{1}{1-\delta} [\rho - \omega + \Delta_1 + \Delta_2] = [1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots] [\rho - \omega + \Delta_1 + \Delta_2] =$$

$$= [\rho - \omega + \Delta_1 + \Delta_2] + \delta[\rho - \omega + \Delta_1 + \Delta_2] + \delta^2 [\rho - \omega + \Delta_1 + \Delta_2] + \dots$$

можно пренебречь всеми членами, содержащими степени  $\delta^1$ .

Рассмотрим отдельно все члены, находящиеся в квадратной скобке формулы (4).

Поправка  $\rho$  является суммой трех отдельных поправок, зависящих каждая от показаний только одной из трех первых декад.

Величина  $\omega$  не зависит от положения рычагов потенциометра. Выпишем полное выражение для  $\Delta_1$ , учитывая формулу (2):

$$\Delta_1 = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{x_1} (x_i - x'_i)}{90} + (\varepsilon_{x_2} - \varepsilon_0) + (\varepsilon_{x_1} - \varepsilon_0) \right\} \left( 1,1 + \frac{x_2 - x_3}{110} \right) =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{x_1} (x_i - x'_i)}{90} \left( 1,1 + \frac{x_2 - x_3}{110} \right) +$$

$$+ [(\varepsilon_{x_2} - \varepsilon_0) + (\varepsilon_{x_1} - \varepsilon_0)] \left( 1,1 + \frac{x_2 - x_3}{110} \right)$$

Мы можем полагать, что  $\Delta_1$  состоит из двух частей:

$$\Delta_1 = \Delta_1^{(1)} + \Delta_1^{(2)}$$

Для  $\Delta_1^{(1)}$  имеем выражение

$$\Delta_1^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{x_1} (x_i - x'_i)}{90} \left( 1,1 + \frac{x_2 - x_3}{110} \right) \quad (5)$$

Это — очень малая величина, так как в нее вошла множителем разность сумм погрешностей первых декад — основной и замещающей. Отбрасывая во второй круглой скобке

<sup>1</sup> Мы имеем право поступить так не только потому, что  $\delta$  по порядку величины не превышает нескольких десятитысячных, но также и потому, что формула (1), совпадающая с формулой (11) в статье К. П. Широкова, была им получена из его исходной точной формулы (3), путем умножения членов в больших круглых скобках на множитель  $(1 - \delta)$  с пренебрежением произведениями погрешностей. Наша формула (4) эквивалентна потому формуле (3) в статье К. П. Широкова.

величину  $\frac{x_2 - x_1}{110}$ , мы сделаем ошибку порядка 8%, что при малой величине  $\Delta_1^{(1)}$  вполне допустимо. Приближенное выражение для  $\Delta_1^{(1)}$  является функцией показания только первой декады потенциометра:

$$\Delta_1^{(1)} \approx \frac{\sum_{i=1}^{x_1} (a_i - a'_i)}{90} \cdot 1,1 \approx 1,22 \cdot 10^{-2} \sum_{i=1}^{x_1} (a_i - a'_i) \quad (6)$$

Вторая часть величины  $\Delta_1$  зависит одновременно от показаний второй и третьей декады. В самом деле, для  $\Delta_1^{(2)}$  имеем

$$\Delta_1^{(2)} = [(\varepsilon_{x_2} - \varepsilon_0) + (\varepsilon_{x_3} - \varepsilon_0)] \left(1,1 + \frac{x_2 - x_1}{110}\right) \quad (7)$$

Член  $\Delta_2$  точно также зависит от показаний второй и третьей декады

$$\Delta_2 = \varepsilon_0 \frac{x_2 - x_1}{110} \quad (8)$$

Соберем вместе все члены, зависящие от показаний первой декады, и обозначим их сумму буквой  $u$ . Очевидно

$$u = p_1 + \Delta_1^{(1)}$$

Для того, чтобы провести систематическое вычисление величины  $u$  для каждого положения рычага первой декады, можно воспользоваться следующей вспомогательной таблицей 1.

Таблица 1

$x_1$	$\sum_{i=1}^{x_1} a_i$	$\sum_{i=1}^{x_1} a'_i$	$\sum_{i=1}^{x_1} (a_i - a'_i)$	$\Delta_1^{(1)} = 1,22 \cdot 10^{-2} \sum_{i=1}^{x_1} (a_i - a'_i)$	$u = p_1 + \Delta_1^{(1)} = - \sum_{i=1}^{x_1} a_i + \Delta_1^{(1)}$
0					
1					
...					
10					

Члены, зависящие от показаний второй и третьей декады, нерационально выделять отдельно. Сопоставляя выражения (7) и (8), мы замечаем, что аргументом величин  $\Delta_1^{(2)}$  и  $\Delta_2$  является разность показаний этих декад  $x_2 - x_3$ . Представим себе квадратную таблицу (табл. 2), в которой для каждого показания  $x_2$  второй декады будет отведена отдельная строчка, для каждого показания  $x_3$  третьей декады будет отведен отдельный столбец. Вдоль каждой линии, параллельной главной диагонали таблицы,

Таблица 2

$x_3 \backslash x_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

Дополнительные метки на диаграмме:

- Вдоль диагонали, проходящей через клетки (2, 7) и (7, 2), нанесена метка  $x_2 - x_3 = 5$ .
- Вдоль диагонали, проходящей через клетки (7, 7) и (7, 7), нанесена метка  $x_2 - x_3 = 0$ .

разность  $x_2 - x_3$  сохраняет постоянное значение (на нашей таблице отмечена главная диагональ, вдоль которой  $x_2 - x_3 = 0$ , а также та прямая линия, на которой  $x_2 - x_3 = -5$ ).

Все поправки, связанные с показаниями второй и третьей декад потенциометра удобно будет разместить в клетках подобной таблицы. Необходимые подсчеты<sup>\*</sup> выгодно разбить на два этапа.

На первом этапе следует произвести суммирование величин  $p_2$ ,  $p_3$  и  $\Delta_2$ , вписываемых в клетки табл. 2. Величины  $p_2$  для каждого положения второго рычага вписываются подряд 10 раз в клетки соответствующей строчки. Величина  $p_3$  для каждого положения третьего рычага вписывается подряд 10 раз в клетки соответствующего столбца. Величины  $\Delta_2$  заносятся вдоль

соответствующей косой линии. После заполнения всех клеток таблицы в каждой клетке вычисляется сумма

$$v^1 = p_2 + p_3 + \Delta_2$$

На втором этапе следует вычислить величины  $\Delta_1^{(2)}$ .

С этой целью:

вписываем величины	$(\varepsilon_{x_1} - \varepsilon_0)$	в клетки по	строчкам
"	"	"	"
"	$(\varepsilon_{x_2} - \varepsilon_0)$	"	столбцам
"	"	"	"
"	$1,1 + \frac{x_2 - x_3}{110}$	"	косым
			линиям

Внутри каждой клетки затем производим действия, служащие на основании формулы (7) для вычисления  $\Delta_1^{(2)}$ .

Закончив вычисление всех  $\Delta_1^{(2)}$ , вписываем в соответствующие клетки, найденные на I этапе величины  $v^1$ . Суммируя в каждой клетке величины  $v^1$  и  $\Delta_1^{(2)}$ , найдем:

$$v = v^1 + \Delta_1^{(2)} = p_2 + p_3 + \Delta_1^{(2)} + \Delta_2$$

Величина  $v$  является объединением всех членов в квадратной скобке формулы (4), зависящих от показаний второй и третьей декады.

Составляя таблицы для вычислений, надо отводить достаточное место для каждого числа. При вычислениях очень удобно иметь дело только с целыми числами, для чего следует заранее все исходные цифры умножить на подходящую степень 10.

Приведем пример готовой таблицы поправок, составленной указанным путем. При таблице сохраняем сопровождающий ее текст, который резюмирует результат предыдущих преобразований.

Поправки к показаниям потенциометра по Диссельгорсту № 6601 фирмы О. Вольф с дополнительным устройством к нему № 8523

Для определения действительного значения измеряемой потенциометром э. д. с. при силе рабочего тока 0,01 А служит выражение:

$$e_x = 0,009\,9976 [E_x + u + v + 0,00015]$$

где  $e_x$  — действительное значение измеряемой э. д. с.;

$E_x$  — отсчет на потенциометре;

$u$  — поправка, зависящая от показаний 1-й декады;

$v$  — поправка, зависящая от показаний 2-й и 3-й декад.

Обе поправки прискиваются в табл. 3.

$x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  — условные показания 1, 2 и 3 декад.

Приведенная таблица составлена на основании свидетельств, выданных лабораторией электрических измерений ВНИИМ.

Числовой пример введения поправки. Показание

Таблица 3

10 <sup>0u</sup>		10 <sup>0v</sup>											
x <sub>1</sub>	10 <sup>0u</sup>	x <sub>2</sub> \ x <sub>3</sub>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	-13	-6	+1	+7	+15	+23	+30	+37	+46	+53	+60
1	-40	1	-21	-14	-6	-1	+7	+15	+21	+29	+38	+45	+52
2	-80	2	-39	-32	-25	-19	-11	-3	+3	+10	+20	+27	+34
3	-110	3	-57	-49	-42	-37	-29	-20	-15	-8	+1	+9	+16
4	-140	4	-76	-69	-62	-57	-49	-40	-34	-27	-19	-12	-3
5	-149	5	-93	-86	-79	-74	-65	-57	-51	-44	-36	-29	-21
6	-189	6	-112	-104	-97	-92	-84	-75	-70	-62	-54	-47	-40
7	-199	7	-131	-123	-115	-110	-102	-93	-88	-81	-70	-65	-58
8	-219	8	-157	-150	-143	-136	-128	-120	-114	-107	-98	-91	-84
9	-289	9	-175	-168	-161	-156	-147	-138	-133	-125	-117	-110	-103
10	-259	10	-193	-186	-179	-174	-165	-155	-150	-143	-135	-128	-121

К сумме и в следует добавить +150 (= -α 10<sup>0</sup>)

на декадах потенциометра во время измерения э. д. с. термопары при силе тока 0,01 А было  $E_x = 1453,6$  мкв.

$$E_x = \frac{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}{0,1453_{00}}$$

$$u = 0_0$$

$$v = + 0_7$$

$$\omega = + 1_{50}$$

$$0,1453_{17} \times 0,0099976 = 0,001454_8$$

Действительное значение измеряемой э. д. с. 1454,8 мкв.

Таблица приведенного образца позволяет получить все необходимые поправки исключительно быстро и избавляет от применения сложной формулы (1).

В тех случаях, когда температура измеряется платиновым термометром сопротивления, множитель перед квадратной скобкой (т. е.  $1 - \delta$ ) можно опустить, потому что он выпадает при вычислении отношения показаний потенциометра „на термометре“ и „на нормальной катушке“. Для работ исключительно с термопарами можно устранить умножение на этот множитель, заранее вычислив произведения  $-\delta x_i$  и присчитав их к цифрам в соответствующих местах таблицы.

Вычисление таблицы рабочих поправок может служить в известной степени для контроля правильности произведенной поверки потенциометра: поправки от поверки к поверке должны очевидно изменяться более или менее плавно, если только потенциометр находился в нормальных условиях в период между двумя поверками.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Попов. „Термометрия и калориметрия“. ОНТИ, 1934.
2. В. И. Кротова. „Потенциометры“. ВНИИМ, 1940.
3. К. П. Широков. Труды ВНИИМ 1 (56), 72-95, 1947.



## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫКИПАНИЯ ДЬЮАРОВСКИХ КОЛБ

## § 1. ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ

Дьюаровские сосуды представляют собою необходимую часть всех установок для экспериментальных работ в области низких температур; их отсутствие делает невозможным какие бы то ни было исследования в области глубоких охлаждений—ниже  $-70^{\circ}\text{C}$ . Поэтому естественной является попытка установить, каким физически обоснованным и достаточно простым способом может быть численно характеризована их „хладодерживающая способность“.

Настоящая статья содержит небольшое исследование этого вопроса. Выводы, которые здесь получены, относятся к Дьюаровским колбам обычного типа, т. е. к сосудам с узким горлом, шаровой формы; к сосудам иного типа, в частности к тем, в которых теплый наружный воздух находится в непосредственном соприкосновении с жидкостью, налитой в сосуд, наша теория неприменима.

Она чрезвычайно проста, но, несмотря на это, хорошо подтверждается опытом и приводит к формуле, дающей очень простой критерий качества теплоизолирующей оболочки Дьюаровских колб.

Введем следующие обозначения (рис. 1):

$\tau$  — время, отсчитываемое от начального момента  $\tau_0$ ;

$G$  — весовое количество сжиженного газа в колбе в момент времени  $\tau$ ;

$G_0$  — количество его в начальный момент времени  $\tau_0$ ;

$r$  — скрытая теплота испарения;

$k$  — суммарный коэффициент теплопередачи от наружной среды к сжиженному газу;

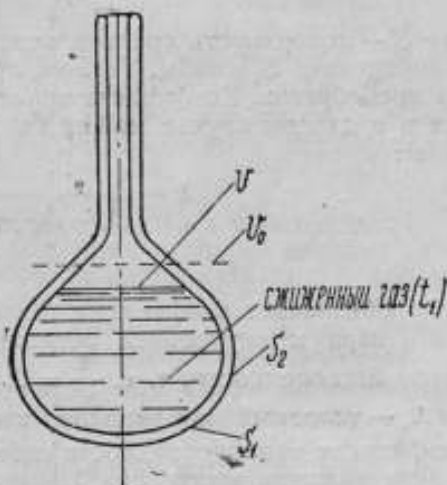


Рис. 1

$t_1$  — температура сжиженного газа;

$t_a$  — температура внешней среды, т. е. воздуха помещения, где находится Дьюаровская колба;

$t_2$  — температура наружной поверхности колбы, находящаяся в соприкосновении с наружным воздухом.

Количество тепла  $dQ$ , переданное за элемент времени  $d\tau$  наружным воздухом сжиженному газу, вызовет испарение его некоторого количества, равного  $dG$ , и следовательно, может быть представлено в виде

$$dQ = -\rho dG$$

С другой стороны то же количество тепла  $dQ$  можно приближенно представить в виде

$$dQ = k \cdot (t_1 - t_a) \cdot S \cdot d\tau,$$

где  $S$  — поверхность средняя между наружной поверхностью  $S_2$  и внутренней  $S_1$  колбы. Теплом, прошедшим через горло колбы, мы пренебрегли. Коэффициент теплопередачи  $k$  — величина сложная и в данном случае может быть представлен в следующем виде<sup>1</sup>:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'}} \quad (1)$$

$\alpha'$  обозначает коэффициент теплоотдачи от сжиженного газа и его пара к внутренней поверхности колбы; он практически равен бесконечности, т. е.  $\frac{1}{\alpha'} = 0$ .

$\lambda_s$  — условный коэффициент, так называемый эквивалентный коэффициент теплопроводности слоя заданной толщины; в данном случае толщина этого слоя  $\delta$  равна расстоянию между отражающими поверхностями стенок колбы. (Мы пренебрегли кривизной, что, конечно, вполне допустимо).

Приравняв между собой два вышенаписанные выражения для  $dQ$ , получим:

$$-\rho dG = k \cdot S(t_1 - t_a) d\tau \quad (2)$$

Отсюда интегрированием находим выражение для убыли жидкости в колбе за время  $\tau - \tau_0$ :

$$\rho(G_0 - G) = k \cdot S(t_1 - t_a) \cdot (\tau - \tau_0) \quad (3)$$

Здесь предполагается, что наружные условия с течением времени не меняются, т. е. что  $\alpha$  и  $\lambda_s$  величины постоянные

<sup>1</sup> М. А. Михеев. Основы теплопередачи. 1947, § 32, стр. 210.

точно так же, как  $t_1$  и  $t_0$ ; это предположение можно считать довольно точно отражающим наблюдаемое явление.

Из формулы (3) вытекает важное следствие: убыль сжиженного газа в Дьюаровской колбе происходит прямо пропорционально времени, другими словами, скорость выкипания, которую обозначим через  $B$ , есть величина постоянная:

$$B = -\frac{dG}{d\tau} = k S \frac{t_1 - t_0}{\rho} \quad (4)$$

В дальнейшем мы будем выражать  $B$  в граммах, выкипающих за 1 час.

При выводе формул (2), (3), (4) скрытым образом предположено, что замена температуры  $t_2$  температурой  $t_0$  не повлечет за собой заметной ошибки. Более строгий расчет, который мы не приводим, показывает, что при полной эвакуации стенок колбы разность температур  $t_0 - t_2$  будет порядка немногих градусов (около 5). Это, конечно, не может не отразиться на численном значении коэффициента  $k$ ; однако, если только температура  $t_2$  будет оставаться во все время выкипания жидкости постоянной, то линейный закон (3) должен быть справедливым.

## § 2. РЕЗУЛЬТАТЫ НЕКОТОРЫХ ОПЫТОВ И ВЫЧИСЛЕНИЙ

Опыты со всеми без исключения металлическими и стеклянными шаровыми колбами вполне подтвердили вышеизложенную теорию: линейная зависимость между  $G$  и  $\tau$  сохраняется в течение всего процесса выкипания (один опыт длился 8 суток).

Приведем некоторые опытные данные. На рис. 2 изображены результаты наблюдений над выкипанием жидкого воздуха в металлических Дьюаровских колбах типа „У“ изготовления 1-го автогенного завода в Москве. По оси абсцисс отложено время в часах, а по оси ординат — количество выкипевшей жидкости в граммах. Экспериментальные точки хорошо ложатся на прямые линии, чем и подтверждается справедливость формул (3) и (4).

Прямая 1 построена по данным наблюдений 1946 г. для 5-литровой колбы № 322, прямая 2 построена для той же колбы по данным наблюдений 1938 г. Прямые 1 и 2 почти параллельны, что свидетельствует о хорошо сохранившемся вакууме между стенками колбы на протяжении 8 лет. Скорость выкипания  $B$  в этом случае составляет приблизительно 16 г/час.

Прямая 4 изображает выкипание жидкого воздуха из 10-литровой колбы № 124 по данным 1946 г.; прямая 3 — то же по наблюдениям 1938 г. Увеличение  $B$  — наклона прямой 4, по сравнению с наклоном прямой 3, следует отнести за счет ухудшения вакуума между стенками колбы; в 1938 г. мы имели для этой колбы  $B = 20$  г/час, а в 1946 г. скорость выкипания возросла до  $B = 39$  г/час.

Из этих опытных данных особого интереса заслуживают данные, относящиеся к колбе № 322, сохранившей свои изоляционные качества в течение столь продолжительного времени. Поэтому с большой долей вероятности можно допустить, что теплопередача через ее стенки происходит почти исключительно за счет обмена лучеиспусканием между поверхностями  $S_2$  и  $S_1$ . Так как обе эти поверхности параллельны и весьма близки друг к другу, то вместо формулы (4), если введем  $t_2$ , можно написать следующую формулу:

$$B = k' \cdot S \cdot \frac{t_2 - t_1}{\rho} \quad (5)$$

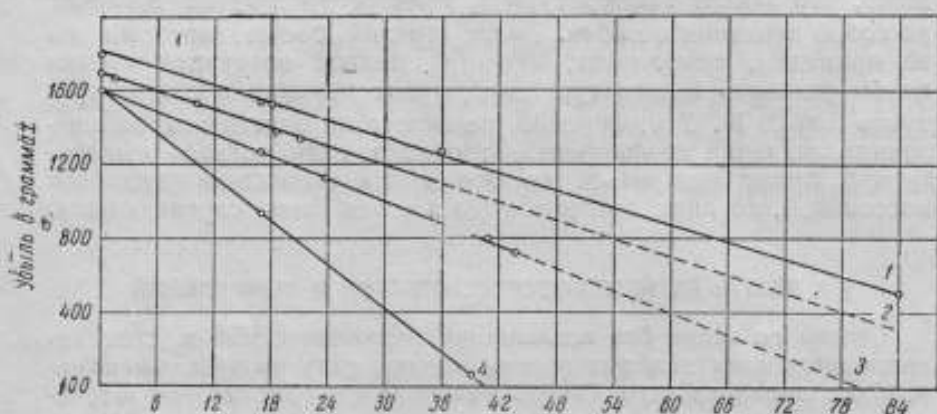


Рис. 2

где величина  $k'$  представляет собою условный коэффициент теплопередачи, определяемый формулой:

$$k' = C_n \cdot \frac{\left(\frac{T_2}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_1}{100}\right)^4}{T_2 - T_1} \quad (6)$$

Величина  $C_n$  — приведенный коэффициент лучеиспускания<sup>1</sup> равный

$$C_n = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_0}} \quad (7)$$

Величины  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_0$  — суть коэффициенты лучеиспускания поверхностей  $S_1$ ,  $S_2$ , и черной поверхности. В технической системе

<sup>1</sup> М. А. Михеев. Основы теплопередачи, 1947, § 23, стр. 175.

единиц, которой пользуются русские теплофизики,  $C_0 = 4,96 \text{ ккал/м}^2 \times \text{час} \times (\text{град})^4$ .

Для численной оценки величин  $C_1$  и  $C_2$  заметим, что внутренние поверхности металлических стенок колбы никелированы или полированы; для этого состояния поверхности можно принять

$$C_1 = C_2 = 0,6$$

Ввиду хорошего вакуума разность температур  $t_2$  и  $t_1$  не может быть велика; примем ее равной  $2^\circ$ ; при  $t_1 = 20^\circ$  получаем  $t_2 = 18^\circ$ . В колбе находился жидкий воздух, для которого  $t_1 = -190^\circ$ . Таким образом, имеем

$$T_1 = -190 + 273 = 83, \quad T_2 = 18 + 273 = 291,$$

$$\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 = 0,475, \quad \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 = 71,71$$

Поверхность колбы объемом в 5 литров получается равной  $S = 353 \text{ см}^2$ . Скрытую теплоту испарения жидкого воздуха вблизи  $-190^\circ$  примем  $r = 50 \text{ ккал/кг}$ .

Подсчет по (6) и (7) для этого случая даст:

$$\begin{aligned} k'(T_2 - T_1) &= k'(t_2 - t_1) = C_0 \left[ \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 \right] = \\ &= \frac{1}{\frac{2}{0,6} - \frac{1}{4,96}} [71,71 - 0,47] = 22,8 \end{aligned}$$

и из (5) получается:

$$B = \frac{353 \cdot 10^{-4} \cdot 22,8}{50} \frac{\text{кг}}{\text{час}} = 16 \frac{\text{г}}{\text{час}}$$

Следовательно, согласие между результатами опыта и вычислений, произведенных по элементарным формулам теории теплообмена, — удовлетворительное.

### § 3. ВЫВОДЫ. ОБОБЩЕНИЕ

1. Хладоудерживающую способность Дьюаровской колбы можно оценить или скоростью выкипания  $B$  или величиной  $\frac{B}{S}$ .

Оба эти критерия обладают тем недостатком, что они зависят не только от степени вакуума в двойной стенке колбы и от качества отражающего радиацию покрытия внутренних поверхностей, но еще и от свойств сжиженного газа, наполняющего колбу. Из формул (1) и (4) видно, что для данной жидкости, наполняющей колбу и в ней кипящей,  $B$  зависит от  $k$ , т. е. — поскольку  $\alpha$  можно считать величиной постоянной, — от величины

$\Lambda_3$ , фигурирующей в формуле (1). Величина же  $\Lambda_3$  уже не зависит от рода сжиженного газа и от размеров колбы, а характеризует только изоляционные свойства стенки колбы: чем хуже вакуум, чем хуже отполированы поверхности, чем меньше способность активированного угля поглощать газы, — тем больше  $\Lambda_3$ . Как известно из теории теплообмена, эта величина суммарно учитывает эффект конвекции, кондукции и радиации.

Из формулы (4) видно, что, зная  $t_1 - t_2$ ,  $\rho$ ,  $S$  и определив из опыта  $B$ , — а это совсем незатруднительно, — можем подсчитать  $k$ ; после этого по (1) находим и  $\Lambda_3$ , причем  $\frac{1}{\alpha} \approx 0$ , а величину  $\alpha$  в случае нахождения колбы в спокойном воздухе или слабо движущемся можно, в среднем, принять равной  $5 \text{ ккал/м}^2 \times \text{час} \times \text{град}$ .

Таким образом, единственно физически обоснованным критерием изолирующей способности Дьюаровских колб следует признать, в первом приближении, величину обратную  $\Lambda_3$ , т. е. тепловое сопротивление вакуумной прослойки между поверхностями  $S_1$  и  $S_2$ . Этот критерий общепринят в теплотехнике для воздушных слоев.

2. Из опытов, здесь описанных, видно, что возможны случаи, когда металлические колбы сохраняют свои изолирующие качества в течение нескольких лет. Это обстоятельство опровергает ходячее мнение, что ухудшение изолирующих качеств металлической колбы наступает уже через два года.

3. Теоретические исследования выкипания Дьюаровских колб обычно отличаются большой сложностью, но согласно вычисленных и наблюдаемых величин  $B$  получается не вполне удовлетворительным; в качестве примера можно привести исследование Фойгта и Мейсснера (Voigt und Meissner), помещенное в Zeitschrift für Instrumentenkunde за 1930 г., февраль, стр. 121. Тем более интересны полученные здесь результаты; формулы, нами установленные, до сих пор, сколько нам известно, еще не применялись.

Заметим, что рассуждения § 1 имеют общий характер и могут быть перенесены на любые кипящие жидкости и сосуды любой формы с двойными стенками, какими бы термоизоляционными материалами ни были наполнены полости между стенками, с тем лишь ограничением, что размеры горла малы по сравнению с размерами всего сосуда и что сосуд не имеет чрезмерно сложных очертаний (например, входящих углов).

Нетрудно видеть, что наблюдение над выкипанием жидкостей из сосудов такого рода может послужить основой для нового простого метода определения коэффициентов суммарной теплопередачи и коэффициентов теплопроводности термоизоляционных материалов.

А. В. Тарховой в 1939 г. были проделаны опыты уже совсем в иных областях температур и для иных веществ. Один из этих опытов мы здесь описываем.

Был взят цилиндрический латуный сосуд с двойными стенками; изоляционный слой был образован засышкой полости между внутренней и наружной стенками порошком жженой магнезии; вместо кипящего жидкого воздуха внутри сосуда была налита вода, так что температура  $t_1$  была равна приблизительно  $100^\circ$ . Сосуд этот, снабженный пароотводной узкогорлой трубкой, как показано на рис. 3, погрузили в масляную ванну, энергично размешиваемую и имевшую постоянную температуру, которая при наших наблюдениях заключалась в пределах от  $125^\circ$  до  $150^\circ$  С. Сосуд отовсюду омывался маслом, только горло выступало наружу; пары кипящей воды свободно уходили в атмо-

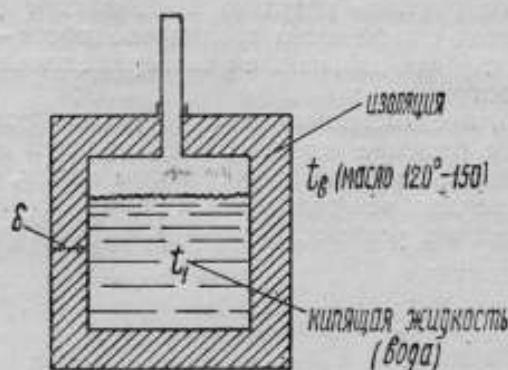


Рис. 3

сферу. В этих условиях можно считать  $\alpha = \infty$ , а коэффициент  $k$  сводится к  $\Lambda_s$ ; эта последняя величина по определению равна<sup>1</sup>:

$$\Lambda_s = \frac{\lambda_s}{\sum \delta_i} \quad (8)$$

Пренебрегая тепловым сопротивлением металлических (тонких) стенок цилиндра по сравнению с тепловым сопротивлением порошка, получаем

$$\Lambda_s = \frac{\lambda}{\delta} \quad (9)$$

Наблюдая скорость выкипания воды, можем найти  $B$ , после чего, измерив перепад температур  $t_2 - t_1$  между маслом и водой, далее, зная  $S$  по (4), вычисляем  $k = \Lambda_s$  и по (9) определяем  $\lambda$ . Толщина слоя  $\delta$ , конечно, должна быть известна; в нашем примере она была порядка 10 мм. Для воды  $\rho$  мы приняли равной

<sup>1</sup>  $\delta_i$  — толщины простых слоев, из которых образуется сложный слой.

536 ккал/кг. При этих опытах был использован большой масляный термостат лаборатории средних температур ВНИИМ.

В результате получилось из одного опыта  $\lambda = 0,075 \text{ ккал/м} \times \text{час} \times \text{град}$ , а из другого  $\lambda = 0,072$ . Эти цифры весьма близки к значениям  $\lambda$  для порошка магнезии (имевшего ту же видимую плотность), полученным совершенно иным методом.

Нами этот метод с некоторым видоизменением был применен к определению коэффициента теплопроводности сыпучих и волокнистых материалов, а именно — стеклянного войлока, гранулированного шлака, речного песка, а также кварцевого стекла. Во всех случаях было получено вполне удовлетворительное согласие со значениями  $\lambda$ , полученными иными методами.

Такие благоприятные результаты позволяют рекомендовать этот новый метод определения теплопроводности — так сказать, весовой метод, — для дальнейшей экспериментальной и теоретической разработки.

Разумеется, предложенная нами теория не может претендовать на полное решение вопроса; в дальнейшем ее необходимо усовершенствовать, вводя в расчет горло колбы, более глубоко рассматривая теплообмен радиацией и приняв во внимание форму колбы и граничные условия. Однако для целей практики наша теория достаточна.



## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Б. И. Пилипчук. Ошибки эталонирования платинового термометра сопротивлением . . . . .	3
Б. И. Пилипчук. Контроль чистоты льда . . . . .	50
Б. И. Пилипчук. Осуществление точки затвердевания ртути . . . . .	57
Л. Д. Худякова. Изучение низкотемпературных жидкостных стеклянных термометров . . . . .	66
Б. И. Пилипчук. О применении потенциометра по Дисселягору для температурных измерений . . . . .	85
Г. М. Кондратьев. Исследование выкипания Дьюаровских колб. . . . .	103

Отв. редактор проф. Б. М. Яковский.  
Технический редактор и корректор Е. А. Пулькина.

М-10471. Подписано к печати 2/VII 48 г. Тираж 1200  
Формат бумаги 62 × 94. Уч.-авт. листов 8. Печ. л. 7. Заказ 1785

Типография № 2 Управления издательства и полиграфии Ленинградского университета

